Instituto de Matemática - UFRGS - Mat01009 - Métodos Aplicados de Matemática I
Segunda Recuperação 2015/2

Nome: **Cartão:**

Instruções: (1) Essa prova tem duração de 1h40min. (2) Calculadoras não podem ser usadas; você pode escrever à lapis. (3) A correta interpretação dos enunciados faz parte da verificação. Leia atentamente. (4) Nesta prova: e = número de Euler. Apresente desenvolvimento matemático em todas as questões.

Questão 1. (3.0pt) ESCOLHA, escreva na forma matricial, e RESOLVA 2 dos ítens abaixo:

(a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 4y - 7 \\ \frac{dy}{dt} = -6x - y + 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x - 3y + 3z \\ \frac{dy}{dt} = 6x + 6y - 6z \\ \frac{dz}{dt} = 2z \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 4z \\ \frac{dy}{dt} = 5y + 5z \\ \frac{dz}{dt} = -2y + 3z \end{cases}$

Questão 2. Resolva, usando a transformada de Laplace

(a)(1.5pt) $\begin{cases} y' - y = 2e^{5t} \\ y(0) = 2 \end{cases}$ (c)(1.5pt) $\begin{cases} y'' + 4y = \delta(t-2) \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$

(b)(1.5pt) $\begin{cases} y' - y = t^2 e^t \\ y(0) = -2 \end{cases}$ (d)(1.5pt) $\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = t \\ y(0) = 0, y'(0) = 2 \end{cases}$

Questão 3.(1.0pt) ESCOLHA e RESOLVA 1 dos ítens abaixo:

(a) $X' = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X$; $X(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ usando a exponencial matricial e diagonalização.

(b) $\begin{cases} y_{n+2} + 2y_{n+1} + 2y_n = 2 \quad , n \geq 0 \\ y_0 = 0, y_1 = 1 \end{cases}$

Bom Trabalho.

Formulário para Área 2

Teorema 8.2.3. Seja $\lambda_i = \alpha + i\beta$ um autovalor complexo da matriz de coeficientes A no sistema homogêneo $X' = AX$ e sejam K_1 e K_2 os respectivos autovetores, $B_1 = Re(K_1)$, $B_2 = Im(K_1)$. Então

$$X_1 = [B_1 \cos(\beta t) - B_2 \text{sen}\,(\beta t)]e^{at}$$
$$X_2 = [B_2 \cos(\beta t) + B_1 \text{sen}\,(\beta t)]e^{at}$$

são soluções linearmente independentes no intervalo $(0, \infty)$.

$X'(t) = AX(t) + F(t) \Rightarrow X_p = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)F(t)dt$, onde $\Phi(t)$ é a matriz fundamental de $X' = AX$.

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2} + \ldots + A^k \frac{t^k}{k!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}$$

$$X'(t) = AX(t) + F(t) \Rightarrow X_p = e^{At}C + e^{At} \int_{t_0}^{t} e^{-As}F(s)ds$$

Transformadas de Laplace: supomos $e^{-st}f(t) \to 0$ ao $t \to \infty$, $F(s) = \mathcal{L}\{f\}$

$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$	$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$
$\mathcal{L}\{\text{sen}\, kt\} = \frac{k}{s^2+k^2}$	$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2+k^2}$	$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0)$
$\mathcal{L}\{e^{at}f\} = F(s-a)$	$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s)$	$\mathcal{L}\{t^n f\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$
$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}$	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(s)ds\right\} = \frac{\mathcal{L}\{f\}}{s}$	$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$

$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n\mathcal{L}\{f\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)} - f^{(n-1)}(0)$

$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0 & ,0 \leq t < a \\ 1 & ,t \geq a \end{cases}$ é a função degrau unitário. $\delta(t-t_0)$ é o impulso unitário em $t = t_0$.