Instituto de Matemática - UFRGS - Mat01009 - Métodos Aplicados de Matemática I
Recuperação Geral 2023/1

Nome: Gabarito **Cartão:**

1A. Obtenha a solução do PVI $\begin{cases} y' = -3t^2(y+2)^2, t > 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$,

Solução: $\dfrac{dy}{(y+2)^2} = -3t^2dt$ integrando ambos os lados da equação:

$$\int \frac{1}{(y+2)^2}dy = \int -3t^2dt + C \Leftrightarrow -\frac{1}{y+2} = -t^3 + C, C \in \mathbb{R}$$

condição inicial $y(0) = 2$ implica $-\frac{1}{4} = 0 + C \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$ e portanto

$$\frac{1}{y+2} = t^3 + \frac{1}{4} \Rightarrow y + 2 = \frac{1}{t^3 + 1/4} \Rightarrow y(t) = -2 + \frac{1}{t^3 + 1/4}, t \geq 0$$

1B. Obtenha $y(t)$ tal que $\begin{cases} 3ty' + 5y = 10 \quad , t > 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

Solução A:(duas integrações) $y'' = -\frac{1}{t} \Rightarrow y' = -\ln|t| + B$

e integrando mais uma vez: $y(t) = A + Bt - \int \ln(t)dt = A + Bt - t\ln(t) + t$. $y(1) = 0$ implica $A + B + 1 = 0$, ao passo que $y'(1) = B = 1$. Segue $A = -2$, $y(t) = -2 + 2t - t\ln(t), t \geq 1$ é solução do PVI.

Solução B: EDO é linear. u solução homogênea satisfaz

$tu'' = 0 \Rightarrow u_1 = 1, u_2 = t$ onde $W[u_1, u_2] = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv 1.$

Fórmula de variação de parâmetros, onde $f = -\frac{1}{t}$, produz

$$y_p = -1\int \frac{t \cdot \frac{-1}{t}}{1}dt + t\int \frac{1 \cdot \frac{-1}{t}}{1}dt = \int dt - t \cdot \ln|t| = t - t\ln(t)$$

Segue $y = A + Bt + t - t\ln(t)$ e $y' = B + 1 - \ln(t) - t\frac{1}{t} = B - \ln(t)$ e $y(1) = 0$ implica $A + B + 1 = 0$, ao passo que $y'(1) = 1$ implica $B = 1$ e então $A = -2$. Segue $y(t) = -2 + 2t - t\ln(t)$ é solução do PVI.

1C. Taxa de variação é proporcional à diferença de temperaturas. Um termômetro em equilíbrio é retirado de um forno para um refrigerador onde a temperatura é de 12^o F. Após 1 minuto no novo ambiente, o termômetro marca 62^oF, e após 3 minutos no novo ambiente o termômetro marca 14^oF. Calcule a temperatura do forno. Obtenha expressão analítica da temperatura $T(t)$ em função do tempo transcorrido t.

Solução: Resfriamento de Newton: $\frac{dT}{dt} = k(T_a - T)$ define $U = T - T_a$

$$\frac{dU}{dt} = -kU \Rightarrow U(t) = U(0)e^{-kt} \Rightarrow T(t) = T_a + (T(0) - T_a)e^{-kt}$$

Dados do problema implicam: $\begin{cases} 62 = 12 + (T(0) - 12)e^{-k} \\ 14 = 12 + (T(0) - 12)e^{-3k} \end{cases}$ então $(T(0) - 12)e^{-k} = 50$ e $(T(0) - 12))(e^{-k})^3 = 2$ implicam $(e^{-k})^2 = \frac{2}{50} = \frac{1}{25} \Rightarrow e^{-k} = \frac{1}{5} \Rightarrow k = \ln(5)$

então $(T(0) - 12)\frac{1}{5} = 50 \Rightarrow T(0) = 12 + 5(50) = 262$ é a temperatura inicial, então $T(t) = 12 + 250e^{-t\ln(5)}$.

1D. Obtenha a solução $y(x)$ do PVI $\begin{cases} x^2y'' + xy' + 4y = 2, x > 1 \\ y(1) = 1, y'(1) = 3 \end{cases}$, se possível, na forma explícita.

Solução: equação de Euler, buscamos soluções na forma x^m, onde então $m(m-1) + m + 4 = 0$ ou seja $m^2 = -4 = 4i^2$, onde $i^2 = -1$. Segue $m = \pm 2i$ e assim as soluções homogêneas são $\cos(2\ln(x))$ e $\text{sen}\,(2\ln(x))$. Por inspeção, uma solução particular é $y = \frac{1}{2}$ e assim

$$y = A\cos(2\ln(x)) + B\text{sen}\,(2\ln(x)) + \frac{1}{2}, x \geq 1$$

é a solução geral. A condição $y(1) = 1$ implica $A\cos(0) + B\text{sen}\,(0) + \frac{1}{2} = 1$ e assim $A = \frac{1}{2}$. Por outro lado

$$y' = -\frac{2A\text{sen}\,(2\ln(x))}{x} + \frac{2B\cos(2\ln(x))}{x}$$

e então $y'(1) = 3$ implica $\frac{2B}{1} = 3 \Rightarrow B = \frac{3}{2}$. A solução do PVI é

$$y = \frac{1}{2}\cos(2\ln(x)) + \frac{3}{2}\text{sen}\,(2\ln(x)) + \frac{1}{2}, x \geq 1$$

1E. Obtenha a expressão analítica de uma sequência $\{p_n\}$ que satisfaz a recorrência
$\begin{cases} p_{n+1} = 3p_n + 4p_{n-1} + 9 \quad, n > 0 \\ p_0 = 3, p_1 = 4 \end{cases}$

Solução:

solução homogênea satisfaz $u_{n+1} - 3u_n - 4u_{n-1} = 0$; $u_n = \alpha^n$ implica

$$\alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(1)(-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

e as raízes são $\alpha = -1$ e $\alpha = 4$. Portanto $u_n = A(-1)^n + B(4)^n, n \geq 0$, $A, B \in \mathbb{R}$.

como o termo não-homogêneo é constante, procuramos solução particular da forma $v_n = C$

$$C = 3C + 4C + 9 \Rightarrow -6C = 9 \Rightarrow C = -\frac{3}{2} \Rightarrow v_n = -\frac{3}{2}, n \geq 0$$

a solução geral da eq em diferenças é $p_n = A(-1)^n + B(4)^n - \frac{3}{2}, n \geq 0$.

$$\begin{cases} p_0 = A + B - \frac{3}{2} & = 3 \\ p_1 = -A + 4B - \frac{3}{2} & = 4 \end{cases} \Rightarrow 5B - 3 = 7 \Rightarrow B = 2$$

ainda $A = 3 + \dfrac{3}{2} - 2 = \dfrac{5}{2}$ e segue $p_n = \frac{5}{2} \cdot (-1)^n + 2 \cdot (4)^n - \frac{3}{2}, n \geq 0$

1F. Obtenha a solução $y(x)$ do PVI $\begin{cases} x^2\frac{dy}{dx} + y^2 = xy, x > 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$, se possível, na forma explícita.

Solução: $x^2y' - xy = -y^2$ escreve $y' - \frac{1}{x}y = -\frac{y^2}{x^2}$ (eq de Bernoulli de ordem 2)

Mudança de variável $u = y^{1-2} = \frac{1}{y}$ produz $u' = -\frac{1}{y^2}y' \Rightarrow y' = -\frac{u'}{u^2}$

$$-x^2\frac{u'}{u^2} - \frac{x}{u} = -\frac{1}{u^2} \Rightarrow x^2u' + xu = 1 \Rightarrow u' + \frac{u}{x} = \frac{1}{x^2}$$

que é uma EDO linear. Equação homogênea: $u' = -\frac{1}{x}u$ resolvida via

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|u| = -\ln|x| + C = \ln|x|^{-1} + C \Leftrightarrow u = \exp\left(C + \ln|x|^{-1}\right) = \frac{C_1}{x}, x > 1$$

onde $C_1 \in \mathbb{R}$. Solução particular por variação de parâmetros

$$u_p = \frac{1}{x}\int x\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x}\int \frac{1}{x}dx = \frac{1}{x}\ln(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

e portanto $u(x) = \frac{C_1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$, o que implica

$$y = \frac{1}{u} = \frac{x}{C_1 + \ln(x)}, C_1 \in \mathbb{R}$$

e a condição inicial $y(1) = 1$ implica $\frac{1}{C_1} = 1 \Rightarrow C_1 = 1 \Rightarrow y(x) = \frac{x}{1+\ln(x)}$ é a solução do PVI.

2A. Seja $y(t)$ satisfazendo $\begin{cases} y'' + 4y' + 3y = 4e^{-3t}, \quad t > 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = -1 \end{cases}$ e sua transformada de Laplace $Y(s)$. Primeiramente, obtenha $Y(s)$. Depois, usando $Y(s)$, obtenha $y(t)$.

Solução:

$$s^2Y - s(1) - (-1) + 4(sY - 1) + 3Y = \frac{4}{s+1} \Rightarrow (s^2 + 4s + 3)Y = s + 3 + \frac{4}{s+3}$$

Baskara: $s^2 + 4s + 3 = (s+1)(s+3) \Rightarrow Y = \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{4}{(s+1)(s+3)^2}$

decomposição em frações parciais (DFP):

$$\frac{4}{(s+1)(s+3)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{(s+3)^2} = \frac{A(s+3)^2 + B(s+1)(s+3) + C(s+1)}{(s+1)(s+3)^2}$$

$4 = A(s+3)^2 + B(s+1)(s+3) + C(s+1)$ $\forall s$ então

$s = -1 \Rightarrow 4 = A(4) \to A = 1; s = -3 \Rightarrow 4 = C(-2) \Rightarrow C = -2; s = 0 \Rightarrow 3B = -3 \Rightarrow B = -1$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{2}{(s+3)^2} - \dfrac{1}{s+3}\right) = 2e^t - e^{-3t} - 2te^{-3t}$

2B. Sejam x_1, x_2 funções de uma variável t. Encontre a solução geral de

$$\begin{cases} dx_1/dt = -2x_1 + 3x_2 + 2e^{4t} \\ dx_2/dt = 3x_1 - 2x_2 + 2e^{4t} \end{cases}$$

Solução: $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{F}$ onde $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{4t}$ e portanto os autovalores de A satisfazem

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(-2-\lambda) - 9 = 0$$

ou seja, $(2+\lambda)^2 = 3^2$, ou ainda $|2+\lambda| = 3$, que possui raízes reais $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -5$.

Autovetores associados a $\lambda = 1$:

$$-2x_1 + 3x_2 = x_1 \Rightarrow x_2 = x_1$$

que possui soluções não nulas $x_1 = 1, x_2 = 1$. Dessa forma,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = B_1$$

Autovetores associados a $\lambda = -5$:

$$-2x_1 + 3x_2 = -5x_1 \Rightarrow x_2 = -x_1$$

que possui soluções não nulas $x_1 = 1, x_2 = -1$. Dessa forma,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = B_2$$

e solução homogênea é, portanto

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-5t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

solução particular da forma

$$y_p = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} e^{4t} \Rightarrow \begin{cases} 4A & = -2A + 3B + 2 \\ 4B & = 3A - 2B + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6A = 3B + 2 \\ 6B = 3A + 2 \end{cases}$$

que implicam $12A = 6B + 4 = 3A + 2 + 4 \Rightarrow 9A = 6 \Rightarrow A = \frac{2}{3}$. Por outro lado, $6B = 3 \cdot \frac{2}{3} + 2 = 4 \Rightarrow B = \frac{2}{3}$, e a solução geral é

$$y(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-5t} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2C. Sejam x_1, x_2, x_3 funções de uma variável t. Encontre a solução geral de

$$\begin{cases} dx_1/dt = -x_1 + x_2 \\ dx_2/dt = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ dx_3/dt = x_2 - x_3 \end{cases}$$

Solução: $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$ onde $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e então $A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix}$

Expandindo o determinante pela primeira coluna, temos que autovalores de A satisfazem

$$\begin{gathered} (-1-\lambda)\left[(2+\lambda)(1+\lambda)-1\right] + (-1)(-1-\lambda) = 0 \\ \Leftrightarrow (1+\lambda)\left[\lambda^2 + 3\lambda + 2 - 1 - 1\right] = (1+\lambda)\lambda(\lambda+3) = 0 \end{gathered}$$

Autoespaço e solução homogênea associados a $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 & = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = x_2 = x_1 \end{cases} \Rightarrow K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Autoespaço e solução homogênea associados a $\lambda = -1$:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 & = -x_1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = -x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = -x_1 \end{cases} \Rightarrow K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

Autoespaço e solução homogênea associados a $\lambda = -3$:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 & = -3x_1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = -3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 \\ x_3 = -x_2 - x_1 = x_1 \end{cases} \Rightarrow K_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

solução geral : $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

$\square$