Instituto de Matemática - UFRGS - Mat01009 - Métodos Aplicados de Matemática I
Segunda Verificação 2023/1

Nome: Gabarito A **Cartão:**

Q1. Obtenha a expressão analítica de uma sequência $\{p_n\}$ que satisfaz a recorrência
$$\begin{cases} p_{n+1} = 2p_n + 3p_{n-1} + 3 \quad ,n > 1 \\ p_0 = 1, p_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Solução:

solução homogênea satisfaz $u_{n+1} - 2u_n - 3u_{n-1} = 0$; $u_n = \alpha^n$ implica

$$\alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2$$

e as raízes são $\alpha = -1$ e $\alpha = 3$. Portanto $u_n = A(-1)^n + B(3)^n, n \geq 0$, $A, B \in \mathbb{R}$.

como o termo não-homogêneo é constante, procuramos solução particular da forma $v_n = C$

$$C = 2C + 3C + 3 \Rightarrow -4C = 3 \Rightarrow C = -\frac{3}{4} \Rightarrow v_n = -\frac{3}{4}, n \geq 0$$

a solução geral da eq em diferenças é $p_n = A(-1)^n + B(3)^n - \frac{3}{4}, n \geq 0$.

$$\begin{cases} p_0 = A + B - \frac{3}{4} & = 1 \\ p_1 = -A + 3B - \frac{3}{4} & = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 4B - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow B = \frac{3}{4}$$

ainda $A = 1 + \dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{4} = 1$ e segue $p_n = 1 \cdot (-1)^n + \frac{3}{4} \cdot (3)^n - \frac{3}{4}, n \geq 0$

Q2. Considere $y(t)$ satisfazendo $\begin{cases} y' + 2y = e^{-2t}, \quad t > 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ e sua transformada de Laplace $Y(s)$. Primeiramente obtenha $Y(s)$. Depois, usando $Y(s)$, obtenha $y(t)$.

Solução: aplicando a transformada de Laplace

$$sY - 2 + 2Y = \frac{1}{s+2} \Rightarrow (s+2)Y = 2 + \frac{1}{s+2} \Rightarrow Y = \frac{2}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2}$$

e portanto

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2}\right] = 2e^{-2t} + te^{-2t}$$

Q3. Seja $y(t)$ satisfazendo $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 2e^{-t}, \quad t > 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = -1 \end{cases}$ e sua transformada de Laplace $Y(s)$. Primeiramente, obtenha $Y(s)$. Depois, usando $Y(s)$, obtenha $y(t)$.

Solução:

$$s^2Y - s(1) - (-1) + 3(sY - 1) + 2Y = \frac{2}{s+1} \Rightarrow (s^2 + 3s + 2)Y = s + 2 + \frac{2}{s+1}$$

Baskara: $s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2) \Rightarrow Y = \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{2}{(s+1)^2(s+2)}$

decomposição em frações parciais (DFP):

$$\frac{2}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+2} = \frac{A(s+1)(s+2) + B(s+2) + C(s+1)^2}{(s+1)^2(s+2)}$$

$2 = A(s+1)(s+2) + B(s+2) + C(s+1)^2$ $\forall s$ então $s = -1 \Rightarrow B = 2; s = -2 \Rightarrow C = 2; s = 0 \Rightarrow A = -2$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+2}\right) = -e^{-t} + 2te^{-t} + 2e^{-2t}$$

Q4. Sejam x_1, x_2 funções de uma variável t. Encontre a solução geral de

$$\begin{cases} dx_1/dt = -3x_1 + 2x_2 + 2e^{3t} \\ dx_2/dt = 2x_1 - 3x_2 + 2e^{3t} \end{cases}$$

Solução: $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{F}$ onde $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t}$ e portanto os autovalores de A satisfazem

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(-3-\lambda) - 4 = 0$$

ou seja, $(3+\lambda)^2 = 2^2$, ou ainda $|3+\lambda| = 2$, que possui raízes reais $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -5$.

Autovetores associados a $\lambda = -1$:

$$-3x_1 + 2x_2 = -x_1 \Rightarrow x_2 = x_1$$

que possui soluções não nulas $x_1 = 1, x_2 = 1$. Dessa forma,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = B_1$$

Autovetores associados a $\lambda = -5$:

$$-3x_1 + 2x_2 = -5x_1 \Rightarrow x_2 = -x_1$$

que possui soluções não nulas $x_1 = 1, x_2 = -1$. Dessa forma,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = B_2$$

e solução homogênea é, portanto

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-5t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

solução particular da forma

$$y_p = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} e^{3t} \Rightarrow \begin{cases} 3A &= -3A + 2B + 2 \\ 3B &= 2A - 3B + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6A = 2B + 2 \\ 6B = 2A + 2 \end{cases}$$

que implicam $18A = 6B + 6 = 2A + 2 + 6 \Rightarrow 16A = 8 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$. Por outro lado, $6B = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 3 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$, e a solução geral é

$$y(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-5t} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$\square$