Lista 1 – Prof. Diego Marcon

Análise Matemática C

Lista de exercícios referente ao inínio do curso. Comtempla:

- Definição de derivada de funções escalares e vetoriais;
- Regra da cadeia;
- Identidade e desigualdade do valor médio;
- Derivada segunda;
- Fórmula de Taylor;
- Problemas de otimização, pontos críticos;

Alguns problemas desta lista foram retirados de listas anteriores do Prof. Eduardo Brietzke.

Exercício 1. Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função definida em um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Suponhamos que existam transformações lineares $S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ tais que

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - S(h)|}{|h|} = 0 = \lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - T(h)|}{|h|}.$$

Mostre que $S = T$. Em particular, este exercício prova que a derivada é única e está bem definida como a transformação linear $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ que satisfaz a propriedade acima.

Exercício 2. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. Prove que são equivalentes:

(i) $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$;

(ii) as funções coordenadas $f_i : U \to \mathbb{R}$ possuem todas as derivadas parciais $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ contínuas;

(iii) para todo $x \in U$ e todo $v \in \mathbb{R}^n$, as derivadas direcionais $\dfrac{\partial f}{\partial v} : U \to \mathbb{R}^m$ existem e são contínuas.

Exercício 3. Se $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação bilinear (linear em cada uma das componentes), mostre que $B'(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é a transformação linear dada por:

$$B'(x, y) \cdot (h, k) = B(h, y) + B(x, k).$$

Em seguida, encontre (e prove a validade de) uma expressão para a derivada de uma aplicação k-linear

$$B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Exercício 4 (Lima, Curso de Análise vol.2). Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto convexo e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em U. Considere as seguintes cinco afirmações:

(a) $|f'(x)| \leq C$ para todo $x \in U$;

(b) $|f(y) - f(x)| \leq C|y - x|$ para todos $x, y \in U$;

(c) f é uniformemente contínua;

(d) para todo $a \in \bar{U}$, existe $\lim_{x \to a} f(x)$;

(e) se U é limitado, então $f(U)$ é limitado.

Mostre que $(a) \iff (b) \implies (c) \implies (d) \implies (e)$ e que as demais são falsas.

Exercício 5. Mostre que se $f : U \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em um conjunto aberto conexo $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathrm{d}f(x) = 0 \in (\mathbb{R}^n)^*$ para todo $x \in U$, então f é constante em U.

Exercício 6. O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ pode ser identificado com um plano, dando uma estrutura de corpo para $\mathbb{R}^2$. Todo número complexo não nulo possui inverso:

$$z = x + yi \implies z^{-1} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}.$$

É possível, então, definir a derivada de uma função complexa (de valores complexos) assim como nos cursos de análise na reta: para $a \in \mathbb{C}$, definimos

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{C}, \qquad \text{(aqui, } h \in \mathbb{C}) \tag{1}$$

quando tal limite existe. Esta definição, no entanto, **não coincide** com a definição de derivada como transformação linear, como passamos a analisar.

(i) Mostre que, se o limite em (1) existir e utilizarmos as notações $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$, então

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a).$$

Estas identidades são conhecidas como as **equações de Cauchy-Riemann**.

Dica: Considerar o limite (1) em duas situações: $h = t \in \mathbb{R}$ e $h = it$, para $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Mostre que a aplicação linear

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathbb{C} \quad &\longrightarrow \quad \Phi(\mathbb{C}) \subset M(2 \times 2) \\ x + iy \longmapsto &\qquad \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais.

(iii) Mostre que se f é diferenciável em a no sentido complexo, então f é diferenciável no sentido da nossa definição de aula. Além disso, neste caso a derivada $f'(a) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como transformação linear tem a matriz canônica associada igual a

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \\ -\dfrac{\partial u}{\partial y}(a) & \dfrac{\partial u}{\partial x}(a) \end{bmatrix}.$$

Portanto, está coerente com o item (ii) considerar que $f'(a) \in \mathbb{C}$.

Exercício 7. Para $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ e $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ curvas diferenciáveis, mostre que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big\langle \alpha(t), \beta(t) \big\rangle = \big\langle \alpha'(t), \beta(t) \big\rangle + \big\langle \alpha(t), \beta'(t) \big\rangle \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, prove que se α tem velocidade constante, isto é, $|\alpha'(t)| \equiv C$ para todo t, então

$$\alpha'(t) \perp \alpha''(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Exercício 8. Um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ é uma função vetorial $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Dizemos que o campo F é um **campo gradiente** quando existe uma função escalar $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F = -\nabla\phi$.

Em um sistema mecânico clássico onde o campo de forças depende apenas da posição, uma trajetória é uma curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaz a equação de Newton

$$m\alpha''(t) = F\big(\alpha(t)\big). \tag{2}$$

Mostre que, se F é um campo gradiente, então há conservação de energia, isto é, a função energia

$$E(t) = \frac{m|\alpha'(t)|^2}{2} + \phi\big(\alpha(t)\big)$$

é constante. Por esta razão, campos gradiente também são conhecidos como **campos conservativos**.

Outra forma de enunciar este princípio de conservação de energia é o seguinte: o funcional energia dado por

$$E(x, v) = \frac{m|v|^2}{2} + \phi(x)$$

é constante *ao longo das trajetórias* (α, α') do sistema.

Dica: Fazer o produto interno com $\alpha'(t)$ em (2), utilizar o Exercício 7 e o Teorema Fundamental do Cálculo para funções reais de uma variável real.

Exercício 9. Considere $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma função duas vezes diferenciável. Escrever $f''(x_0)(v, w)$ em coordenadas. Dados $v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i$ e $w = \sum_{i=1}^{n} w^i e_i$, obter as m componentes de $f''(x_0)(v, w) \in \mathbb{R}^m$ em termos das derivadas parciais de segunda ordem de f.

Exercício 10. Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funções duas vezes diferenciáveis. Defina uma função $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \langle f(x), g(x)\rangle.$$

Encontre a expressão da forma bilinear $F''(x)(u, v)$.

Dica: Expresse F como a composta das funções $\Psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $\Psi(x) = \big(f(x), g(x)\big)$ e $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $B(y, z) = \langle y, z\rangle$.

Exercício 11. Sejam $GL(n) = \{T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n);\ T \text{ é invertível}\}$ e $f : GL(n) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ definida por $f(T) = T^{-1}$. Encontre uma expressão para $f''(T)(H, K)$.

Dica: Note que

$$f' : A \longmapsto A^{-1} \longmapsto (A^{-1}, A^{-1}) \longmapsto f'(A),$$

onde, no último passso, foi aplicada a aplicação bilinear

$$\begin{aligned} B : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{L}\big(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n); \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)\big) \\ (S, T) &\longmapsto B(S, T)(H) := -SHT \end{aligned}$$

Exercício 12. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^k definida em um aberto convexo $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Mostre que a função resto definida pela identidade

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \cdots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \cdot (x - a)^k + r(x - a),$$

satisfaz

$$\lim_{x \to a} \frac{r(x - a)}{|x - a|^k} = 0.$$

Esta é uma versão da Fórmula de Taylor diferente da que vimos em aula, cujo resto não é explícito, mas que não necessita ser $f \in C^{k+1}$.

Exercício 13. (i) Mostre que se uma função diferenciável $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ tem um único ponto crítico e este é um ponto de mínimo local estrito, então ele é ponto de mínimo global.

(ii) O objetivo deste item é mostrar, com um exemplo, que, em dimensões maiores, a afirmação do item (i) não é mais válida. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=x^2(1+y)^3+y^2$.

- (a) Mostre que $(0,0)$ é o único ponto crítico de f.
- (b) Mostre que $(0,0)$ é ponto de mínimo local estrito.
- (c) Verifique que $f(1,-4)=-11<0$. Conclua que $(0,0)$ não é o ponto de mínimo global.

Obs. Um outro contra-exemplo é a função $f(x,y)=3xe^y-x^3-e^{3y}$, mas não se consegue uma função que seja polinômio de grau ≤ 4 com esta propriedade.

Exercício 14. Escreva a Fórmula de Taylor de ordem 2 de uma função $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ explicitamente, nos seguintes casos:

1. Em termos do gradiente e da matriz Hessiana.
2. Em termos das derivadas parciais de primeira e de segunda ordem de f.

Exercício 15. Mostre que se f é um polinômio de grau n em duas variáveis, então

$$f(x_0+x,y_0+y)=\sum_{i+j\leq n}\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i\partial y^j}(x_0,y_0)x^iy^j.$$

Essa igualdade é exata, sem o termo $r(x,y)$. Use esse fato para provar que se $f(x_0,y_0)=0$, então existem polinômios g e h tais que $f(x,y)=(x-x_0)g(x,y)+(y-y_0)h(x,y)$, isto é, o ideal $I=\{f\mid f(x_0,y_0)=0\}$ tem dois geradores, $I=[x-x_0,y-y_0]$.

Exercício 16. Seja $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f(x)=\psi\big(\langle a,x\rangle\big)$, onde $\psi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ é de classe C^2. Mostre que, se $n\geq 2$, todo ponto crítico de f é degenerado.

Exercício 17. Seja $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x,y)=\big(y-x^2\big)\big(y-2x^2\big)$. Prove que a origem é um ponto de mínimo local para a restrição de f a qualquer reta passando pela origem, mas não é um ponto de mínimo local para f.

Dica: Examine os sinais assumidos por f.

Exercício 18. Encontre e classifique os pontos críticos das funções:

- (i) $f(x,y)=x^3+x-4xy-2y^2$
- (ii) $f(x,y)=2x^3+(x-y)^2-6y$

Exercício 19. Sejam n pontos no $\mathbb{R}^3$ denotados por $P_i=(x_i,y_i,z_i)$. Prove que o ponto $P=(x,y,z)$ que minimiza a soma dos quadrados das distâncias aos pontos P_i é o centro de gravidade:

$$x=\frac{1}{n}\sum x_i,\quad y=\frac{1}{n}\sum y_i\quad\text{e}\quad z=\frac{1}{n}\sum z_i.$$

Exercício 20. Diagonalize as forma quadráticas, decidindo em cada caso se são positivas, negativas ou indefinidas:

- (a) $Q(x,y)=x^2-3xy+y^2$.
- (b) $Q(x,y,z)=2xy+yz-3xz$.
- (c) $Q(x,y,z,t)=x^2+y^2+xy-xt+2yt$.