Lista 3 – Prof. Diego Marcon

Análise Matemática C

5 de julho de 2023

Lista de exercícios referente ao fim da primeira área do curso. Comtempla:

- Superfícies diferenciáveis, valores regulares e superfícies orientáveis;
- Multiplicadores de Lagrange.

Alguns dos problemas desta lista foram retirados de listas anteriores do Prof. Eduardo Brietzke.

Exercício 1. Seja $E \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto. Dada uma função $f \in C^1(E;\mathbb{R}^n)$ e um subconjunto $A \subseteq E$, nós definimos

$$\|f\|_{C^1(A)} := \sup_{x\in A} |f(x)| + \sup_{x\in A} \|f'(x)\|.$$

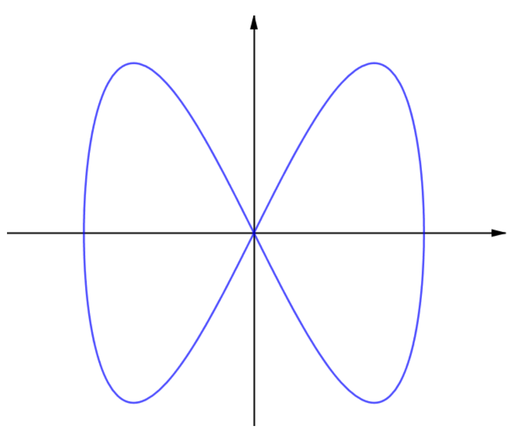
Suponhamos que $f \in C^1(E;\mathbb{R}^n)$ é tal que a sua restrição $f|_K : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma imersão, para algum compacto $K \subset E$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que

$$g \in C^1(E;\mathbb{R}^n),\ \|f-g\|_{C^1(K)} < \delta \implies g|_K \text{ imersão.}$$

Exercício 2. Suponhamos que $f \in C^1(E;\mathbb{R}^n)$, onde $E \subseteq \mathbb{R}^m$ é aberto, é tal que a sua restrição $f|_K : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um mergulho, para algum compacto convexo $K \subset E$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que

$$g \in C^1(E;\mathbb{R}^n),\ \|f-g\|_{C^1(K)} < \delta \implies g|_K \text{ mergulho.}$$

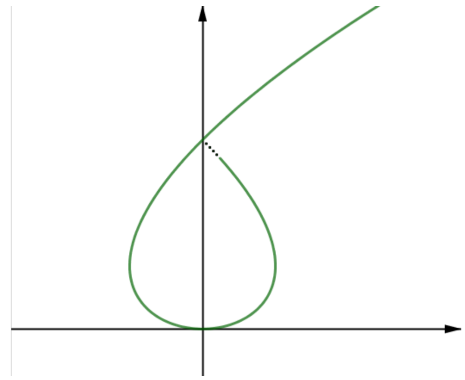
Exercício 3. Mostre que a função $\alpha : (-\pi/2, 3\pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) := (\cos(t), \mathrm{sen}(2t))$ é uma imersão, mas não é um mergulho. Conclua que, segundo nossa definição, sua imagem não é uma superfície de dimensão 1.



Exercício 4. Poderíamos ter uma imersão injetiva que não é um mergulho. Considere $\beta : (-1, 2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\beta(t) := (t^3 - t, t^2).$$

Mostre que β é uma imersão, é injetiva, mas não é um mergulho.

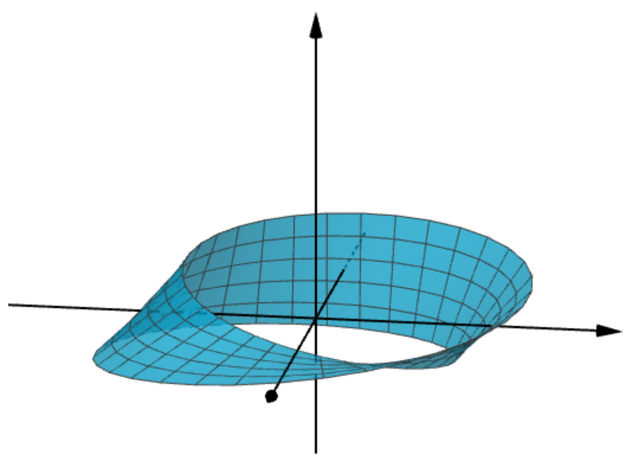


Exercício 5. Prove que a função $\phi : (0, 2\pi) \times (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^3$

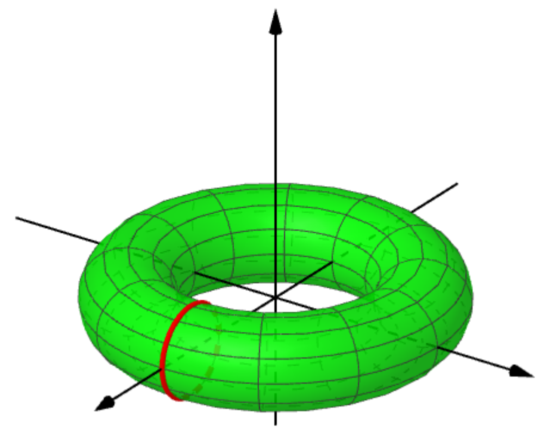
$$\phi(x, y) := \left(\left(2 + y\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cos(x), \left(2 + y\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)\operatorname{sen}(x), y\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

é um mergulho. Logo, pode ser vista como uma parametrização da sua imagem, que está contida na chamada Faixa de Möbius. Ainda:

- Descreva "como funciona" a parametrização com a variação dos parâmetros (x, y). Uma dica é entender como está "girando" o segmento $(1, 3) \times \{0\} \times \{0\}$ inteiramente contido no eixo x.
- Descreva os pontos que estão "faltando" ao considerarmos somente esta parametrização, isto é, os pontos da faixa que não estão na imagem de ϕ.
- É possível cobrir toda a Faixa de Möbius com apenas mais uma parametrização?



Exercício 6. Obter uma parametrização para toro bidimensional em $\mathbb{R}^3$. Em seguida, prove que a parametrização encontrada é um mergulho e justifique quantas parametrizações você precisa para cobrir todo o toro.



Uma dica é pensar na parametrização de um círculo em um dos planos coordenados (por exemplo, como na figura, no plano xz) e depois fazer uma rotação deste círculo em torno de um eixo (no desenho, seria uma rotação em torno do eixo z).

Exercício 7 (Produtos cartesianos). Verifique que o produto cartesiano $M \times N \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ de duas (ou, mais geralmente, de qualquer número finito de) superfícies diferenciáveis

- $M \subseteq \mathbb{R}^m$ de dimensão p em $\mathbb{R}^m$ e
- $N \subseteq \mathbb{R}^k$ de dimensão q em $\mathbb{R}^k$

é uma superfície de dimensão $p+q$ em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, cuja classe de diferenciabilidade é a menor dentre as duas.

Exercício 8. O circulo $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ é uma superfície diferenciável (curva) de dimensão 1 em $\mathbb{R}^2$. Podemos definir o toro n-dimensional por $\mathbb{T}^n := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ com a estrutura de produto cartesiano do Exercício 7. Qual a relação de $\mathbb{T}^2$ com o toro descrito no Exercício 6?

Exercício 9. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo e $f : U \longrightarrow U$ uma função de classe C^k. Defina $M = f(U)$. Mostre que, se f satisfaz $f \circ f = f$, então f tem posto constante em uma vizinhança de M.

Além disso, como consequência, mostre que M é uma superfície de classe C^k.

Exercício 10. (Opcional) Considere

$$\mathrm{G}_{k,n} = \big\{P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n);\ P \text{ simétrica de posto } k \text{ e tal que } P^2 = P\big\}.$$

Mostre que $\mathrm{G}_{k,n}$ é uma superfície de dimensão $k(n-k)$ em $\mathbb{R}^{n^2}$.

Exercício 11. Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^d$ uma função definida na superfície diferenciável $M \subseteq \mathbb{R}^m$. Prove que, se existe $F : U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^k, definida em um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^m$ tal que $M \subset U$ e tal que $F|_M = f$, então f é uma aplicação de classe C^k.

Exercício 12. O fibrado tangente à superfície n-dimensional $M \subseteq \mathbb{R}^m$, de classe C^k, é definido como

$$TM := \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_x M = \big\{(x, v);\ x \in M,\, v \in T_x M\big\} \subset \mathbb{R}^{2m}.$$

Prove que este fibrado possui uma estrutura de superfície diferenciável em $\mathbb{R}^{2m}$ de classe C^{k-1} e de dimensão $2n$ induzida pelas parametrizações da superfície M.

Além disso, prove que a chamada "projeção" $\pi : TM \longrightarrow M$, definida por $\pi(x, v) = x$, é uma aplicação de classe C^{k-1} entre superfícies.

Exercício 13. (Opcional) Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ induz uma aplicação $f_* : TM \longrightarrow TN$ entre os respectivos fibrados tangentes pela lei

$$f_*(x, v) = \big(f(x), f'(x) \cdot v\big).$$

Esta aplicação f_* é às vezes chamada de *aplicação induzida* ou de *push-forward* de f.

Mostre que, se $f : M \longrightarrow N$ é de classe C^k, então $f_* : TM \longrightarrow TN$ de classe C^{k-1}.

Exercício 14. Mostre que

$$M = \big\{x \in \mathbb{R}^3;\ x_3 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + 2x_1 + 2x_2\big\}$$

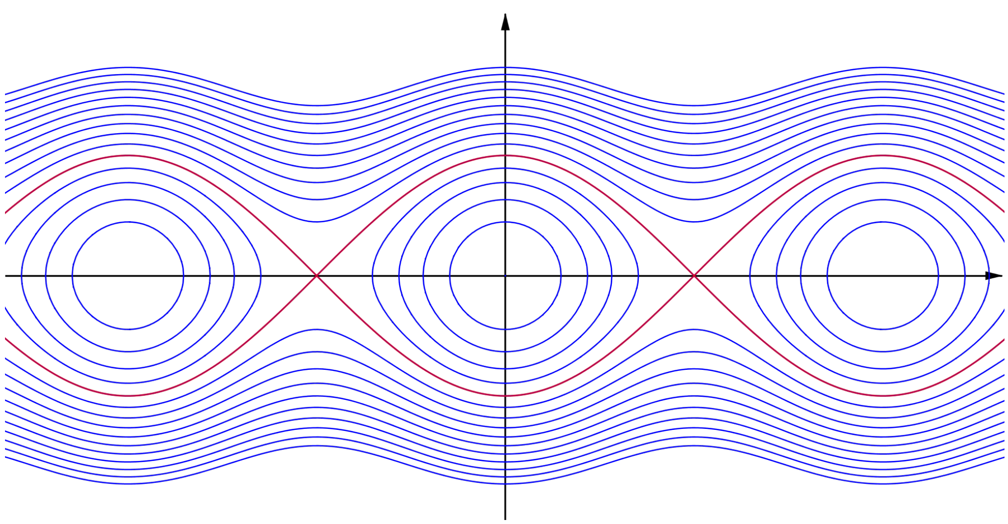
é uma superfície diferenciável e determine o seu plano tangente $T_0 M$ na origem.

Exercício 15. Considere a função $E : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(\theta, v) = \frac{v^2}{2} - \cos\theta.$$

Determine os valores regulares de E e estude quais curvas de nível de E são superfícies (curvas) diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$.

Além disso, explique a figura abaixo que traz um esboço (de parte) dos conjuntos de nível de E para diferentes valores de c.



Em unidades convenientes, a função E pode ser interpretada como a energia total associada a um pêndulo simples em $\mathbb{R}^2$. Diferentes valores de c correspondem a diferentes níveis de energia.

Exercício 16. Considere $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = xyz + x^3 + y^3 + z^3.$$

(i) Se $c \neq 0$, mostre que $M_c := f^{-1}(c)$ é uma superfície de classe C^∞ e dimensão dois em $\mathbb{R}^3$.

(ii) Prove que $N := f^{-1}(0) \setminus \{(0, 0, 0)\}$ é uma superfície de classe C^∞ e dimensão dois em $\mathbb{R}^3$.

(iii) Dado $(x_0, y_0, z_0) \in N$, encontre uma equação para o plano tangente $T_{(x_0,y_0,z_0)}N$.

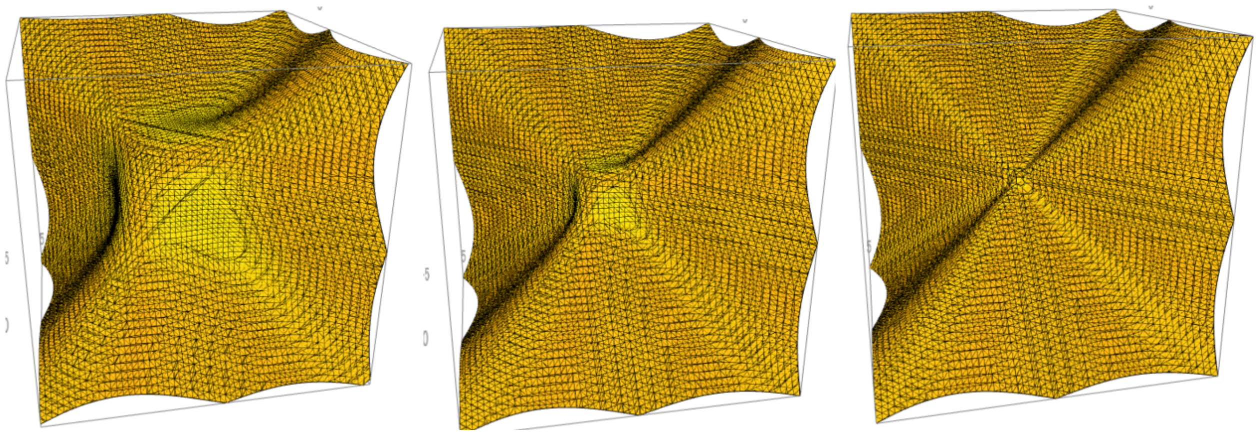


Figura 1: A parte das superfícies de nível $f^{-1}(10)$, $f^{-1}(1)$ e $f^{-1}(0.01)$, respectivamente, que está dentro do cubo $[-5, 5]^3 \subset \mathbb{R}^3$.

Exercício 17. Mostre que $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ é uma superfície orientável.

Exercício 18. Mostre que a faixa de Möbius é uma superfície que não é orientável.

Exercício 19. Mostre que $M \times N$ é orientável se, e somente se, ambas M e N são orientáveis.

Exercício 20. Mostre que o fibrado tangente definido no Exercício 12 é uma superfície orientável, mesmo que M não o seja.

Exercício 21. Seja $f : M \longrightarrow N$ um difeomorfismo. Mostre que N orientável implica M orientável.

Exercício 22. Seja M uma superfície C^k. Sejam $\phi : U \longrightarrow \phi(U)$ e $\phi : V \longrightarrow \psi(V)$ parametrizações classe C^k tais que

- $\phi(U)$ e $\psi(V)$ são vizinhanças parametrizadas conexas;
- $W := \phi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$;
- $\det J(\psi^{-1} \circ \phi)$ muda de sinal em $\phi^{-1}(W)$. note que esta condição só pode ocorrer quando $\phi(U) \cap \psi(V)$ não é conexo.

Prove que M não é orientável.

A partir daqui, exercícios sobre multiplicadores de Lagrange. Não serão cobrados na Prova 1.

Exercício 23. Utilizar multiplicadores de Lagrange para obter uma prova da desigualdade entre as médias geométrica e aritmética: se $x_i > 0$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, então

$$\left(x_1 x_2 \cdots x_n\right)^{1/n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Exercício 24. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y$, a função $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = y^3 - x^2$ e $M = g^{-1}(0)$. Faça um esboço de M e mostre que:

- $(0, 0) \in M$ e $f(0, 0) = 0$;
- $f(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \in M$ com $(x, y) \neq (0, 0)$;
- não se tem $\nabla f(0, 0) = \lambda \nabla g(0, 0)$.

Por que isto não contradiz o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange?

Exercício 25. Encontre o ponto mais próximo da origem na reta de interseção dos planos

$$2x + 3y + z = 6 \quad \text{e} \quad x + 2y + 2z = 4.$$

A resposta é $\left(\frac{12}{13}, \frac{17}{13}, \frac{3}{13}\right)$.

Exercício 26. Suponhamos que

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = 1$$

seja a equação de um elipsóide. Seja ℓ o maior dos semi-eixos do elipsóide. Mostre que ℓ é a maior raiz da equação

$$\det \begin{bmatrix} a - \frac{1}{\ell^2} & d & e \\ d & b - \frac{1}{\ell^2} & f \\ e & f & c - \frac{1}{\ell^2} \end{bmatrix} = 0\,.$$

Dica: Maximize a distância de pontos do elipsóide até a origem. É mais fácil trabalhar com o quadrado da distância.

Exercício 27. Resolva os itens abaixo.

(i) Dados $a, b, c > 0$, encontre o máximo da função

$$f(x, y, z) = x^a y^b z^c$$

no compacto

$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1 \text{ com } x, y, z \geq 0\right\}.$$

Mostre que

$$x^a y^b z^c \leq \frac{a^a\, b^b\, c^c}{(a + b + c)^{a+b+c}}\,, \qquad \forall\, (x, y, z) \in K\,.$$

(ii) Use o item anterior para mostrar que

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a \left(\frac{v}{b}\right)^b \left(\frac{w}{c}\right)^c \leq \left(\frac{u + v + w}{a + b + c}\right)^{a+b+c}, \qquad \forall\, u, v, w \geq 0\,.$$

Exercício 28. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$, positiva e tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Se $[a, b]$ é um intervalo com menor comprimento possível tal que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2},$$

mostre que $f(a) = f(b)$.

<u>*Dica:*</u> Escreva a restrição em termos da função $F(x, y) := \displaystyle\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercício 29. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua. Desejamos encontrar números reais A, B e C que minimizem a integral

$$\int_0^1 \Big(f(x) - (Ax^2 + Bx + C)\Big)^2\,\mathrm{d}x.$$

Mostre que tais números existem e são soluções do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{A}{5} + \dfrac{B}{4} + \dfrac{C}{3} = 2\displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\[2ex] \dfrac{A}{4} + \dfrac{B}{3} + \dfrac{C}{2} = 2\displaystyle\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x \\[2ex] \dfrac{A}{3} + \dfrac{B}{2} + C = 2\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

Exercício 30. Nas condições do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, definimos a função de Lagrange por

$$L(x, \lambda) := f(x) - \lambda^T\big(g(x) - c\big).$$

Mostre que (x_0, λ_0) é ponto crítico de L se, e somente se, x_0 é ponto crítico da restrição de f ao conjunto $g(x) = c$.

Mostre também que, se x_0 é um mínimo local para o problema com restrição e λ_0 é o multiplicador de Lagrange associado, então, para todo $v \in \ker g'(x_0)$, temos

$$\langle \nabla_x^2 L(x_0, \lambda_0)v, v\rangle \geq 0.$$