MAT01009 e MAT01168 - UFRGS
PDF de APOIO - Sistemas Lineares Singulares

Introdução

No Ensino Médio e provavelmente depois, já no Ensino Superior, na disciplina de Álgebra Linear, você estudou caracterização e solução de sistemas de equações lineares algébricas (SELA), normalmente sob a notação $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde A, a matriz de coeficientes, é uma matriz de n linhas e n colunas, $\mathbf{x}$, o vetor de incógnitas, é um vetor coluna de n elementos e $\mathbf{b}$, o vetor de dados ou vetor do lado direito, é um vetor coluna de n elementos.

Em muitas aplicações de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no ensino superior, o número de equações m não é igual ao número de incógnitas n, razão pela qual provavelmente você lembra a notação geral $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, algumas vezes no contexto de uma transformação linear $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $\mathcal{T}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Voltando ao contexto do Ensino Médio ($n = m$), lá houve excelente oportunidade para apresentar **determinantes** de matrizes, através da saudosa caracterização colegial (ou pré-universitária):

$$\begin{cases} \det(A) \neq 0 & \text{existe uma única solução} & \text{- sistema compatível} \\ \det(A) = 0 & \text{existem infinitas soluções ou nenhuma solução} & \text{- indeterminado ou incompatível, resp} \end{cases}$$

lembrando também que o que determina as possibilidades mencionadas acima para $\det(A) = 0$ é o vetor **b**, e que, quando $\mathbf{b}$ é o vetor nulo a solução nula $\mathbf{x} = 0$ sempre existe.

Na disciplina de Álgebra Linear você estudou sobre vetores, dependência linear, espaços vetoriais (EV), bases e dimensão. Foram apresentados importantes EV associados a uma matriz A:

$$\begin{cases} \text{col}(A) & \text{espaço coluna} & \text{EV gerado pelas colunas deA} \\ \text{N}(A) & \text{espaço nulo} & \text{EV dos vetores } \mathbf{x} \text{ tais que A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ (o vetor nulo)} \end{cases}$$

e a caracterização de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, para o caso $n = m$ e usando col(A), ficou mais técnica:

$$\begin{cases} \det(A) \neq 0 & \text{solução existe e é única} & \text{- compatível} \\ \det(A) = 0, \mathbf{b} \in \text{col}(A) & \text{sistema possui solução(ões)} & \text{- indeterminado} \\ \det(A) = 0, \mathbf{b} \notin \text{col}(A) & \text{sistema não possui solução} & \text{- incompatível} \end{cases}$$

ressaltando o subcaso $n = m$ e $\mathbf{b} = \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} \det(A) \neq 0 & N(A) = \{\mathbf{0}\} & \text{colunas de } A \text{ são LI} & A \text{ é não-singular} \\ \det(A) = 0, & \text{existe } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ tal que } A\mathbf{x} = \mathbf{0} & \text{colunas de } A \text{ são LD} & A \text{ é singular} \end{cases}$$

e não podemos esquecer do Teorema do Núcleo e da Imagem (aqui adaptado para o caso $n = m$):

$$\text{dimensão de } N(A) + \text{dimensão de col}(A) = n$$

onde também lembramos que dim(col(A)) é chamado de *posto* da matriz A.

Observe os exemplos a seguir. Aqui analisaremos diretamente os SELA homogêneos associados a cada matriz, muito embora sabemos que na disciplina de Álgebra Linear você aprendeu a usar *redução a forma triangular* (ou eliminação) para ajudar em tal tarefa.

[1] $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ é triangular, então $\det(A) = (-1)3(-1) = 3 \neq 0$, e a matriz não-singular,

$$N(A) = \{\mathbf{0}\}\, , \text{col}(A) = \text{ger}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{R}^3$$

confirma com a informação que traz o Teorema do Núcleo e da Imagem, que a dimensão do espaço nulo é zero, e a dimensão do espaço coluna é três (as colunas são vetores claramente LI).

[2] $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ claramente tem determinante nulo (linhas múltiplas), assim entendemos melhor seu núcleo diretamente analisando o sistema linear $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$ já desprovido da equação redundante

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 - 2c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + 3c_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = -3c_2 \\ c_3 = -c_1 + 2c_2 = 5c_2 \end{array} \right. \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3c_2 \\ c_2 \\ 5c_2 \end{bmatrix} = c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, c_2 \in \mathbb{R}$$

assim

$$N(A) = \text{ger} \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}, \text{col}(A) = \text{ger} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

então dimensão do espaço nulo é um, e pelo Teorema do Núcleo e da Imagem a dimensão do espaço coluna é dois (os 3 vetores envolvidos são LD).

[3] $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ claramente tem determinante nulo, analisando o sistema linear $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$ já desprovido da equação redundante

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 - 2c_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 2c_2 \\ c_3 \text{ livre} \end{array} \right. \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2c_2 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

assim $N(A) = \text{ger} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \text{col}(A) = \text{ger} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ então a dimensão do espaço nulo é dois, a dimensão do espaço coluna é um, que confirma a informação trazida pelo Teorema do Núcleo e da Imagem (que $2 + 1 = 3$).

Sistemas Lineares Singulares na disciplina de Equações Diferenciais

A tarefa de resolver ou caracterizar $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ onde A é uma matriz singular, que sempre foi situação à parte quando o intuito era resolver sistemas lineares algébricos, passa a ser o foco principal no contexto de resolver ou caracterizar problema de autovalores $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, relevante ao contexto ainda mais específico de sistemas de equações diferenciais lineares homogêneos com coeficientes constantes $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t)$ onde A é uma matriz de n linhas e n colunas, e $\mathbf{x}$ é um vetor coluna de funções-incógnita $x_i(t)$ com n elementos.

Na disciplina de Equações Diferenciais é apresentada a chamada Técnica Modal de solução de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, amparada na definição de autovalores / autovetores feita anteriormente na disciplina de Álgebra Linear, aqui de uma forma suscinta:

$$\text{matriz } A \text{ possui autovalor } \lambda : \text{existe vetor } K \neq \mathbf{0} \text{ tal que } AK = \lambda K$$

uma vez que, considerando (buscando) soluções $X_i(t) = K_i e^{\lambda_i t}$ somos conduzidos a um problema de autovalores já que (depois de substituir em $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$), $\lambda_i K_i e^{\lambda_i t} = AK_i e^{\lambda_i t}$ requer $AK_i = \lambda_i K_i$, e este problema, por sua vez, desenvolve-se: $(A - \lambda_i I)K_i = \mathbf{0}$ ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{lll} M_i = A - \lambda_i I & \text{é uma matriz singular} & \lambda_i \text{ é solução de } \det(A - \lambda I) = 0 \\ M_i K_i = \mathbf{0}, M_i \neq \mathbf{0} & \text{pertence ao núcleo ou espaço nulo de } M_i & \end{array} \right.$$

e então fica claro que precisamos

$$\begin{cases} \text{encontrar as raízes } \lambda_i \text{ da equação polinomial } \det(A-\lambda I)=0 \\ \text{encontrar conjunto de vetores não-nulos } K_i \text{ que GERE o espaço nulo de cada matriz } M_i = A-\lambda_i I \end{cases}$$

chamado autoespaço associado a λ_i. Observe ainda que tanto λ_i quando K_i podem ter parte imaginária não-negativa, isto é, talvez precisemos tratar com aritmética de números complexos. As duas tarefas acima são tratadas em detalhe nas próximas seções.

• **Solução da equação característica** $\det(A-\lambda I)=0$:

Sempre que A for uma matriz de n linhas e n colunas, de números (elementos) reais, $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)$ será um polinômio de grau n e coeficientes reais na variável λ, e portanto o universo mais natural para as raízes λ de $p(\lambda)=0$ é o dos números complexos ($\mathbb{C}$). Como não dispomos de apoio computacional para essa tarefa na disciplina de Equações Diferenciais, manipularemos $p(\lambda)$ sabiamente, sempre atentos a identificar fatores comuns, e dessa forma tornar mais simples a determinação de suas raízes λ. Aqui $|A|$ denota $\det(A)$, o determinante da matriz A. Veja os exemplos a seguir:

[4] $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ já trabalhada no Exemplo [2]. Já que a própria matriz é singular, $\lambda=0$ é autovalor, o termo independente de $p(\lambda)$ é nulo, e poderemos reduzir a ordem da equação $p(\lambda)=0$.

$$0=p(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+6)+2(2\lambda+2)+1(-6+\lambda-4)=$$
$$-\lambda^3+5\lambda^2-5\lambda=-\lambda(\lambda^2-5\lambda+5)=-\lambda\left(\left(\lambda-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right)$$

e as raízes são $\lambda_1=0$, e outras 2 que provém de $\lambda^2-5\lambda+5=0$, a saber $\lambda_2=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_3=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

[5] $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ já trabalhada no Exemplo [1]. Autovalores de uma matriz triangular são os elementos de sua diagonal.

$$0=p(\lambda)=\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2(3-\lambda) \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-1, \lambda_3=3$$

[6] $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matriz tem uma coluna com 2 zeros: faz expansão de Laplace nessa coluna, obtendo

$$0=p(\lambda)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((2-\lambda)^2-1) \Rightarrow \lambda_1=1$$

juntamente com $(2-\lambda)^2=1$, que produz $\lambda_2=1$ e $\lambda_3=3$.

[7] $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ para a qual $0=p(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2-4]+$ $2(2\lambda+2)+2(2+2\lambda)=(1-\lambda)(\lambda+1)(3-\lambda)+8(1+\lambda)=(1+\lambda)\left[(1-\lambda)(\lambda-3)+8\right]=(1+\lambda)^2(5-\lambda)$

Observe que mantivemos a primeira parcela fatorada e fomos beneficiados pelo fato de um de seus fatores também aparecer nas outras 2 parcelas.

• **Determinação dos autoespaços:**

Diferentemente da abordagem habitual de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ em Álgebra Linear, no contexto de $(A - \lambda_i I)K_i = \mathbf{0}$ sabemos que ao menos uma (1) das equações é redundante com as demais e pode ser desconsiderada, mas ficamos atentos para mais redundâncias. O sistema de equações é sabidamente indeterminado e consequentemente ao menos uma (1) variável será considerada *livre*, no sentido que seu valor pode ser livremente arbitrado, determinando sobre o das demais não-livres. Veja os exemplos a seguir:

[8] $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ já trabalhada nos Exemplos [4] e [2]. Autovalores são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$. Analisando o espaço nulo associado a $\lambda_1 = 0$:

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -3c_2 \\ c_3 = 2c_2 - c_1 = 5c_2 \end{cases} \Rightarrow K_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Analisando o espaço nulo associado a $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$:

$$(A - \lambda_2 I)\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}-3}{2} & -2 & 1 \\ -2 & \frac{\sqrt{5}+3}{2} & -2 \\ 1 & 3 & -\frac{5-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (\sqrt{5} - 5)c_1 + \frac{\sqrt{5}-5}{2}c_2 = 0 & \Rightarrow c_2 = -2c_1 \\ c_1 = -2, c_2 = 4, & c_3 = (\sqrt{5} - 3) + 2(4) \end{cases} \Rightarrow K_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 + \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Analisando o espaço nulo associado a $\lambda_3 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$:

$$(A - \lambda_3 I)\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}+3}{2} & -2 & 1 \\ -2 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} & -2 \\ 1 & 3 & -\frac{5+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -(\sqrt{5} + 5)c_1 - \frac{\sqrt{5}+5}{2}c_2 = 0 & \Rightarrow c_2 = -2c_1 \\ c_1 = -2, c_2 = 4, & c_3 = 3 + \sqrt{5} - 2(4) \end{cases} \Rightarrow K_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 - \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

[9] $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ já trabalhada nos Exemplos [1] e [5]. Autovalores de uma matriz triangular são os elementos de sua diagonal, portanto $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$.

Analisando o espaço nulo de $M = A + I$, associado a $\lambda = -1$ (duplo):

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 \text{livre} \\ 2c_3 = -2c_2 \\ c_3 = -c_2 \end{cases} \Rightarrow K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

então esse espaço nulo tem dimensão 2.

Analisando o espaço nulo de $M = A - 3I$, associado a $\lambda_3 = 3$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4c_3 = 0 \\ -4c_1 + 2c_2 = 0 \\ \Rightarrow c_2 = 2c_1 \end{cases} \Rightarrow K_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

□

JBC, 28/08/2024, documento em construção.