Seção 29 – Ortogonalidade das funções de Bessel
Membrana circular

Vamos considerar o problema de determinar vibrações livres de uma membrana presa pelo bordo (tambor), conhecidos o deslocamento e a velocidade iniciais dos pontos da membrana. A membrana vai ocupar uma região D do plano $\mathbb{R}^2$, limitada por uma curva fechada γ. Seja $u = u(x, y, t)$ o deslocamento (na direção perpendicular) do ponto de coordenadas (x, y) no instante t. Usando as leis da Física, mostra-se que u satisfaz a equação da onda bidimensional

$$u_{tt} = c^2 \Delta u,$$

onde c^2 é uma constante positiva que depende da tensão na membrana e da densidade da mesma e Δu é o laplaciano de u em relação as variáveis espaciais. Em coordenadas cartesianas a expressão do laplaciano é

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} \,.$$

Em coordenadas polares, a expressão do é

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}\, u_r + \frac{1}{r^2}\, u_{\theta\theta} \,.$$

Vejamos a formulação matemática do problema. Seja D a região do plano $\mathbb{R}^2$ limitada por uma curva fechada γ. Dadas duas funções $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, consideremos o problema de determinar a função $u = u(x, y, t)$ definida para $(x, y) \in D$ e $t \in [0, +\infty)$ satisfazendo

$$(P) \qquad \begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u & (x, y) \in D \;,\; t > 0 \\ u\,(x, y, t) = 0 & (x, y) \in \gamma \;,\; t \geq 0 \\ u\,(x, y, 0) = f\,(x, y) & (x, y) \in D \\ u_t\,(x, y, 0) = g\,(x, y) & (x, y) \in D \end{cases}$$

A condição $u\,(x, y, t) = 0$, para $(x, y) \in \gamma$ e $t \geq 0$ expressa o fato que a membrana está presa pelo bordo (nos pontos do bordo o deslocamente é 0 em qualquer instante). O gráfico da função f dá o formato inicial da membrana e a função g dá a velocidade inicial em cada um de seus pontos.

A partir deste ponto vamos considerar o caso de uma membrana circular. Escolhendo o raio do círculo como unidade de comprimento, podemos supor que esse raio é 1. Seja D o disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Para tornar o estudo mais simples, vamos considerar apenas o caso de *simetria radial*, em que, quando se expressa a parte espacial em coordenadas polares, o deslocamento $u = u(r, \theta, t) = u(r, t)$ não depende de θ, sendo função apenas de r e t. Isto significa que, em qualquer instante t, o formato da membrana é o gráfico de uma função u que depende de r mas não de θ. Ou seja, em qualquer instante t o formato da membrana é o de uma superfície de revolução. Este caso vai acontecer quando as funçõs f e g que dão as condições iniciais no Problema (P) acima, forem também funções radiais (dependentes só de r e não de θ).

Nesse contexto, o Problema (P) tem a seguinte formulação. Dadas duas funções $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$

e $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, queremos encontrar a função $u=u(r,t)$ satisfazendo

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2\Big(u_{rr}+\dfrac{1}{r}\,u_r\Big), & (0<r<1\,, \quad 0<t<\infty) \\ u(1,t)=0\,, & (0<t<\infty) \\ u(r,0)=f(r)\,, & (0<r<1) \\ u_t(r,0)=g(r)\,, & (0<r<1) \end{cases} \tag{1}$$

Pelo o método de separação de variáveis, procuramos primeiro u da forma

$$u\,(r,t)=\phi(r)\psi(t)\,, \tag{2}$$

isto é, u uma onda estacionária radial em D. Substituindo (2) na equação da onda, do modo usual obtemos

$$\phi(r)\psi''(t)=c^2\Big(\phi''(r)+\frac{1}{r}\,\phi'(r)\psi(t)\Big),$$

ou seja,

$$\frac{\psi''(t)}{c^2\psi(t)}=\frac{r\phi''(r)+\phi'(r)}{r\phi(r)}=\lambda\,.$$

Daí seguem as duas equações diferenciais independentes

$$r\phi''(r)+\phi'(r)-\lambda r\phi(r)=0 \tag{3}$$

e

$$\psi''-c^2\lambda\,\psi=0\,. \tag{4}$$

Além disto, a condição de fronteira

$$u(1,t)=\phi(1)\psi(t)=0\,, \qquad \text{para todo } t\geq 0\,.$$

implica que devemos ter

$$\phi(1)=0\,,$$

pois, caso contrário, para ter o produto sempre nulo, deveríamos ter, necessariamente, $\psi(t)=0$ para todo $t>0$, o que implicaria que $u=0$ seria a solução trivial. Vamos, então, considaderar o problema de encontrar uma função $\phi:[0,1]\to\mathbb{R}$ não trivial e um $\lambda\in\mathbb{R}$ satisfazendo

$$\begin{cases} r\phi''(r)+\phi'(r)-\lambda r\phi(r)=0\,, & \text{para } 0<r<1 \\ \phi(1)=0 \end{cases} \tag{5}$$

Afirmação: *Para que exista solução não trivial para* (5), *é necessário que* $\lambda<0$.

Demostração: Notando que $r\phi''(r)+\phi'(r)=\big(r\phi'(r)\big)'$, podemos reescrever nossa equação diferencial na forma

$$\big(r\phi'(r)\big)'=\lambda r\phi(r)\,.$$

Multiplicando ambos os lados por $\phi(r)$ e integrando entre 0 e 1, temos

$$\int_0^1\big(r\phi'(r)\big)'\phi(r)\,dr=\lambda\int_0^1\big(\phi(r)\big)^2r\,dr$$

Por outro lado, por integração por partes, temos

$$\int_0^1\big(r\phi'(r)\big)'\phi(r)\,dr=r\phi'(r)\,\phi(r)\Big|_{r=0}^{r=1}-\int_0^1 r\phi'(r)\,\phi'(r)\,dr\,.$$

Levando em conta que $r\phi'(r)$ se anula para $r = 0$ e que $\phi(r)$ se anula para $r = 1$, obtemos

$$-\int_0^1 \big(\phi'(r)\big)^2\, r\, dr = \lambda \int_0^1 \big(\phi(r)\big)^2 r\, dr\,.$$

Segue que

$$\lambda = -\frac{\int_0^1 \big(\phi'(r)\big)^2\, r\, dr}{\int_0^1 \big(\phi(r)\big)^2 r\, dr}$$

e, como estas duas integrais são positivas, concluímos que $\lambda < 0$. □

Passamos agora a procurar solução não trivial do problema (5), sabendo já que $\lambda < 0$. Fazemos $\lambda = -\alpha^2$, com $\alpha > 0$. Multiplicando por r, ficamos com a EDO

$$r^2\phi''(r) + r\phi'(r) + \alpha^2 r^2 \phi(r) = 0\,. \tag{6}$$

A equação (6) se reduz a uma equação de Bessel através da mudança de variável $s = \alpha\, r$. De fato, pela regra da cadeia,

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{ds}\,\frac{ds}{dr} = \alpha\,\frac{d\phi}{ds} \tag{7}$$

e, multiplicando por r,

$$r\,\frac{d\phi}{dr} = s\,\frac{d\phi}{ds}\,. \tag{8}$$

Derivando (8) mais uma vez e usando novamente a regra da cadeia, obtemos

$$r^2\,\frac{d^2\phi}{dr^2} = s^2\,\frac{d^2\phi}{ds^2}\,. \tag{9}$$

Substituindo (8) e (9) na equação (6), obtemos

$$s^2\,\frac{d^2\phi}{ds^2} + s\,\frac{d\phi}{ds} + s^2\phi = 0\,, \tag{10}$$

que é a equação de Bessel de índice $p = 0$. Portanto, se pensarmos em ϕ expressa como função de s e não de r, teremos $\phi(s) = C_1 J_0(s) + C_2 Y_0(s)$. Voltando a expressar ϕ em função de r, $\phi(r) = C_1 J_0(\alpha\, r) + C_2 Y_0(\alpha\, r)$. Lembrando agora que as funções envolvidas devem ser finitas e estar bem definidas para $r = 0$, pois $r = 0$ corresponde à origem, que é o centro do disco D, vê-se que é preciso que $C_2 = 0$, ou seja,

$$\phi(r) = C J_0(\alpha\, r)\,.$$

Na justificativa da igualdade acima foi usado um fato já estudado. A equação de Bessel de índice $p = 0$ tem duas soluções linearmente independentes, $J_0(x)$, que é limitada, e $Y_0(x)$, que é ilimitada numa vizinhança de $x = 0$. Portanto, as únicas soluções que são limitadas numa vizinhança de $x = 0$ são as da forma $C_0 J_0(x)$.

Nossa conclusão, até agora, é que as funções

$$\phi(r) = C\, J_0(\alpha\, r) \tag{11}$$

satisfazem a EDO (6). Precisamos ainda investigar para quais valores de α a função ϕ cumpre também a condição de fronteira $\phi(1) = 0$. Para isso, α deve cumprir a condição $J_0(\alpha) = 0$, isto é, α deve ser um dos zeros (positivos) da função de Bessel J_0. Sabemos que J_0 se anula para uma infinidade de zeros. Existe toda uma sequência de zeros positivos de J_0

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_m < \ldots\,.$$

Conclusão: *As soluções não triviais do problema* (5) *são dadas por*

$$\lambda_n = -\big(\alpha_n\big)^2 \tag{12}$$

e

$$\phi_n(rn) = C_n J_0(\alpha_n\, r)\,. \tag{13}$$

Continuação do problema da membrana. Agora, na equação (4), substituímos λ por $\lambda_n = -\big(\alpha_n\big)^2$ dado em (12). Obtemos

$$\psi'' + c^2\big(\alpha_n\big)^2\psi = 0\,,$$

cujas soluções são

$$\psi_n(t) = D_n \cos(c\alpha_n t) + E_n \operatorname{sen}(c\alpha_n t).$$

<u>**Consequência**</u>: *As funções*

$$u_n(r,t) = \Big(D_n \cos(c\alpha_n t) + E_n \operatorname{sen}(c\alpha_n t)\Big) J_0(\alpha_n\, r) \tag{14}$$

são soluções da equação da onda e satisfazem a condição de fronteira $u(1,t) = 0$. *As* u_n *representam as ondas estacionárias (com simetria radial) na membrana circular. A* u_n *é periódica em* t, *seu período é* $P_n = \dfrac{2\pi}{c\,\alpha_n}$ *e sua frequência é*

$$\omega_n = \frac{1}{P_n} = \frac{c\,\alpha_n}{2\pi}\,. \tag{15}$$

O movimento da membrana é a superposição das u_n, *dada por*

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(D_n \cos(c\alpha_n t) + E_n \operatorname{sen}(c\alpha_n t)\Big) J_0(\alpha_n\, r). \tag{16}$$

As frequências ω_n *dadas por* (15) *são frequências com as quais a membrana pode realizar oscilações periódicas, sendo, portanto, as frequências naturais de vibração (radialmente simétrica) da membrana. Duas conclusões surpreendentes seguem daí*:

– A primeira é que as frequências naturais de vibração da membrana circular têm a ver com os zeros das funções de Bessel;

– A segunda é que, ao contrário da corda vibrante, ou de uma coluna de ar, no caso da membrana as frequências naturais não são múltiplos de uma frequência fundamental, mais baixa. Esta é a razão pela qual se pode tocar melodias com instrumentos de cordas, mas não em tambores.

Aplicando as condições iniciais: Fazendo $t = 0$ em (16), temos

$$f(r) = u(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_0(\alpha_n r). \tag{17}$$

A série (17) é uma expansão em série de Fourier–Bessel, que vai ser estudada abaixo. Veremos, então, como calcular os coeficientes.

Observação final. Optamos por dar uma demonstração matemática da afirmação de que $\lambda < 0$ no problema (5). Mas existe também uma explicação física. Se tivéssemos $\lambda > 0$, então $\lambda = \beta^2$, com $\beta > 0$, e a equação (4) ficaria

$$\psi'' - c^2\beta^2\psi = 0\,.$$

Suas soluções, então, seriam

$$\psi(t) = De^{c\beta t} + Ee^{-c\beta t},$$

que representariam um movimento que não seria oscilatório e seria impossível do ponto de vista físico.

O mesmo tipo de coisa aconteceria se $\lambda = 0$. Essa não é uma explicação satisfatória do ponto de vista matemático, mas ajuda a entender o problema.

Séries de Fourier–Bessel

Vamos recordar a expansão em série de Fourier–seno. Dada uma função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, podíamos expandi-la numa série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x)\,.$$

Note que os números $n\pi$ que aparecem na série são justamente o zeros da função seno. O que vamos fazer agora é substituir o seno por uma função de Bessel, por exemplo, J_0. Consideramos a sequência $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots$ dos zeros (positivos) da função J_0 (isto é, $J_0(\alpha_n) = 0$). Queremos expandir uma função qualquer $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ em uma série da forma

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r)\,,$$

que vai ser uma *série de Fourier–Bessel*. Para tanto, vamos necessitar estudar a relação de ortogonalidade das funções de Bessel. A ortogonalidade das funções trigonométricas era mais simples,

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)\operatorname{sen}(m\pi x)\,dx = \begin{cases} 0\,, & \text{se } n \neq m \\ \dfrac{1}{2}\,, & \text{se } n = m\,. \end{cases}$$

Em geral, no estudo de funções ortogonais mais gerais, a relação de ortogonalidade entre duas funções $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ toma a forma

$$\int_a^b f(x)g(x)p(x)\,dx = 0\,,$$

onde $p(x) \geq 0$ é uma função fixa, chamada *função peso*. No caso dos senos, $p(x) = 1$. Para as funções de Bessel, $p(x) = x$ (ver o teorema abaixo). No que segue consideramos a função de Bessel J_n para um $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ qualquer. O leitor que quiser, poderá pensar sempre no caso $n = 0$, que ó o que se necessita para o caso de simetria radial na membrana circular.

Teorema (Ortogonalidade das funções de Bessel) *Fixado um n seja*

$$\alpha_{n,1} < \alpha_{n,2} < \alpha_{n,3} < \ldots < \alpha_{n,m} < \ldots\ .$$

a sequência dos zeros (positivos) da função de Bessel J_n (a função de Bessel J_n se anula para uma infinidade de zeros, ou seja, existe toda uma sequência de α's positivos para os quais $J_n(\alpha) = 0$). Então,

$$\int_0^1 J_n(\alpha_{n,m})J_n(\alpha_{n,k})\,rdr = 0\,, \qquad \text{se } m \neq k \tag{18}$$

$$\int_0^1 J_n(\alpha_{n,m})J_n(\alpha_{n,k})\,rdr = \frac{1}{2}\left(J_n'(\alpha_{n,m})\right)^2 = \frac{1}{2}\left(J_{n+1}(\alpha_{n,m})\right)^2, \qquad \text{se } m = k \tag{19}$$

Demonstração: (O leitor que quiser aceitar esse fato, poderá pular a demonstração sem prejuízo da leitura)

Sejam $\alpha = \alpha_{n,m}$ e $\beta = \alpha_{n,k}$. Sejam $u(x) = J_n(\alpha x)$ e $v(x) = J_n(\beta x)$. Então,

$$xu'' + u' + \Big(\alpha^2 - \frac{n^2}{x^2}\Big)xu = 0 \tag{20}$$

e

$$xv'' + v' + \Big(\beta^2 - \frac{n^2}{x^2}\Big)xv = 0\,.$$

Multiplicando a primeira equação por v, a segunda por u e subtraindo, obtemos

$$x(u''v - uv'') + (u'v - uv') = (\beta^2 - \alpha^2)xuv\,,$$

que é equivalente a

$$\frac{d}{dx}\big(x(u'v - uv')\big) = (\beta^2 - \alpha^2)xuv\,.$$

Integrando entre 0 e 1 e levando em conta que $u(1) = J_n(\alpha) = 0$ e $v(1) = J_n(\beta) = 0$, pois α e β são zeros de J_n, obtemos

$$(\beta^2 - \alpha^2)\int_0^1 u(x)v(x)\,x\,dx = 0\,.$$

Segue daí que se $\alpha \neq \beta$ então $\displaystyle\int_0^1 u(x)v(x)\,x\,dx = 0$, provando (18).

Para provar (19), multiplicamos (20) por $2xu'$, obtendo

$$2xu'(xu'' + u') + 2(\alpha^2x^2 - n^2)uu' = 0\,,$$

de onde segue que

$$\frac{d}{dx}\big(x^2(u')^2 + (\alpha^2x^2 - n^2)u^2\big) = 2\alpha^2xu^2.$$

Integrando, temos

$$2\alpha^2\int_0^1 xu^2dx = \Big(x^2(u')^2 + (\alpha^2x^2 - n^2)u^2\Big)\Big|_0^1$$

e levando em conta que $u(1) = J_n(\alpha) = 0$ e que, pela regra da cadeia, $u'(1) = \alpha J_n'(\alpha)$, obtemos

$$2\alpha^2\int_0^1 \big(J_n(\alpha x)\big)^2x\,dx = \alpha^2\big(J_n'(\alpha)\big)^2 - n^2\big(J_n(0)\big)^2.$$

Note que se $n = 0$, então o termo $n^2\big(J_n(0)\big)^2$ no lado direito da igualdade acima se anula. Para $n \geq 1$, temos $J_n(0) = 0$ e $n^2\big(J_n(0)\big)^2$ também se anula. Então, em qualquer um dos casos, obtemos

$$\int_0^1 \big(J_n(\alpha x)\big)^2x\,dx = \frac{1}{2}\,\big(J_n'(\alpha)\big)^2.$$

Para concluir a prova de (19), basta utilisar a identidade

$$\frac{d}{dx}\big(x^{-n}J_n(x)\big) = -x^{-n}J_{n+1}(x)\,,$$

que pode ser verificada a partir da expansão da função J_n em série de potências, e escrever

$$-nx^{-n-1}J_n(x) + x^{-n}J_n'(x) = -x^{-n}J_{n+1}(x).$$

Fazendo $x = \alpha$, obtemos finalmente $J_n'(\alpha) = -J_{n+1}(\alpha)$, concluindo a demonstração de (19). $\square$

Expansão em série de Fourier–Bessel. A relação de ortogonalidade abre a possibilidade para o seguinte tipo de expansão: dada uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ e fixado um n, queremos expressar $f(r)$ como

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \, J_n(\alpha_{n,m}\, r)\,. \tag{21}$$

A expansão acima, chamada de *série de Fourier–Bessel*, é possível para toda função "razoável". Os coeficientes são dados por

$$A_m = \frac{2}{\big(J_{n+1}(\alpha_{n,m})\big)^2} \int_0^1 f(r)\, J_n(\alpha_{n,m}\, r)\, r\, dr\,. \tag{22}$$

Justificativa: Para justificar a expressão (22) para os coeficientes, multiplicamos os dois lados de (21) por $r\, J_n(\alpha_{n,k}\, r)$ e integramos. Temos

$$\int_0^1 f(r) J_n(\alpha_{n,k}\, r)\, r\, dr = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \int_0^1 J_n(\alpha_{n,m}\, r) J_n(\alpha_{n,k}\, r)\, r\, dr$$

Por (18) e (19), todas as integrais que aparecem na soma do lado direito da igualdade acima são nulas, exceto quando $m = k$. Nesse último caso, o valor da integral é $\dfrac{\big(J_{n+1}(\alpha_{n,k})\big)^2}{2}$. Então,

$$\int_0^1 f(r) J_n(\alpha_{n,k}\, r)\, r\, dr = \frac{A_k}{2} \big(J_{n+1}(\alpha_{n,k})\big)^2\,,$$

justificando (22). $\square$

Exemplo. Expandir a função constante $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(r) = 1$ em série de Fourier–Bessel

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_m \, J_0(\alpha_{0,m}\, r)\ .$$

De acordo com (22), os coeficientes são dados por

$$A_m = \frac{2}{\big(J_1(\alpha_{0,m})\big)^2} \int_0^1 J_0(\alpha_{0,m}\, r)\, r\, dr\,.$$

Conforme vimos em um dos exercícios sobre funções de Bessel, a partir das expressões em séries de potências para $J_0(x)$ e para $J_1(x)$, pode-se facilmente verificar que

$$\big(x\, J_1(x)\big)' = x\, J_0(x)\ .$$

Segue que

$$\int_0^1 J_0(\alpha_{0,m} r)\, r\, dr = \frac{1}{\alpha_{0,m}^2} \int_0^1 J_0(\alpha_{0,m} r)\, \alpha_{0,m} r\, \alpha_{0,m} dr = \frac{1}{\alpha_{0,m}^2} \int_0^{\alpha_{0,m}} J_0(s)\, s\, ds$$

$$= \frac{1}{\alpha_{0,m}^2}\, s\, J_1(s) \Big|_{s=0}^{s=\alpha_{0,m}} = \frac{J_1(\alpha_{0,m})}{\alpha_{0,m}}\ .$$

Logo,

$$A_m = \frac{2}{\alpha_{0,m}\, J_1(\alpha_{0,m})}$$

e, finalmente,

$$1 = f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\, J_0(\alpha_{0,m}\, r)}{\alpha_{0,m}\, J_1(\alpha_{0,m})} \ , \qquad \text{para} \ \ r \in (0, 1)$$

é a expansão procurada em série de Fourier–Bessel.

Nos livros que tratam de funções de Bessel podem ser encontradas tabelas contendo os zeros de J_0 e os valores de J_1 avaliada nesses zeros.