Lista 2 – Prof. Diego Marcon

Análise Matemática C

8 de Abril de 2020

Lista de exercícios referente ao inínio do curso. Comtempla:

- Funções convexas;
- Teorema da Função Inversa;
- Teorema da Função Implícita;
- Formas canônicas locais;
- Teorema do Posto.

Alguns problemas desta lista foram retirados de listas anteriores do Prof. Eduardo Brietzke.

Exercício 1. Mostre que $f : (A, B) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, para quaisquer $a < x < b$ contidos em (A, B), temos

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}. \tag{1}$$

Além disso:

(i) Interprete (1) geometricamente.

(ii) Utilize (1) para provar diretamente que f é localmente de Lipschitz.

Exercício 2. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Mostre que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \operatorname{dist}(x, U)$$

é convexa.

Exercício 3. Mostre que todo ponto de mínimo local de uma função convexa é ponto de mínimo global. Além disso, mostre que o conjunto dos pontos de mínimo é convexo.

Exercício 4. Mostre que os pontos críticos de uma função convexa são pontos de mínimo globais.

Exercício 5 (Desigualdade de Jensen - versão discreta). A função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é convexa se, e somente se, para todo $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \ldots, \lambda_m \geq 0$ com $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1$, temos

$$f\big[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m\big] \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_m f(x_m).$$

Exercício 6 (Desigualdade de Jensen - versão contínua em dimensão 1). Sejam $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa. Prove que

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\big(g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

<u>Obs</u>. Lembre que se g é integrável e f é contínua, então $f \circ g$ é integrável, mas a composta de funções integráveis pode não ser integrável.

Exercício 7. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em um conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e convexo.

(i) Mostre que f é convexa se, e somente se,

$$\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

(ii) Uma função $F : U \to \mathbb{R}^n$ é dita **monótona** quando $\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq 0$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Mostre que, em dimensão 1, a condição (2) é equivalente a ser f' crescente.

Exercício 8. (i) Prove que se $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções convexas, então também é convexa a função

$$h(x) := \max\{f(x), g(x)\}.$$

(ii) Mostre que o supremo pontual de uma família qualquer de funções convexas $f_\lambda : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, que possivelmente assumem valor $+\infty$ em algum ponto, é também uma função convexa, isto é,

$$f(y) := \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(y)$$

é uma função convexa, que possivelmente assume valor $+\infty$.

Exercício 9. Determine quais funções são convexas e/ou côncavas:

(i) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z^2$.

(ii) $f(x, y, z) = x - y^2 - z^2$.

(iii) $f(x, y) = \big(x + y + 1\big)^p$.

(iv) $f(x, y, z) = \exp(x^2 + xy + y^2 + z^2)$.

Exercício 10. Mostre que as funções abaixo são convexas em $\mathbb{R}^n$:

(i) $f(x) = |x|^p$, para $p \geq 1$ real.

(ii) $f(x) = \big(1 + |x|^2\big)^{\frac{p}{2}}$, para $p \geq 1$ real.

(iii) $f(x) = \big(1 + \langle x, x \rangle\big)^{\langle x, x \rangle}$.

Exercício 11. Prove a seguinte generalização da desigualdade entre a média aritmética e geométrica

$$\big(a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n}\big)^{1/(p_1 + \cdots + p_n)} \leq \frac{p_1\, a_1 + p_2\, a_2 + \cdots + p_n\, a_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}, \quad \text{para quiasquer } \; a_i,\ p_j > 0.$$

Dica: Escrever $x^k = e^{k \log x}$ e usar a convexidade da função exponencial.

Exercício 12. Vimos em aula que o conjunto dos pontos onde uma função convexa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ não é diferenciável tem medida nula. É neste sentido que se diz que funções convexas são diferenciáveis em quase todo ponto. O objetivo deste exercício é construir uma função convexa em um intervalo que não é diferenciável em nenhum número racional.

(i) Dada $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável e não decrescente, definimos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = A + \int_a^x g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Prove que f é convexa.

(ii) No item anterior, mostre que se x_0 é um ponto de descontinuidade de g, então f não é diferenciável em x_0. Tem-se

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} g(x) \quad \text{e} \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} g(x)$$

(iii) Construa uma função não decrescente em um intervalo, que seja descontínua em qualquer racional.

<u>*Dica:*</u> Seja $\{r_n\}$ uma enumeração do conjunto $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ que contem cada racional de $[a,b]$ uma e apenas uma vez. Seja

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$$

uma série convergente de termos positivos. Para cada $x \in [a,b]$, defina $g(x)$ como sendo a soma dos a_n para todos os n tais que $r_n \leq x$ (a soma da família vazia é 0, por definição). Uma maneira interessante de escrever a função g é através da função u de Heaviside:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n u(x - r_n) \quad \text{onde} \quad u(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0 \\ 0, & \text{se } t \leq 0 \end{cases} .$$

Mostre que $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ é crescente, descontínua nos racionais e contínua nos irracionais.

(iv) Construa uma função convexa em um intervalo e não diferenciável nos números racionais.

Exercício 13. Quando uma função não é diferenciável, um conceito que pode substituir o de diferenciabilidade é o de subdiferenciabilidade (ou superdiferenciabilidade). Dada uma função convexa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$, o **subdiferencial** de f no ponto x é o conjunto $\partial f(x)$ dos pontos $p \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$f(y) \geq f(x) + \langle p, y - x \rangle \ \text{ para todo } \ y \in \mathbb{R}^n.$$

A desigualdade acima pode ser interpretada geometricamente como: p define um plano que está todo abaixo do gráfico de f e que toca no gráfico de f para $y = x$.

(i) Mostre que, dados $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ convexos, fechados e disjuntos, com um deles compacto, existe $w \in \mathbb{R}^n$ e $a > 0$ tais que

$$\langle w, x - y \rangle \geq a \ \text{ para todo } \ x \in A \ \text{ e todo } \ y \in B.$$

<u>*Dica:*</u> Definir $W := A - B = \{a - b;\ a \in A, b \in B\}$. Com as nossas hipóteses, mostre que fechado, convexo e $0 \notin W$. Sendo fechado, minimizar $|x|^2$ em W, obtendo um minimizante $w \neq 0$ em W. Sendo convexo, $(1-t)w + t(x - y) \in W$.

(ii) Mostre que, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função convexa, então $\partial f(x_0) \neq \emptyset$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Dica: Considerar $A = \{(x, y);\ y \geq f(x)\}$ o epigráfico de f e $B_k = \{(x_0, f(x_0) - 1/k)\}$.

(iii) Mostre que f é diferenciável em x_0 se, e somente se, $\partial f(x_0)$ consiste de um ponto só. Neste último caso, deve ser $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.

Exercício 14. Dada uma função convexa própria $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, definimos a sua **função convexa conjugada** $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ como

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \big(\langle x, y \rangle - f(x) \big).$$

(i) Mostre que f^* é de fato convexa;

(ii) Trivialmente, vale a chamada **desigualdade de Young**:

$$\langle x, y \rangle \leq f(x) + f^*(y) \ \text{ para todos } \ x, y \in \mathbb{R}^n.$$

O nome da desigualdade é motivado por um caso particular mais famoso: prove que

$$f(x) = \frac{|x|^p}{p} \ \text{ com } \ p > 1 \implies f^*(y) = \frac{|y|^q}{q} \ \text{ com } \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

para escrever a desigualdade de Young mais usual:

$$\langle x, y \rangle \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}.$$

Exercício 15. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa própria e semicontínua inferiormente. Então, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\langle x, y\rangle = f(x) + f^*(y)$.

(ii) $y \in \partial f(x)$.

(iii) $x \in \partial f^*(y)$.

Exercício 16. Para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função própria, são equivalentes:

(i) f é convexa e semicontínua inferiormente.

(ii) $f = g^*$ para alguma função própria $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iii) $f^{**} = f$.

Exercício 17. Seja $f : V \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e seja $\varphi : U \to V$ um difeomorfismo, também de classe C^2, com $\varphi(a) = b$. Mostre que o posto da Hessiana de f em b é igual ao posto da Hessiana de $f \circ \varphi$ no ponto a.

Exercício 18. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tal que $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ é uma isometria, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, isto é:

$$\langle f'(x) \cdot h, f'(x) \cdot k\rangle = \langle h, k\rangle \quad \text{para todos } x, h, k \in \mathbb{R}^n.$$

Mostre que f é uma isometria:

$$\big|f(y) - f(x)\big| = |y - x| \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Conclua que

$$f(x) = T(x) + k,$$

onde $k \in \mathbb{R}^n$ e $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ é uma transformação linear ortogonal.

Exercício 19. Considere $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = (x^3, y^3)$. Mostre que $F'(0, 0) = 0$ e que existe a função inversa F^{-1}. Qual a conclusão sobre a diferenciabilidade de F^{-1} na origem?

Exercício 20. Mostre que se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, então f não é injetiva.

Exercício 21. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x/2 + x^2 \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Explique por que este exemplo mostra que não basta ser f diferenciável no Teorema da Função Inversa.

Exercício 22. Discuta a aplicação do Teorema da Função Inversa para a aplicação

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Exercício 23. Mostre que o sistema

$$\begin{cases} e^x + e^{2y} + e^{3u} + e^{4v} = 4 \\ e^x + e^y + e^u + e^v = 4 \end{cases}$$

tem solução para (u, v) em termos de (x, y) em torno do ponto $(0, 0, 0, 0)$. Determine as derivadas parciais de primeira ordem $u_x(0, 0)$, $u_y(0, 0)$, $v_x(0, 0)$ e $v_y(0, 0)$.

Exercício 24. Sejam $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ de classe C^1 e seja $p=\big(p_1,p_2,p_3\big)\in\mathbb{R}^3$ tal que

$$\det\begin{bmatrix} f_{x_2}(p) & f_{x_3}(p) \\ g_{x_2}(p) & g_{x_3}(p)\end{bmatrix}\neq 0\ .$$

Seja $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $F(x_1,x_2,x_3)=\big(f(x_1,x_2,x_3),g(x_1,x_2,x_3)\big)$. Prove que $F(p)$ é ponto interior de $F(\mathbb{R}^3)$.

Dica: Use a mesma ideia da prova do Teorema da Função Implícita que demos em aula.

Exercício 25 (Generalização do anterior). Sejam $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ aberto e $f:\Omega\to\mathbb{R}^m$ de classe C^1 tais que, para todo $x\in\Omega$, $f'(x)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ é sobrejetiva. Prove que a imagem $f(\Omega)$ de f é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$.

Exercício 26. Considere as equações

$$f(x,y,z)=0 \qquad \text{e} \qquad \phi(x,y)=0$$

para funções f e ϕ de classe C^1. Se

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}\neq 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}\neq 0,$$

mostre que estas equações definem localmente z como função de x. Além disso,

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\phi_x f_y-\phi_y f_x}{\phi_y f_z}\ .$$

Exercício 27. Sejam $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ um aberto e $u:\Omega\to\mathbb{R}$ de classe C^1. Seja $(a,b)\in\Omega$ e $c=u(a,b)$. Suponhamos que $u_x(a,b)\neq 0$. Mostre que localmente é possível usar a equação $u=u(x,y)$ para obter $x=x(u,y)$. Mais precisamente, existem intervalos abertos U, V e W, com $a\in U$, $b\in V$ e $c\in W$ e existe $\varphi:W\times V\to U$ de classe C^1 tal que $\varphi(c,b)=a$ e $u(\varphi(z,y),y)=z$, para todo $(z,y)\in W\times V$. Prove ainda que $\varphi\big(u(x,y),y\big)=x$.

Exercício 28. Resolva os seguintes itens:

(i) Sejam $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ um aberto e $u:\Omega\to\mathbb{R}$ e $v:\Omega\to\mathbb{R}$ de classe C^1 tais que o determinante jacobiano

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\det\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y\end{bmatrix}=0$$

se anule identicamente em Ω. Seja $(a,b)\in\Omega$ tal que $\nabla u(a,b)\neq 0$. Prove que existem U aberto tal que $(a,b)\in U$, I intervalo aberto tal que $c=u(a,b)\in I$ e $\Phi:I\to\mathbb{R}$ de classe C^1 tais que $v(x,y)=\Phi\big(u(x,y)\big)$, $\forall\,(x,y)\in U$ (diz-se que v depende funcionalmente de u).

Dica: Suponhamos que $u_x(a,b)\neq 0$. Seja φ a função que existe pelo exercício anterior. Mostre que $v(\varphi(z,y),y)$ não depende de y e defina $\Phi(z)=v(\varphi(z,y),y)$. Mostre que $v(x,y)=\Phi\big(u(x,y)\big)$.

(ii) Sejam $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ um aberto, $u:\Omega\to\mathbb{R}$ e $v:\Omega\to\mathbb{R}$ funções de classe C^1 tais que a matriz jacobiana

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y\end{bmatrix}$$

tem posto constante igual a 1 em Ω. Prove que a aplicação

$$(x,y)\in\Omega\longmapsto\big(u(x,y),v(x,y)\big)\in\mathbb{R}^2$$

tem sua imagem contida numa curva, com possíveis auto-interseções. Mais precisamente, para todo $(x_0,y_0)\in\Omega$, existem $U\subseteq\Omega$ com $(x_0,y_0)\in U$ e $\Phi:U\to\mathbb{R}$ de classe C^1 tais que $\Phi\big(u(x,y),v(x,y)\big)$ é constante e $\nabla\Phi\big(u(x,y),v(x,y)\big)\neq 0$, para todo $(x,y)\in U$.

Exercício 29. O objetivo deste exercício é verificar que raízes simples depolinômios dependem diferenciavelmente (na verdade, em classe C^∞) dos coeficientes do polinômio.

Para cada $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$, indique um polinômio complexo por

$$p_a(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ uma raiz simples de p_a. Mostre que existem vizinhanças U e V, de a e de z_0, respectivamente, tais que

$$b \in U \implies \text{existe única raiz (simples) } z = z(b) \text{ de } p_b.$$

Além disso, a aplicação $b \mapsto z(b)$ é de classe C^∞.

Exercício 30. Dadas duas funções $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, considere a equação diferencial parcial $u_y + a(u)u_x = 0$ com condição inicial $u(x, 0) = h(x)$. Mostre que, localmente numa vizinhança de cada $(x, 0)$, existe uma solução $u = u(x, y)$ definida implicitamente por $u = h(x - a(u)y)$.

Exercício 31. Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k. Se $f'(a)$ tem posto p, então prove que existe um mergulho $\varphi : V \subseteq \mathbb{R}^p \to U$ de classe C^∞ tal que $f \circ \varphi$ é um mergulho.