Instituto de Matemática - UFRGS - Mat01009 - Métodos Aplicados de Matemática I
Primeira Verificação 2023/1 - Gabarito P1A

• **Questão 1** Sejam $y(t)$ tal que $\begin{cases} 3ty' + 5y = 10 & ,t > 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ e $(\dagger)$ a respectiva EDO homogênea.

É correto: (0.6pt)

( ) $u(t) = t^{\frac{5}{3}} + 2$ é solução de $(\dagger)$

( ) $u(t) = t^{\frac{5}{3}}$ é solução de $(\dagger)$

( ) $u(t) = -t^{-\frac{5}{3}} + 2$ é solução de $(\dagger)$

( ) $u(t) = e^{\frac{5}{3t^2}}$ é solução de $(\dagger)$

(X) $u(t) = t^{-\frac{5}{3}}$ é solução de $(\dagger)$

( ) nenhuma das anteriores

É correto: (0.6pt)

( ) $y(t) = -t^{\frac{5}{3}} + 2$

( ) $y(t) = t^{-\frac{5}{3}} + 2$

( ) $y(t) = -e^{-\frac{3}{5}}\, e^{-\frac{5t^2}{3}} + 2$

(X) $y(t) = -t^{-\frac{5}{3}} + 2$

( ) $y(t) = -e^{\frac{3}{5}}\, e^{\frac{5}{3t^2}} + 2$

( ) nenhuma das anteriores

Solução: u sol. homogênea satisfaz $3tu' = -5u \Rightarrow \dfrac{du}{u} = -\dfrac{5dt}{3t}$

$$\ln|u| = -\frac{5}{3}\ln|t| + C_1 \Rightarrow u = \exp(C_1 + \ln|t^{-5/3}|) = Ct^{-5/3}, C \in \mathbb{R}$$

inspeção encontra solução particular $y_p = 2$, então solução geral $y = Ct^{-5/3} + 2$ satisfaz $y(1) = 1$ somente se $C = -1$.

• **Questão 2** Sejam $y(t)$ tal que $\begin{cases} y' + 2y = e^{-2t}, & t > 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ e $(\dagger)$ a respectiva EDO homogênea.

É correto: (0.7pt)

( ) $u(t) = e^{-2t} + 2$ é solução de $(\dagger)$

(X) $u(t) = e^{-2t}$ é solução de $(\dagger)$

( ) $u(t) = e^{2t}$ é solução de $(\dagger)$

( ) $u(t) = e^{-t/2}$ é solução de $(\dagger)$

( ) $u(t) = e^{-t^2}$ é solução de $(\dagger)$

( ) nenhuma das anteriores

É correto: (0.7pt)

( ) $y(t) = 2e^{-2t} + (t-1)e^{-2t}$

( ) $y(t) = te^{-2t}$

( ) $y(t) = 2 + te^{-2t}$

( ) $y(t) = -2e^{-2t} + te^{-2t}$

( ) $y(t) = te^{2t}$

(X) nenhuma das anteriores

Solução: u sol. homogênea satisfaz $u' = -2u \Rightarrow \dfrac{du}{u} = -2dt$

$$\ln|u| = -2t + C_1 \Rightarrow u = \exp(C_1 - 2t) = Ce^{-2t}, C \in \mathbb{R}$$

fórmula de variação de parâmetros produz $y_p = e^{-2t}\int e^{2t}e^{-2t}dt = e^{-2t}t$, então a solução geral (da EDO) $y = Ce^{-2t} + te^{-2t}$ satisfaz $y(0) = 2$ somente se $C = 2$.

• **Questão 3** Sejam $y(t)$ tal que $\begin{cases} y'' + 6y' + 13y = 26, & t > 0 \\ y(0) = 4, y'(0) = 0 \end{cases}$ e $(\dagger)$ a respectiva EDO homogênea.

É correto: (0.7pt)

( ) $u(t) = e^{-2t}\cos(2t)$ é solução de (†)

( ) $u(t) = e^{-3t}\cos(t)$ é solução de (†)

(X) $u(t) = e^{-3t}\text{sen}\,(2t)$ é solução de (†)

( ) $u(t) = e^{-3t}\text{sen}\,(3t)$ é solução de (†)

( ) $u(t) = e^{-t}\text{sen}\,(3t)$ é solução de (†)

( ) nenhuma das anteriores

É correto: (0.7pt)

(X) $y(t) = e^{-3t}(2\cos(2t) + 3\sin(2t)) + 2$

( ) $y(t) = e^{-2t}(2\cos(3t) + 3\sin(3t)) + 2$

( ) $y(t) = e^{-3t}(2\cos(2t) + 2\sin(2t)) + 2$

( ) $y(t) = e^{3t}(2\cos(2t) + 3\sin(2t)) + 2$

( ) $y(t) = e^{3t}(3\cos(2t) + 2\sin(2t)) + 2$

( ) nenhuma das anteriores

Solução: u sol. homogênea satisfaz $u'' + 6u' + 13u = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(13)}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i$$

então $u(t) = e^{-3t}(A\cos(2t) + B\text{sen}\,(2t))$, $A, B \in \mathbb{R}$. Inspeção produz solução particular $y_p = 2$ portanto solução geral $y = e^{-3t}(A\cos(2t) + B\text{sen}\,(2t)) + 2$. Condição inicial $y(0) = 4$ implica $A = 2$, enquanto $y'(0) = 0$ implica $2B - 3A = 0$ e assim $B = 3$.

Questão 4. (Discursiva) RESOLVA TRÊS dos problemas abaixo:

(a)(1.0pt) Obtenha a solução $y(x)$ do PVI $\begin{cases} x^2\frac{dy}{dx} + y^2 = xy, x > 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$, se possível, na forma explícita.

Solução: $x^2y' - xy = -y^2$ escreve $y' - \frac{1}{x}y = -\frac{y^2}{x^2}$ (eq de Bernoulli de ordem 2)

Mudança de variável $u = y^{1-2} = \frac{1}{y}$ produz $u' = -\frac{1}{y^2}y' \Rightarrow y' = -\frac{u'}{u^2}$

$$-x^2\frac{u'}{u^2} - \frac{x}{u} = -\frac{1}{u^2} \Rightarrow x^2u' + xu = 1 \Rightarrow u' + \frac{u}{x} = \frac{1}{x^2}$$

que é uma EDO linear. Equação homogênea: $u' = -\frac{1}{x}u$ resolvida via

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|u| = -\ln|x| + C = \ln|x|^{-1} + C \Leftrightarrow u = \exp\left(C + \ln|x|^{-1}\right) = \frac{C_1}{x}, x > 1$$

onde $C_1 \in \mathbb{R}$. Solução particular por variação de parâmetros

$$u_p = \frac{1}{x}\int x\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x}\int \frac{1}{x}dx = \frac{1}{x}\ln(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

e portanto $u(x) = \frac{C_1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$, o que implica

$$y = \frac{1}{u} = \frac{x}{C_1 + \ln(x)}, C_1 \in \mathbb{R}$$

e a condição inicial $y(1) = 1$ implica $\frac{1}{C_1} = 1 \Rightarrow C_1 = 1 \Rightarrow y(x) = \frac{x}{1+\ln(x)}$ é a solução do PVI.

(b)(1.0pt) Obtenha a solução $y(t)$ do PVI $\begin{cases} t^2y'' + 1 = 0 & , t > 1 \\ y(1) = 0 & , y'(1) = 1 \end{cases}$

Solução A:(duas integrações) $y'' = -\frac{1}{t^2} \Rightarrow y' = \frac{1}{t} + B$

e integrando mais uma vez: $y(t) = A + Bt + \ln|t|$. $y(1) = 0$ implica $A + B = 0$, ao passo que $y'(1) = B + \frac{1}{1} = 1$ implica $B = 0$ e assim $A = 0$. Segue $y(t) = \ln(t), t \geq 1$ é solução do PVI.

Solução B: u solução homogênea satisfaz $t^2u'' = 0 \Rightarrow u_1 = 1, u_2 = t$ onde $W[u_1, u_2] = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv 1$.

Fórmula de variação de parâmetros, onde $f = -\frac{1}{t^2}$, produz

$$y_p = -1\int \frac{t\cdot\frac{-1}{t^2}}{1}dt + t\int \frac{1\cdot\frac{-1}{t^2}}{1}dt = \int \frac{1}{t}dt + t\cdot\frac{1}{t} = 1 + \ln t$$

e basta $y_p = \ln(t)$ pois "1"já é solução homogênea. Segue $y = A+Bt+\ln(t)$ e $y(1) = 0$ implica $A+B = 0$, ao passo que $y'(1) = B + \frac{1}{1} = 1$ implica $B = 0$ e assim $A = 0$. Segue $y(t) = \ln(t)$ é solução do PVI.

(c)(1.0pt) Taxa de variação é proporcional à diferença de temperaturas. Um termômetro em equilíbrio é retirado de um forno para um refrigerador onde a temperatura é de 12^o F. Após 1 minuto no novo ambiente, o termômetro marca 62^oF, e após 3 minutos no novo ambiente o termômetro marca 14^oF. Calcule a temperatura do forno. Obtenha expressão analítica da temperatura $T(t)$ em função do tempo transcorrido t.

Solução: Resfriamento de Newton: $\frac{dT}{dt} = k(T_a - T)$ define $U = T - T_a$

$$\frac{dU}{dt} = -kU \Rightarrow U(t) = U(0)e^{-kt} \Rightarrow T(t) = T_a + (T(0) - T_a)e^{-kt}$$

Dados do problema implicam: $\begin{cases} 62 = 12 + (T(0)-12)e^{-k} \\ 14 = 12 + (T(0)-12)e^{-3k} \end{cases}$ então $(T(0)-12)e^{-k} = 50$ e $(T(0) - 12))(e^{-k})^3 = 2$ implicam $(e^{-k})^2 = \frac{2}{50} = \frac{1}{25} \Rightarrow e^{-k} = \frac{1}{5} \Rightarrow k = \ln(5)$

então $(T(0) - 12)\frac{1}{5} = 50 \Rightarrow T(0) = 12 + 5(50) = 262$ é a temperatura inicial, então $T(t) = 12 + 250e^{-t\ln(5)}$.

(d)(1.0pt) Obtenha a solução $y(x)$ do PVI $\begin{cases} x^2y'' + xy' + 4y = 2, x > 1 \\ y(1) = 1, y'(1) = 3 \end{cases}$, se possível, na forma explícita.

Solução: equação de Euler, buscamos soluções na forma x^m, onde então $m(m-1)+m+4 = 0$ ou seja $m^2 = -4 = 4i^2$, onde $i^2 = -1$. Segue $m = \pm 2i$ e assim as soluções homogêneas são $\cos(2\ln(x))$ e $\text{sen}\,(2\ln(x))$. Por inspeção, uma solução particular é $y = \frac{1}{2}$ e assim

$$y = A\cos(2\ln(x)) + B\text{sen}\,(2\ln(x)) + \frac{1}{2}, x \geq 1$$

é a solução geral. A condição $y(1) = 1$ implica $A\cos(0) + B\text{sen}\,(0) + \frac{1}{2} = 1$ e assim $A = \frac{1}{2}$. Por outro lado

$$y' = -\frac{2A\text{sen}\,(2\ln(x))}{x} + \frac{2B\cos(2\ln(x))}{x}$$

e então $y'(1) = 3$ implica $\frac{2B}{1} = 3 \Rightarrow B = \frac{3}{2}$. A solução do PVI é

$$y = \frac{1}{2}\cos(2\ln(x)) + \frac{3}{2}\text{sen}\,(2\ln(x)) + \frac{1}{2}, x \geq 1$$

□