Instituto de Matemática - UFRGS - Mat01009 - Métodos Aplicados de Matemática I
Gabarito - Segundo Teste 2023/1

1. Sejam x_1, x_2 funções de uma variável t. Encontre a solução geral de
$$\begin{cases} dx_1/dt = 4x_1 - 3x_2 - 3 \\ dx_2/dt = 3x_1 + 2x_2 + 2 \end{cases}$$

Solução: $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{F}$ onde $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e portanto os autovalores de A satisfazem $(4-\lambda)(2-\lambda)+9=0$, ou seja, $\lambda^2 - 6\lambda + 17 = 0$, que possui raízes $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2\mathbf{i}\sqrt{2}$, onde $\mathbf{i}^2 = -1$.

Autovetores associados a $\lambda = \alpha + \mathbf{i}\beta = \frac{6\pm\sqrt{32\mathbf{i}^2}}{2} = 3 + \mathbf{i}(2\sqrt{2})$:

$$4x_1 - 3x_2 = (3 + \mathbf{i}2\sqrt{2})x_1 \Rightarrow 3x_2 = (1 - \mathbf{i}2\sqrt{2})x_1$$

que possui soluções não nulas $x_1 = 3, x_2 = 1 - \mathbf{i}2\sqrt{2}$. Dessa forma,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 - \mathbf{i}2\sqrt{2} \end{bmatrix} = B_1 + \mathbf{i}B_2, \text{ onde } B_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

e soluções homogêneas são, portanto

$$X_1 = \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(2\sqrt{2}t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \operatorname{sen}(2\sqrt{2}t) \right) e^{3t}$$
$$X_2 = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{2} \end{bmatrix} \cos(2\sqrt{2}t) + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \operatorname{sen}(2\sqrt{2}t) \right) e^{3t}$$

e o método dos coeficientes indeterminados busca solução particular constante X_p satisfazendo $AX_p = -F$:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X_p = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow X_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

e portanto a solução geral é

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3\cos(2\sqrt{2}t) \\ \cos(2\sqrt{2}t) + 2\sqrt{2}\operatorname{sen}(2\sqrt{2}t) \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 3\operatorname{sen}(2\sqrt{2}t) \\ -2\sqrt{2}\cos(2\sqrt{2}t) + \operatorname{sen}(2\sqrt{2}t) \end{bmatrix} e^{3t} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. Sejam x_1, x_2, x_3 funções de uma variável t. Encontre a solução geral de
$$\begin{cases} dx_1/dt = -2x_1 + x_2 \\ dx_2/dt = x_1 - x_2 + x_3 \\ dx_3/dt = x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

Solução: $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$ onde $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ e então $A - \lambda I = \begin{bmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{bmatrix}$

Expandindo o determinante dessa matriz pela primeira coluna, temos que autovalores de A satisfazem

$$(-2-\lambda)\left[(1+\lambda)(2+\lambda) - 1\right] + (-1)(-2-\lambda) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2+\lambda)\left[\lambda^2 + 3\lambda + 2 - 1 - 1\right] = (2+\lambda)\lambda(\lambda+3) = 0$$

Autoespaço e solução homogênea associados a $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 & = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = x_1 \end{cases} \Rightarrow K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Autoespaço e solução homogênea associados a $\lambda = -2$:

$$\left\{\begin{array}{ll} -2x_1 + x_2 & = -2x_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = -2x_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_3 = -x_1 \end{array}\right. \Rightarrow K_2 = \left[\begin{array}{r} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right] \Rightarrow X_2 = \left[\begin{array}{r} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right] e^{-2t}$$

Autoespaço e solução homogênea associados a $\lambda = -3$:

$$\left\{\begin{array}{ll} -2x_1 + x_2 & = -3x_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = -3x_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = -x_1 \\ x_3 = -2x_2 - x_1 = x_1 \end{array}\right. \Rightarrow K_3 = \left[\begin{array}{r} 1 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right] \Rightarrow X_3 = \left[\begin{array}{r} 1 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right] e^{-3t}$$

solução geral : $\mathbf{x}(t) = c_1 \left[\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array}\right] + c_2 \left[\begin{array}{r} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right] e^{-2t} + c_3 \left[\begin{array}{r} 1 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right] e^{-3t}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$