Instituto de Matemática - UFRGS - Mat01009 - Métodos Aplicados de Matemática I
Segunda Verificação 2023/1

Nome: **Cartão:**

Instruções: (1) Essa prova tem duração de 1h40min; calculadoras não podem ser usadas; você pode escrever à lapis. (2) A correta interpretação dos enunciados faz parte da verificação; leia atentamente. (3) Nesta prova: e = número de Euler. (4) Resposta correta mas sem justificativa matemática terá 50% do escore.

Q1.(1.5pt) Obtenha a expressão analítica de uma sequência $\{p_n\}$ que satisfaz a recorrência

$$\begin{cases} p_{n+1} = 2p_n + 3p_{n-1} + 3 \quad , n > 0 \\ p_0 = 1, p_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Responda esta questão no espaço abaixo.

Q2.(2.0pt) Sejam x_1, x_2 funções de uma variável t. Encontre a solução geral de

$$\begin{cases} dx_1/dt = -3x_1 + 2x_2 + 2e^{3t} \\ dx_2/dt = 2x_1 - 3x_2 + 2e^{3t} \end{cases}$$

Responda esta questão em folha avulsa. Questões 3 e 4 estão no verso.

Formulário para Área 2

autovalores repetidos:

$$\begin{cases} X_1 = Ke^{\lambda_i t} \\ X_2 = (Kt + P)e^{\lambda_i t} \\ X_3 = (\frac{Kt^2}{2} + Pt + Q)e^{\lambda_i t} \end{cases}, \text{ onde } \begin{cases} (A - \lambda_i I)K = 0 \\ (A - \lambda_i I)P = K \\ (A - \lambda_i I)Q = P \end{cases}$$

decomposição polar: $\mathbf{i}^2 = -1$

$x + \mathbf{i}y = \rho e^{i\theta}$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\tan(\theta) = \frac{y}{x}, x \neq 0$

$$\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , y > 0, x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , y < 0, x = 0 \end{cases}$$

Teorema 8.2.3. Seja $\lambda_i = \alpha + i\beta$ um autovalor complexo da matriz de coeficientes A no sistema homogêneo $X' = AX$ e sejam K_1 e K_2 os respectivos autovetores, $B_1 = Re(K_1)$, $B_2 = Im(K_1)$. Então

$$X_1 = [B_1 \cos(\beta t) - B_2 \text{sen}\,(\beta t)]e^{at}$$
$$X_2 = [B_2 \cos(\beta t) + B_1 \text{sen}\,(\beta t)]e^{at}$$

são soluções linearmente independentes no intervalo $(0, \infty)$.

Q3.(1.5pt) Considere $y(t)$ satisfazendo $\begin{cases} y' + 2y = e^{-2t}, & t > 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ e sua transformada de Laplace $Y(s)$. Primeiramente obtenha $Y(s)$. Depois, usando $Y(s)$, obtenha $y(t)$.

Responda esta questão no espaço abaixo.

Q4.(2.0pt) Seja $y(t)$ satisfazendo $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 2e^{-t}, & t > 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = -1 \end{cases}$ e sua transformada de Laplace $Y(s)$. Primeiramente, obtenha $Y(s)$. Depois, usando $Y(s)$, obtenha $y(t)$.

Responda esta questão em folha avulsa.

Transformadas de Laplace: supomos $e^{-st}f(t) \to 0$ ao $t \to \infty$, $F(s) = \mathcal{L}\{f\}$

$\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$	$\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$
$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} kt\} = \dfrac{k}{s^2+k^2}$	$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \dfrac{s}{s^2+k^2}$	$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0)$
$\mathcal{L}\{e^{at}f\} = F(s-a)$	$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s)$	$\mathcal{L}\{t^n f\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}F(s)$
$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}$	$\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t f(s)ds\right\} = \dfrac{\mathcal{L}\{f\}}{s}$	$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$

$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n\mathcal{L}\{f\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)} - f^{(n-1)}(0)$

$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0 & , 0 \le t < a \\ 1 & , t \ge a \end{cases}$ é a função degrau unitário. $\delta(t-t_0)$ é o impulso unitário em $t = t_0$.