Álgebra Linear – Semana 03

Diego Marcon

10 de Abril de 2017

Conteúdo

1 Dependência e independência linear

Nós vimos, por definição, que um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ é combinação linear dos k vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^m$ quando conseguirmos encontrar números reais $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tais que

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_k\vec{v}_k = \vec{v}.$$

Vimos também que para decidir se um vetor é combinação linear de outros, devemos verificar se existem estes números reais $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Em coordenadas, isto é equivalente a resolver o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & \cdots & v_{1k} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & \cdots & v_{2k} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & \cdots & v_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & v_{m3} & \cdots & v_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Agora, dizemos que os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^m$ são **linearmente independentes (LI)** se nenhum dos vetores puder ser escrito combinação linear dos demais. Uma forma de escrever isto matematicamente é a seguinte:

$$\boxed{\text{Se } x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_k\vec{v}_k = \vec{0}, \text{ então } x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0.}$$

De fato, imaginem que pelo menos um dos coeficientes acima fosse diferente de zero, digamos $x_2 \neq 0$. Daí podemos dividir por x_2 e conseguiríamos escrever o vetor $\vec{v}_2$ como combinação linear dos demais:

$$\vec{v}_2 = -\frac{x_1}{x_2}\,\vec{v}_1 - \frac{x_3}{x_2}\,\vec{v}_3 - \cdots - \frac{x_k}{x_2}\,\vec{v}_k.$$

Se os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^m$ não forem linearmente independentes, então nós dizemos que eles são **linearmente dependentes**.

Exemplo 1. Vamos verificar se os vetores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

são LI ou LD.

Para verificar se são LI, nós devemos considerar a equação vetorial

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como a equação é homogênea, temos pelo menos a solução trivial: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$. Se esta for a única solução, então os vetores são LI. Se existir alguma outra solução que não seja a trivial, então os vetores são LD.

Resolver a equação vetorial equivale a resolver o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

É fácil de ver que a única solução deste sistema é a trivial e, portanto, os vetores são LI. Se este sistema não fosse fácil de resolver, devemos começar a resolvê-lo por escalonamento. Se existissem variáveis livres, então existiriam infinitas soluções. $\triangleleft$

Exemplo 2. Analisamos agora os vetores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como no exemplo anterior, para verificar se são LI, nós devemos considerar a equação vetorial

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como a equação é homogênea, temos pelo menos a solução trivial: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$. Se esta for a única solução, então os vetores são LI. Se existir alguma outra solução que não seja a trivial, então os vetores são LD.

Resolver a equação vetorial equivale a resolver o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Em um sistema com mais variáveis do que equações, podemos não ter soluções (no caso de alguma linha inconsistente) ou podemos ter infinitas soluções (no caso de haver variáveis livres). Não é possível ter unicidade. Como já sabemos que em um sistema homogêneo, sempre temos pelo menos a solução trivial $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$, podemos concluir que existem infinitas soluções. Logo, o conjunto de vetores é LD.

O argumento que utilizamos no Exemplo 2 acima é geral e se aplica em várias situações. Temos

$$\boxed{\text{Se } k > m, \text{ então os vetores } \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^m \text{ são necessariamente LD.}}$$

Desta forma, não existem quatro vetores LI em $\mathbb{R}^3$. Não conseguiríamos encontrar sete vetores LI em $\mathbb{R}^5$ e assim por diante.

Façamos agora algumas observações gerais sobre independência linear:

- O vetor nulo, mesmo que sozinho, é LD. Se $\vec{v} = \vec{0}$ estiver em um conjunto de vetores, este conjunto será automaticamente LD.
- Ao considerarmos apenas dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, dizer que estes vetores são LD significa que eles são múltiplos um dou outro e, portanto, colineares.
- Veremos mais adiante no curso, que a dimensão do espaço gerado por vetores linearmente independentes é exatamente o número de vetores. Desta maneira, concluiremos, por exemplo, que o conjunto gerado por dois vetores do espaço tridimensional é um espaço linear de dimensão dois: um plano.

2 Independência linear e sistemas lineares

Na última semana, vimos que resolver o sistema linear $A\vec{x} = \vec{b}$ equivale a decidir se o vetor $\vec{b}$ é uma combinação linear das colunas de A.

A situação da seção anterior é a de decidir se os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ são LI ou LD. Isto, consequentemente, equivale a decidir se existe solução não trivial do sistema linear homogêneo

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

onde a matriz A é formada com os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ como colunas.

Exemplo 3. Naturalmente, podemos traduzir os exemplos da seção anterior desta forma. Ou seja no Exemplo 1, temos que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tem as colunas linearmente independentes (LI). Por outro lado, as colunas da matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

do Exemplo 2 são linearmente dependentes (LD). $\triangleleft$

Podemos pensar ainda de outra forma. Considere uma matriz A de ordem $m \times n$. Para decidir se as colunas de A são LI, devemos procurar por soluções não triviais do sistema linear cuja matriz associada é A. Ao resolver um **sistema homogêneo** por escalonamento, sabemos que

- Se existirem mais colunas do que linhas (*i.e.* $m < n$), então as colunas de A são necessariamente LD.
- Se existirem mais linhas do que colunas (*i.e.* $m > n$), procedemos por escalonamento. Se todas as colunas da matriz A possuirem posição de pivô, então as colunas são LI (pois daí a única solução do sistema homogêneo é a trivial). No caso de alguma coluna não possuir posição de pivô, o sistema homogêneo possui pelo menos uma variável livre; logo, as colunas de A são LD.

Exemplo 4. Decidir se as colunas de A são LI:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 2 & -4 & 22 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Como as colunas de A são quatro vetores de $\mathbb{R}^4$, pode ser que sejam LI (caso tivesse uma coluna a mais, saberíamos automaticamente serem LD). Aplicando o algoritmo de escalonamento, sabemos que

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notando que a última coluna não possui posição de pivô, concluimos que as colunas de A são LD. Isto pois, neste caso, o sistema linear homogêneo associado, $A\vec{x} = \vec{0}$, cuja matriz aumentada associada é

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

que possui uma variável livre (e portanto outras soluções que não a trivial). $\triangleleft$

3 Transformações lineares

Uma **transformação linear** é um tipo especial de função que associa um vetor a outro vetor

$$T : \{\text{vetores}\} \to \{\text{vetores}\}$$

e com a propriedade adicional

$$T\big(a\vec{u} + b\vec{v}\big) = aT(\vec{u}) + bT(\vec{v}), \quad \text{para todos } a, b \in \mathbb{R} \quad \text{e todos } \vec{u}, \vec{v}.$$

Em geral, pensamos em uma transformação linear como “transformando um vetor em outro”.

Exemplo 5. A aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(\vec{u}) = 3\vec{u}$ é a transformação linear que transforma um vetor de $\mathbb{R}^3$ no vetor que tem o triplo do comprimento.

Exemplo 6. Também é linear a transformação que faz uma rotação de um ângulo $\pi/2$. Voltaremos a este exmeplo com mais detalhes na seção seguinte.

Exemplo 7. Consideramos a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, que transforma vetores de $\mathbb{R}^2$ em vetores de $\mathbb{R}^3$, dada pela fórmula

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - 3x_2, 3x_1 + 5x_2, -x_1 + x_2).$$

Nota que, excepcionalmente, estamos representando os vetores como linhas. É comum quando tratamos de transformações lineares. Esta fórmula nos diz, por exemplo, que os vetores

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

são transformados nos vetores

$$T\big(\vec{u}\big) = \begin{bmatrix} 1 - 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) \\ -1 + (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T\big(\vec{v}\big) = \begin{bmatrix} 0 - 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 0 + 5 \cdot 3 \\ -0 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 15 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

4 Matriz de uma transformação linear

Voltemos à transformação linear

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - 3x_2, 3x_1 + 5x_2, -x_1 + x_2)$$

do Exemplo 7. Lembramos que um vetor qualquer de $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De fato,

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2.$$

Logo, utilizando a propriedade de a transformação ser linear, temos que

$$T(\vec{u}) = T\big(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2\big) = x_1 T(\vec{e}_1) + x_2 T(\vec{e}_2).$$

Calculamos $T(\vec{e}_1)$ e $T(\vec{e}_2)$ pela fórmula dada da transformação linear:

$$T(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Concluimos que

$$T(\vec{u}) = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Desta forma, associamos uma matriz de ordem 3×2 à transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

O procedimento que aplicamos acima não é particular do exemplo que analisamos, de modo que é sempre possível associar a uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma matriz A de ordem $m \times n$, chamada **matriz canônica associada à transformação linear** T ou apenas **matriz associada** a T, cujas colunas são os vetores $T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2), T(\vec{e}_3), \ldots, T(\vec{e}_n) \in \mathbb{R}^m$ (e portanto n colunas com m componentes cada).

Exemplo 8. A transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\vec{u}) = 5\vec{u}$, satisfaz

$$T(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T(\vec{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Assim, podemos escrever

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 9. O método acima pode também ser aplicado para conseguirmos uma fórmula para transformações lineares como as do Exemplo 6. Vamos considerar a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

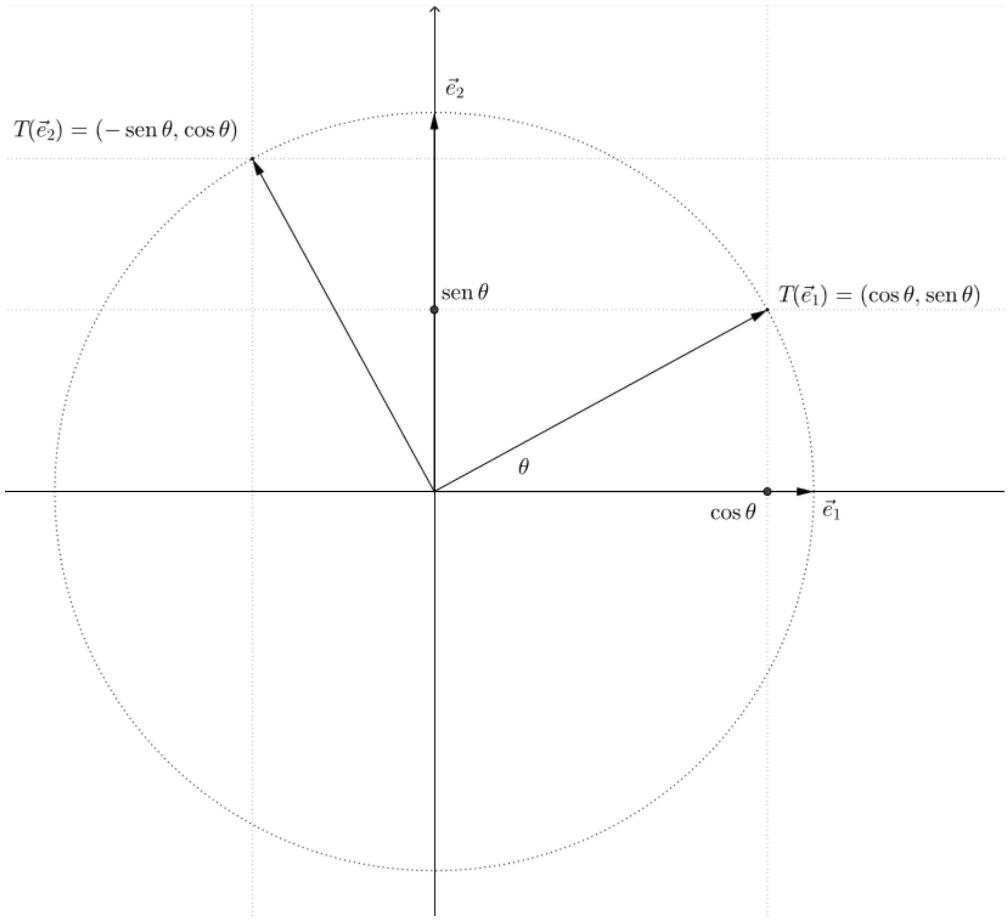
$$T(\vec{x}) = \text{rotação no sentido anti-horário de } \vec{x} \text{ por um ângulo } \theta \in (0, 2\pi).$$

A matriz da transformação linear tem por colunas a imagem por T dos vetores $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$. Observamos que (ver figura)

$$T(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}, \quad T(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Logo, concluimos que

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$



5 Transformações injetoras, sobrejetoras e invertíveis

Como de costume, dada uma função $f : A \to B$, diz-se que A é o domínio de f enquanto B é o contradomínio. A imagem de f é um subconjunto de B: todos os elementos $y \in B$ tais que $f(x) = y$ ou, intuitivamente, "todos os elementos de B que são atingidos pela função f".

Na hora de decidir se uma função é invertível ou não, duas propriedades são essenciais:

1) cada elemento de B ser a imagem de no máximo um elemento de A, caso em que f é dita **injetora**;

2) a imagem de f ser igual ao contradomínio, caso em que f diz-se **sobrejetora**.

Quando estas duas propriedades são satisfeitas, isto é, quando a função f é injetora e sobrejetora, vale que f é **invertível**: podemos encontrar uma função $f^{-1} : B \to A$ que satisfaz

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x, \text{ para todo } x \in A \quad \text{e} \quad f\big(f^{-1}(y)\big) = y, \text{ para todo } y \in B.$$

Ao tentarmos encontrar uma **função inversa** f^{-1}, as propriedades de ser injetora e sobrejetora, aparecem naturalmente.

Vamos analisar quando que transformações lineares são injetoras, sobrejetoras e/ou invertíveis.

5.1 Transformações lineares injetoras

A transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é injetora quando, para $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, a equação

$$T(\vec{x}) = \vec{b}$$

possuir uma única solução ou nenhuma (no máximo uma – comparar com a definição acima). Como vimos, existe uma matriz A de ordem $m \times n$ associada à transformação linear T, de modo que temos que analisar as soluções de

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Recaimos novamente em um sistema linear!

No caso particular em que $\vec{b} = \vec{0}$, o sistema homogêneo $A\vec{x} = \vec{0}$ sempre possui a solução trivial $\vec{x} = \vec{0}$. Neste caso, para que a transformação linear seja injetora devemos verificar que esta é a única solução de $A\vec{x} = \vec{0}$. Na verdade, é possível verificar (ver livro David C. Lay):

$$\boxed{T \text{ é injetora se, e somente se, } A\vec{x} = \vec{0} \text{ possui apenas a solução trivial.}}$$

Em particular, este caso somente é possível se $n \leq m$ (reler observações que seguem o Exemplo 3).

Notem que a afirmação acima é também equivalente a

$$\boxed{T \text{ é injetora se, e somente se, as colunas de } A \text{ são linearmente independentes.}}$$

5.2 Transformações lineares sobrejetoras

A transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é sobrejetora quando, para todo $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, a equação

$$T(\vec{x}) = \vec{b}$$

possui alguma solução (comparar com a definição anterior). Seja A a matriz de ordem $m \times n$ associada a T. Assim, para verificar que T é sobrejetora, devemos verificar que, para qualquer $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, o sistema linear

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

possui ao menos uma solução (uma ou infinitas). Isto é equivalente a:

$$\boxed{T \text{ é sobrejetora se, e somente se, as colunas de } A \text{ geram todo o espaço } \mathbb{R}^m.}$$

Em particular, este caso somente é possível se $n \geq m$ (veremos mais adiante no curso – a imagem da transformação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ será de dimensão no máximo igual a n).

Exemplo 10. Considere a transformação linear T cuja matriz associada é

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Como são quatro colunas de $\mathbb{R}^3$, vemos que as colunas são LD e, portanto, T não é injetora.

Por outro lado, a matriz já está em forma escalonada. Vamos analisar se o sistema

$$A\vec{x} = \vec{b} \iff \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & b_3 \end{array}\right]$$

possui solução para todo $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$. De fato, o sistema possui solução (já que nenhuma linha da sua forma escalonada é inconsistente). Em verdade, o sistema possui uma variável livre. Logo, T é sobrejetora.

Exemplo 11. Considere a transformação linear T cuja matriz associada é

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Como são somente duas colunas, é fácil ver que uma não é múltipla da outra: por causa das primeiras componentes, podemos pensar que a primeira coluna é três vezes a primeira, mas verificando a segunda linha já não dá certo $3 \cdot 7 \neq 5$. Logo, as colunas são LI e a transformação T é injetora.

Por outro lado, as colunas de A geram um espaço de dimensão no máximo 2; logo, não geram $\mathbb{R}^3$. Portanto, T não é sobrejetora.

5.3 Transformações lineares invertíveis

Pelas observações das últimas subseções, só é possível da transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ser invertível quando $m = n$, pois T deverá ser ao mesmo tempo injetora e sobrejetora. Veremos na semana seguinte um método para calcular a transformação inversa T^{-1}, que será também uma transformação linear.