Instituto de Matemática - UFRGS - Mat01009 - Métodos Aplicados de Matemática I
Recuperação Geral 2023/1

Nome: **Cartão:**

Instruções: (1) Essa prova tem duração de 1h40min; calculadoras não podem ser usadas; você pode escrever à lapis. (2) A correta interpretação dos enunciados faz parte da verificação; leia atentamente. (3) Nesta prova: e = número de Euler. (4) Resposta correta mas sem justificativa matemática terá 50% do escore.

Questão 1 ESCOLHA QUATRO.

(A). (1.5pt) Obtenha a solução do PVI $\begin{cases} y' = -3t^2(y+2)^2, t > 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$,

(B). (1.5pt) Obtenha $y(t)$ tal que $\begin{cases} 3ty' + 5y = 10 \quad , t > 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

(C). (1.5pt) Taxa de variação é proporcional à diferença de temperaturas. Um termômetro em equilíbrio é retirado de um forno para um refrigerador onde a temperatura é de 12^o F. Após 1 minuto no novo ambiente, o termômetro marca 62^oF, e após 3 minutos no novo ambiente o termômetro marca 14^oF. Calcule a temperatura do forno. Obtenha expressão analítica da temperatura $T(t)$ em função do tempo transcorrido t.

(D)(1.5pt) Obtenha a solução $y(x)$ do PVI $\begin{cases} x^2y'' + xy' + 4y = 2, x > 1 \\ y(1) = 1, y'(1) = 3 \end{cases}$, se possível, na forma explícita.

(E) (1.5pt) Obtenha a expressão analítica de uma sequência $\{p_n\}$ que satisfaz a recorrência

$$\begin{cases} p_{n+1} = 3p_n + 4p_{n-1} + 9 \quad , n > 0 \\ p_0 = 3, p_1 = 4 \end{cases}$$

(F). (1.5pt) Obtenha a solução $y(x)$ do PVI $\begin{cases} x^2\frac{dy}{dx} + y^2 = xy, x > 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$, se possível, na forma explícita.

Questão 2. ESCOLHA DUAS.

(A). (2.0pt) Resolva o PVI $\begin{cases} y'' + 4y' + 3y = 4e^{-3t}, \quad t > 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = -1 \end{cases}$ usando qualquer técnica trabalhada em aula.

(B). (2.0pt) Sejam x_1, x_2 funções de uma variável t. Encontre a solução geral de

$$\begin{cases} dx_1/dt = -2x_1 + 3x_2 + 2e^{4t} \\ dx_2/dt = 3x_1 - 2x_2 + 2e^{4t} \end{cases}$$

(C). (2.0pt) Sejam x_1, x_2, x_3 funções de uma variável t. Encontre a solução geral de

$$\begin{cases} dx_1/dt = -x_1 + x_2 \\ dx_2/dt = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ dx_3/dt = x_2 - x_3 \end{cases}$$

Bom trabalho.

Formulário da Área 1 para P1 e Exame.

$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)\Leftrightarrow y_p=e^{-\int P(x)dx}\displaystyle\int e^{\int P(x)dx}f(x)dx$

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ possíveis fatores integrantes: $\mu(x)=e^{\int \frac{M_y-N_x}{N}}$ e $\mu(y)=e^{\int \frac{N_x-M_y}{M}}$
se as expressões forem funções somente de x ou de y, respectivamente.

$y''+P(x)y'+Q(x)y=0, y_1$ solução conhecida $\Rightarrow y_2=y_1(x)\displaystyle\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$

$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x), y_1, y_2$ soluções homogêneas conhecidas $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_p=u_1y_1+u_2y_2,$ onde $u_1=-\displaystyle\int\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx,\ \ u_2=\int\frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx$

	$g(x)$ (exemplo)	fórmula de y_p
1	1 (qq constante)	A
2	$5x-7$	$Ax+B$
3	$3x^2-2$	Ax^2+Bx+C
4	x^3-x+1	Ax^3+Bx^2+Cx+E
5	$\text{sen}\,(4x)$	$A\cos(4x)+B\text{sen}\,(4x)$
6	$\cos(4x)$	$A\cos(4x)+B\text{sen}\,(4x)$
7	e^{5x}	Ae^{5x}
8	$(9x-2)e^{5x}$	$(Ax+B)e^{5x}$
9	x^2e^{5x}	$(Ax^2+Bx+C)e^{5x}$
10	$e^{3x}\text{sen}\,(4x)$	$Ae^{3x}\cos(4x)+Be^{3x}\text{sen}\,(4x)$
11	$5x^2\text{sen}\,(4x)$	$(Ax^2+Bx+C)\cos(4x)+(Ex^2+Fx+G)\text{sen}\,(4x)$
12	$xe^{3x}\cos(4x)$	$(Ax+b)e^{3x}\cos(4x)+(Cx+E)e^{3x}\text{sen}\,(4x)$

Formulário para Área 2

autovalores repetidos:
$\begin{cases} X_1=Ke^{\lambda_i t}\\ X_2=(Kt+P)e^{\lambda_i t}\\ X_3=(\frac{Kt^2}{2}+Pt+Q)e^{\lambda_i t}\end{cases}$, onde $\begin{cases}(A-\lambda_i I)K=0\\ (A-\lambda_i I)P=K\\ (A-\lambda_i I)Q=P\end{cases}$

decomposição polar: $\mathbf{i}^2=-1$
$x+\mathbf{i}y=\rho e^{i\theta}$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$
$\tan(\theta)=\frac{y}{x}, x\neq 0$
$\theta=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & ,y>0,x=0\\ -\frac{\pi}{2} & ,y<0,x=0\end{cases}$

Teorema 8.2.3. Seja $\lambda_i=\alpha+i\beta$ um autovalor complexo da matriz de coeficientes A no sistema homogêneo $X'=AX$ e sejam K_1 e K_2 os respectivos autovetores, $B_1=Re(K_1)$, $B_2=Im(K_1)$. Então

$$X_1=[B_1\cos(\beta t)-B_2\text{sen}\,(\beta t)]e^{at}$$
$$X_2=[B_2\cos(\beta t)+B_1\text{sen}\,(\beta t)]e^{at}$$

são soluções linearmente independentes no intervalo $(0,\infty)$.

Transformadas de Laplace: supomos $e^{-st}f(t)\to 0$ ao $t\to\infty$, $F(s)=\mathcal{L}\{f\}$

$\mathcal{L}\{1\}=\dfrac{1}{s}$	$\mathcal{L}\{t^n\}=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathcal{L}\{e^{at}\}=\dfrac{1}{s-a}$
$\mathcal{L}\{\text{sen}\,kt\}=\dfrac{k}{s^2+k^2}$	$\mathcal{L}\{\cos kt\}=\dfrac{s}{s^2+k^2}$	$\mathcal{L}\{f'\}=s\mathcal{L}\{f\}-f(0)$
$\mathcal{L}\{e^{at}f\}=F(s-a)$	$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\}=e^{-as}F(s)$	$\mathcal{L}\{t^nf\}=(-1)^n\dfrac{d^n}{ds^n}F(s)$
$\mathcal{L}\{f*g\}=\mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}$	$\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t f(s)ds\right\}=\dfrac{\mathcal{L}\{f\}}{s}$	$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}=e^{-st_0}$

$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}=s^n\mathcal{L}\{f\}-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-sf^{(n-2)}-f^{(n-1)}(0)$

$\mathcal{U}(t-a)=\begin{cases}0 & ,0\leq t<a\\ 1 & ,t\geq a\end{cases}$ é a função degrau unitário. $\delta(t-t_0)$ é o impulso unitário em $t=t_0$.