Lista Zero – Prof. Diego Marcon

Análise Matemática C

Lista de exercícios referente ao início do curso. Comtempla:

- Problemas de revisão de Álgebra Linear;
- Revisão da norma de operadores e alguns isomorfismos naturais.

Exercício 1. Defina base e dimensão de um espaço vetorial U. Mostre que a dimensão está bem definida.

Exercício 2. Sejam U e V espaços vetoriais. Defina uma transformação linear $T : U \to V$ e mostre que $T(0) = 0$.

Exercício 3. Sejam U e V espaços vetoriais e $T : U \to V$ uma transformação linear. Defina o núcleo (ou *kernel*) de T por

$$\ker T = \big\{u \in U;\ T(u) = 0\big\}.$$

(i) Mostre que $\ker T$ é um subespaço vetorial de U;

(ii) Mostre que T é injetiva se, e somente se, $\ker T = \{0\}$.

Exercício 4. O produto de uma matriz A de ordem $m \times n$ por um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ pode ser motivado pela representação matricial de um sistema linear de equações. Mais precisamente, definimos[1]

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

justamente porque, desta forma, é possível representar o sistema linear com m equações e n variáveis independentes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \tag{2}$$

pela equação $Ax = b \in \mathbb{R}^m$. O uso de tabelas (matrizes) faz com que as operações com as linhas seja mais fácil e sistemático. Verifique que são equivalentes:

(i) O sistema linear (2).

(ii) A identidade vetorial $Ax = b$, onde o vetor $Ab \in \mathbb{R}^m$ é definido como em (1).

(iii) O vetor b pode ser escrito como combinação linear das colunas da matriz A:

$$b = x_1c_1 + x_2c_2 + \cdots + x_nc_n.$$

Observe que os coeficientes da combinação linear são os coeficientes do vetor $x \in \mathbb{R}^n$.

(iv) $b \in \mathbb{R}^m$ pertence à imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $T(x) = Ax$.

[1] Neste exercício, embora não seja absolutamente relevante, nós estamos representando os vetores de $\mathbb{R}^n$ e de $\mathbb{R}^m$ nas bases canônicas dos respectivos espaços.

Exercício 5. Seja A uma matriz (quadrada) de ordem $n \times n$. Dizemos que A é **invertível** quando existe uma matriz, denotada por A^{-1}, que satisfaz

$$AA^{-1} = I \quad \text{e} \quad A^{-1}A = I.$$

Prove que são equivalentes:

(i) A é invertível;

(ii) Existe uma matriz B tal que $AB = I$;

(iii) Existe uma matriz C tal que $CA = I$;

(iv) Para todo $b \in \mathbb{R}^n$, o sistema $Ax = b$ possui exatamente uma solução;

(v) O sistema $Ax = 0$ possui somente a solução trivial;

(vi) As colunas $c_1, c_2, \dots, c_n$ de A são linearmente independentes;

(vii) Todo vetor $b \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como combinação linear das colunas $c_1, c_2, \dots, c_n$ de A;

$(viii)$ Todo vetor $b \in \mathbb{R}^n$ pertence a $\operatorname{Span}\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, espaço gerado pelas colunas de A;

(ix) As colunas de A geram $\mathbb{R}^n$: $\operatorname{Span}\{c_1, c_2, \dots, c_n\} = \mathbb{R}^n$;

(x) $T(x) = Ax$ é sobrejetora;

(xi) $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^n$;

(xii) $T(x) = Ax$ é injetora;

$(xiii)$ $\ker T = \{0\}$;

(xiv) $T(x) = Ax$ é invertível,

(xv) A^T é invertível.

Exercício 6. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^n)$ tal que

$$T(x, 0) = 0 \implies x = 0. \tag{3}$$

Acima, estamos escrevendo $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+k}$ e pensando em $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^k$. Prove que, para $y \in \mathbb{R}^k$ fixado, existe único $x = x(y) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$T(x, y) = 0.$$

Além disso, a aplicação $y \longmapsto x(y)$ é linear. Este problema pode ser visto como uma "versão linear" do Teorema da Função Implícita, que veremos em aula.

Exercício 7. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita e $T : U \to V$ uma transformação linear. Mostre que

$$\dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T) = \dim U.$$

Exercício 8. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear. Seja $\mathcal{B}_1$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}_2$ a base canônica de $\mathbb{R}^m$. Encontre uma matriz A de ordem $m \times n$ tal que

$$\left[T(x)\right]_{\mathcal{B}_2} = A \cdot \left[x\right]_{\mathcal{B}_1}.$$

A matriz A é chamada de *matriz canônica* associada com a transformação T. Descreva as colunas da matriz A.

Exercício 9. Dado um espaço vetorial V de dimensão finita igual a n, denotamos por

$$V^* = \big\{\ell : V \longrightarrow \mathbb{R};\ \ell \text{ linear}\big\}$$

o seu espaço dual.

(i) Se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, defina, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, o funcional linear $\mathrm{d}x^j : V \longrightarrow \mathbb{R}$ nos elementos da base $\mathcal{B}$ por

$$\mathrm{d}x^j(v_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Prove que $\mathcal{B}^* := \{\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \ldots, \mathrm{d}x^n\}$ é uma base de V^*.

(ii) Prove que se $v \in V$ é tal que $\ell(v) = 0$ para todo $\ell \in V^*$, então $v = 0$.

(iii) Mostre que V e $V^{**} := (V^*)^* = \big\{u : V^* \to \mathbb{R};\ u \text{ linear}\big\}$ são canonicamente isomorfos, isto é, exiba um isomorfismo que é independente de escolha de bases (e mostre que é um isomorfismo de espaços vetoriais).

Exercício 10. Seja $T : U \longrightarrow V$ uma transformação linear e seja $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base de U. Mostre que a transformação linear T é completamente determinada pelos seus valores (vetoriais) nos elementos da base $\mathcal{B}$. Mais precisamente, se $S : U \to V$ é uma transformação linear e vale que

$$S(u_i) = T(u_i) \quad \text{para todo} \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

mostre que $S = T$.

Exercício 11. Para $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear, definimos a *norma de operador* de T

$$\|T\| := \max\big\{\big|T(x)\big|;\ x \in \mathbb{R}^n \text{ com } |x| = 1\big\}. \tag{4}$$

(i) Mostre que de fato podemos escrever $\max$ em (4) ao invés de $\sup$.

(ii) Prove que (4) define uma norma no espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, isto é, que valem

- $\|T\| > 0$ se $T \neq 0$;
- $\|\lambda T\| = |\lambda|\,\|T\|$, para quaisquer $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$;
- $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$

(iii) Mostre que (4) é equivalente a

$$\|T\| := \max\left\{\frac{|T(x)|}{|x|};\ x \in \mathbb{R}^n \text{ com } x \neq 0\right\}.$$

Em particular, tem-se

$$|T(x)| \leq \|T\|\,|x| \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

(iv) Mostre que, para $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$,

$$\|TS\| \leq \|T\|\,\|S\|.$$

Exercício 12. Prove o Teorema da Representação de Riesz em para dimensão finita: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dado $\ell \in V^*$, mostre que existe (apenas um) $w \in V$ tal que

$$\ell(v) = \langle v, w \rangle \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Além disso, a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : V^* &\longrightarrow V \\ \ell &\longmapsto w \end{aligned}$$

é uma isometria linear, isto é, é um isomorfismo que satisfaz $\|\ell\| = |w|$.

Obs: Apesar de o Teorema da Representação de Riesz fornecer um isomorfismo $V^* \simeq V$, este isomorfismo não é canônico, pois depende da estrutura de produto interno do espaço vetorial V. Em outras palavras, produtos internos diferentes geram isomorfismos diferentes, não havendo uma escolha que seja mais “natural” do que outras.

Exercício 13. Observe que existe uma identificação $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}^m$ que é um isomorfismo canônico, isto é, que independe de escolha de bases para os espaços envolvidos: mostre que

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \\ x &\longmapsto \Phi(x)(t) := tx \end{aligned}$$

é um isomorfismo (canônico) de espaços vetoriais.

Exercício 14. Defina

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) = \{B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m;\ B \text{ é bilinear}\}$$

e mostre que

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)\big) &\longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \\ T &\longmapsto \Phi(T)[x, y] := T(x)(y) \end{aligned}$$

é um isomorfismo (canônico) de espaços vetoriais.