TRANSFORMADA de LAPLACE

em

nove aulas

Prof^{a}. Irene Strauch
Departamento de Matemática Pura e Aplicada.
Instituto de Matemática
UFRGS.

Apresentação :

O texto intitulado Transformada de Laplace em Nove Aulas foi idealizado durante o período em que ministrei a disciplina de Matemática Aplicada II. O objetivo principal é apresentar a Transformada de Laplace como um método operacional de solução de problemas de valor inicial. Este método torna-se particularmente muito conveniente na solução de problemas clássicos da Física e das Engenharias onde a força-motriz aplicada ao sistema (mecânico ou elétrico) é do tipo chave liga-desliga.

A construção do método é feita partindo da definição matemática de Transformada de Laplace, passando pela construção simultânea de duas tabelas, uma tabela de Transformadas de Laplace e uma tabela de propriedades das Transformadas de Laplace. Para cada propriedade demonstrada, apresentamos os exemplos pertinentes, contemplando aplicações à Mecânica e a Circuitos Elétricos.

Limitamos a definição de Transformada de Laplace a variáveis reais, uma vez que o público-alvo não possui os pré-requisitos de Cálculo de Variáveis Complexas. Esta Transformada de Laplace é a chamada Transformada de Laplace Unilateral, válida apenas para problemas causais. Neste sentido, estamos em sintonia com os vários textos de Matemática Aplicada citados nas nossas referências bibliográficas.

Por outro lado, a notação adotada neste texto é a notação predominante dos textos deste nível. Nas disciplinas mais específicas, especialmente dos cursos de Engenharia, a notação vai se alterando, tornando-se mais operacional. Cabe ao aluno mais avançado no seu curso, transitar com desenvoltura entre as várias notações.

Finalmente, agradeço a todos os alunos que ao longo dos vários semestres têm contribuído com suas sugestões para tornar este texto mais didático e o mais completo possível dentro de sua proposta.

Agradeço, também, ao professor Ricardo Fajardo, os valiosos comentários que enriqueceram nossas aulas e este texto.

Porto Alegre, 27 de março de 2006.

Irene Strauch

Referências bibliográficas :

- de Matemática Aplicada

Kryszig,E. Advanced Engineering Mathematics. John Wiley&Sons,1998.

Stroud,K.A. Advanced Engineering Mathematics, Palgrave,2003.

Butkov,E. Mathematical Physics. Addison-Wesley Publishing Company,1968.

Spiegel,M. Transformada de Laplace. Coleção Schaum ,1968.

LePage,W.R. Complex Variables and Laplace Transform for Engineers. Dover Publications, Inc.,1961.

- de Engenharia

Ambardar, Ashok .Analog and Digital Signal Processing. Brooks/Cole Publishing Company,1999.

Nielson, J.W.,Riedel, S.A. Circuitos Elétricos .LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora S.A ., 1999.

Solimon,S.S.,Srinath,M.D. Continuous and Discrete Dignals and Systems. Prentice Hall,1998.

Área II: 1ª aula.

A TRANSFORMADA DE LAPLACE: um método operacional de solução de problemas de valor inicial.

Nesta área, nossa ênfase será o estudo da Transformada de Laplace como um método operacional de solução de equações diferenciais, dadas as condições iniciais. Esta técnica foi desenvolvida por um físico inglês chamado Oliver de Heaviside que nasceu um século após Laplace.

Heaviside foi um pesquisador da área de Engenharia Elétrica , autor dos famosos Electrical Papers, onde desenvolveu uma técnica que ficou conhecida como Cálculo Operacional para estudar as correntes transientes em circuitos elétricos. Foi, ele também o descobridor da ionosfera, a camada da atmosfera que reflete as ondas de rádio.

Para entender a idéia por trás do Cálculo Operacional introduzido por Heaviside é interessante citar uma frase de sua autoria:

"*A Matemática é uma ciência experimental. As respostas* podem *sempre ser testadas, então não importa* (o método matemático) *como são obtidas*".

<u>A idéia básica do Cálculo Operacional :</u>

No Cálculo I o conceito de derivada é apresentado como o processo de limite de uma taxa de variação .

No Cálculo Operacional, a derivação é definida como um operação, representada por $\frac{d}{dx}$ que deve ser efetuada sobre uma função f(x).

O resultado é uma nova função $f'(x)$, chamada *transformada* de $f(x)$. Assim, é usual, neste contexto representar o operador $\frac{d}{dx}$ por um D . Este operador fica sujeito às mesmas regras que $\frac{d}{dx}$. Assim, por exemplo :

$$Dx^n = nx^{n-1}$$

Na Análise Vetorial o operador del foi introduzido como uma derivada vetorial generalizada dando origem aos entes matemáticos gradiente , divergente e rotacional. O análogo da regra de derivada de potência está contido na regra válida para o gradiente $\nabla r^n = nr^{n-1}\,\hat{r}$.

Com esta maneira de tratar o Cálculo não se faz menção a limites nem a infinitesimais, e o cálculo de derivadas e integrais fica restrito a procedimentos ditos operacionais.

Heaviside chegou a sugerir que o operador D poderia, sob certos aspectos, ser tratado como um número comum. Vejamos, como isto ocorre na prática.

Vamos então, considerar uma equação diferencial bem simples:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y(x) = x^2 \qquad \text{ou}$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 3\frac{d}{dx} + 2\right)y(x) = x^2$$

A qual, na notação do Cálculo Operacional, fica

$$(D^2 - 3D + 2)y(x) = x^2$$

Iniciaremos, agora uma série de procedimentos algébricos.

1°) Fatora-se o termo entre parênteses, isto é :

$$(D - 2)(D - 1)y(x) = x^2$$

2°) Isola-se y(x), dividindo ambos os lados da equação por $(D-2)(D-1)$, isto é:

$$y(x) = \frac{1}{(D-2)(D-1)}\, x^2$$

3°) Separa-se em frações parciais, isto é :

$$y(x) = \frac{1}{(D-2)}\, x^2 - \frac{1}{(D-1)}\, x^2$$

4°) Representa-se os termos $\frac{1}{(D-2)}$ e $\frac{1}{(D-1)}$ por séries geométricas.

Recordando Cálculo II: Uma série geométrica é:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}\,, \qquad \text{se } |x| < 1\ .$$

Assim:

$$\frac{1}{(D-2)} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-D/2} = -\frac{1}{2}\left(1 + D/2 + (D/2)^2 + (D/2)^3 + \ldots\right)$$

$$\frac{1}{(D-1)} = -\left(1 + D + D^2 + D^3 + \ldots\right)$$

Aplicando estas séries em x^2 e usando a regra $Dx^n = nx^{n-1}$, temos:

$$\frac{1}{(D-2)}\, x^2 = -\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{2x}{2} + \frac{2}{4} \right)$$

$$\frac{1}{(D-1)}\, x^2 = -\left(x^2 + 2x + 2 \right)$$

Diminuindo um termo do outro, encontramos finalmente a solução da ED, isto é

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\,,$$

a qual pode ser testada por substituição na ED dada.

Pois bem, esta é uma rápida visão do espírito do Cálculo Operacional aplicado a uma equação diferencial ordinária a coeficientes constantes. Neste exemplo, foram usados procedimentos meramente algébricos, transformando um problema do cálculo diferencial em um problema algébrico. Este método não faria sentido dentro da teoria formal do Cálculo. Contudo reproduz o mesmo resultado. É portanto, um método operacional.(É a Matemática Experimental de Heaviside).

Aplicando esta idéia à Transformada de Laplace, esta passa a ser uma método de reduzir uma equação diferencial e suas condições iniciais a uma equação algébrica.

Na Transformada de Laplace, este processo consiste de três etapas fundamentais :

1ª) Transforma-se um problema de valor inicial em uma equação algébrica, chamada de equação *subsidiária*.

2ª) Resolve-se a equação subsidiária por procedimentos algébricos.

3ª) A solução da equação subsidiária é transformada de volta afim de obter a solução do problema. Esta última etapa é feita com a ajuda de TABELAS, que nada mais são que tabelas de integrais, conforme veremos mais adiante.

<u>Definição de Transformada de Laplace :</u>

Seja f(t) uma função definida para $t \geq 0$. Multiplica-se f(t) por e^{-st} , sendo $s>0$, e integra-se com relação a t de 0 a ∞ .
Se esta integral existir, então ela será uma função de s, isto

$$\boxed{F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt}$$

A função F(s) é chamada de Transformada de Laplace, ou integral de Laplace .

Notação :

É usual a seguinte notação : $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, onde f(t) é a função original e $\mathcal{L}$ é o operador Transformada de Laplace.

A operação inversa que recupera a função original f(t) é chamada de Transformada Inversa ou simplesmente Inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\{f(t)\} \equiv f(t)$$

Adotaremos a convenção de usar letras minúsculas para as funções originais f(t), g(t), h(t), y(t), x(t), etc; e letras maiúsculas para as respectivas funções transformadas F(s), G(s), H(s), Y(s), X(s), etc.

Esta é a convenção adotada nas edições mais modernas, contudo há livros mais antigos que adotam notações diferentes.

Comentários :

No nosso estudo de Transformada de Laplace assumiremos que a variável s é real. Contudo em aplicações mais avançadas s poderá assumir valores complexos. Neste caso, a restrição s>0 da definição de Transformada de Laplace, fica Re{s}> 0. Também , em certas aplicações, é definida a Tansformada de Laplace Bilateral, quando então a integral em t, vai de $-\infty$ a $+\infty$.

Assim, tanto a Transformada de Laplace Bilateral como a Unilateral são integrais impróprias e em vista disso precisamos atentar para os processos de limite que decorrem da integração . Felizmente, como veremos, são poucos os casos em que, efetivamente precisaremos calcular a integral para encontrar uma determinada transformada.

Da mesma forma , outro aspecto, que num estudo mais rigoroso, deveria ser considerado, é a condição de existência desta integral imprópria. É de se esperar que existam funções para as quais a Integral de Laplace diverge para s>0 ; em outras palavras, estas funções não possuem Transformadas de Laplace. É o caso da função e^{t^2}.

Esta função cresce mais rapidamente que uma função e^{kt} .

Felizmente, na maior parte dos problemas práticos, estaremos tratando de funções para as quais existe a Transformada de Laplace. Por outro lado, não há nenhuma restrição matemática com relação às funções contínuas por partes, ou seja podemos calcular Transformadas de funções contínuas por partes . Esta é a grande vantagem do método, pois, as entradas de forças elétricas ou mecânicas em sistemas físicos ocorrem, na prática, de forma descontínua.

Tabela de Transformadas de Laplace :

Apresentamos, a seguir, a Tabela que usaremos no nosso curso . Para usá-la de forma eficiente é necessário que entendamos como está organizada e como cada uma das fórmulas que ai aparece é obtida. Na coluna da esquerda estão as funções transformadas e na da direita as funções originais. Observar que a tabela será usada nos dois sentidos. Da esquerda para a direita para achar a função original conhecida a sua Transformada, e da direita para a esquerda para achar a Transformada conhecida a função original .

Dedução de algumas transformadas usando a definição:

Iniciaremos o estudo da Tabela deduzindo as fórmulas TAB(1),(2),(3) e (7) usando a definição de Transformada de Laplace. Como você observou nossa Tabela possui 43 fórmulas, mas não se assuste. Veremos que há propriedades gerais que nos permitirão justificar cerca de 80% das fórmulas desta Tabela.

Dedução TAB(1): $f(t) = 1 \quad , \; t \geq 0$

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s} \quad ,$$

onde se usou $\lim_{t\to\infty} e^{-st} = 0$ e $s>0$.

Dedução TAB(2): $f(t) = t \quad , \quad t \geq 0$

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty t\, e^{-st}\, dt = -\frac{e^{-st}t}{s}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{e^{-st}}{s} dt = \frac{1}{s^2}$$

Dedução TAB(3): Iniciamos com a função $f(t)=t^2$, $t \geq 0$

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \int_0^\infty t^2 e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} t^2 \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{e^{-st}}{s} 2t dt = \frac{2}{s}\mathcal{L}\{t\} = \frac{2}{s^3}$$

Continuando, calculamos a Transformada para $f(t) = t^3 \quad , \quad t \geq 0$

$$\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3}{s}\,\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{6}{s^4}$$

E finalmente, por indução matemática, obtemos a TAB(3):

$$\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{(n-1)!}{s^n}$$

Dedução TAB(7): $f(t) = e^{at} \quad , \quad t \geq 0 \quad , \; a = \text{constante}$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}$$

	Tabela de Transformada de Laplace	
	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^n}$, $(n=1,2,...)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
6	$\frac{1}{s^k}$, $(k>0)$	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\frac{1}{(s-a)^n}$, $(n=1,2,...)$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
10	$\frac{1}{(s-a)^k}$, $(k>0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{at}$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$, $(a\neq b)$	$\frac{1}{(a-b)}(e^{at}-e^{bt})$
12	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$, $(a\neq b)$	$\frac{1}{(a-b)}(ae^{at}-be^{bt})$
13	$\frac{1}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}sen\ \omega t$
14	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$
15	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a}senh\ at$
16	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh\ at$
17	$\frac{1}{(s-a)^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}e^{at}sen\ \omega t$
18	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}\cos\omega t$
19	$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\ \omega t)$
20	$\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^3}(\omega t-sen\ \omega t)$
21	$\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3}(sen\ \omega t-\omega t\cos\ \omega t)$
22	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{t}{2\omega}sen\ \omega t$

	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$
23	$\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega}(sen\ \omega t+\omega t\cos\ \omega t)$
24	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$, $(a^2\neq b^2)$	$\frac{1}{b^2-a^2}(\cos at-\cos bt)$
25	$\frac{1}{s^4+4a^4}$	$\frac{1}{4a^3}(sen\ at\cosh at-\cos at\ senh\ at)$
26	$\frac{s}{s^4+4a^4}$	$\frac{1}{2a^2}sen\ at\ senh\ at$
27	$\frac{1}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2a^3}(senh\ at-sen\ at)$
28	$\frac{s}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2a^2}(\cosh\ at-\cos at)$
29	$\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt}-e^{at})$
30	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}}I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
31	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$
33	$\frac{1}{(s^2-a^2)^k}$, $(k>0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}}I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\frac{1}{s}e^{\frac{-k}{s}}$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{\frac{-k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{kt}$
36	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}senh\ 2\sqrt{kt}$
37	$e^{-k\sqrt{s}}$, $(k>0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{\frac{-k^2}{4t}}$
38	$\frac{1}{s}\ln s$	$-\ln t-\gamma$, $(\gamma\approx 0{,}5772)$
39	$\ln\frac{s-a}{s-b}$	$\frac{1}{t}(e^{bt}-e^{at})$
40	$\ln\frac{s^2+\omega^2}{s^2}$ ordem zero	$\frac{2}{t}(1-\cos\omega t)$
41	$\ln\frac{s^2-a^2}{s^2}$	$\frac{2}{t}(1-\cosh at)$
42	$arctg\left(\frac{\omega}{s}\right)$	$\frac{1}{t}sen\ \omega t$
43	$\frac{1}{s}arc\cot g\ s$	$Si(t)$

Funções especiais:

[a]Função Gama $\Gamma(k)=\int_0^\infty e^{-x}x^{k-1}dx$, $(k>0)$

[b]Função de Bessel modificada de ordem v:

$$I_v=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+v}}{2^{2m+v}m!\Gamma(m+v+1)}$$

[c]Função de Bessel de ordem zero :

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2(1!)^2}+\frac{x^4}{2^4(2!)^2}-\frac{x^6}{2^6(3!)^2}+\ldots$$

[d]Integral Seno :

$$Si(t)=\int_0^t\frac{sen\ x}{x}dx$$

A TRANSFORMADA DE LAPLACE: 2ª aula

A partir desta 2ª aula, iniciaremos o estudo das propriedades das Transformadas de Laplace. Estas irão facilitar em muito a dedução das fórmulas da Tabela de Transformadas de Laplace, apresentada na 1ª aula.

1ª) Propriedade da linearidade :

A transformada de Laplace é uma operação linear, isto é, se a e b são duas constantes, então

$$\boxed{\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a.\ \mathcal{L}\{f(t)\} + b\ \mathcal{L}\{g(t)\}}$$

Demonstração:

Parte-se da definição,

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\ [af(t) + bg(t)]\ dt =$$

$$= a\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + b\int_0^\infty e^{-st} g(t)dt = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

Com esta 1ª propriedade poderemos, sem usar a definição de T.L., demonstrar onze fórmulas , quais sejam :

TAB(11),(12),(13),(14),(15),(16),(19),(20),(24),(27)e (28).

Comecemos pelas TAB(11) e (12). Olhando a TABELA da direita para a esquerda, fazemos a seguinte leitura

TAB(11) $$\frac{1}{a-b}\ \mathcal{L}\{e^{at} - e^{bt}\} = \frac{1}{(s-a)(s-b)} \quad ,a \neq b$$

Ou $$\mathcal{L}\{e^{at} - e^{bt}\} = \frac{(a-b)}{(s-a)(s-b)}$$

Apliquemos a 1ª propriedade ao lado esquerdo da igualdade acima, ou seja a Transformada de uma soma é a soma das Transformadas. Cada uma das Transformadas é da forma TAB(7),já demonstrada a partir da definição de T.L. Assim, temos

$$\mathcal{L}\{e^{at} - e^{bt}\} = \mathcal{L}\{e^{at}\} - \mathcal{L}\{e^{bt}\} = \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} \equiv \frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$$

De maneira análoga, você demonstrará a TAB(12). A leitura desta fórmula na TABELA, também deverá ser feita da direita para a esquerda, preparando-a para usar a 1ª propriedade, ou seja

TAB(12) $\mathscr{L}\{a\ e^{at} - b\ e^{bt}\} = (a-b)\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$

As próximas a serem demonstradas são as TAB(13) e (14).

Como usar a linearidade na Transformada das funções seno e co-seno? Precisaremos recordar a famosa fórmula de Euler, que já deve ter sido apresentada no Cálculo II, no capítulo de séries de potências :

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{iwt} = \cos wt + i\,\mathrm{sen}\,wt \\ \\ e^{-iwt} = \cos wt - i\,\mathrm{se}\,wt \end{array}}$$

Estas fórmulas permitem escrever as funções seno e co-seno como

$\cos wt = \dfrac{1}{2}(e^{iwt} + e^{-iwt})$ e $\mathrm{sen}\,wt = \dfrac{1}{2i}(e^{iwt} - e^{-iwt})$

Demonstraremos a TAB(13) e vamos deixar a (14) como exercício para o aluno. Não se esqueça que estamos sempre fazendo a leitura das fórmulas da direita para a esquerda.

TAB(13) $\mathscr{L}\{\mathrm{sen}\,wt\} = \dfrac{w}{s^2 + w^2}$

$$\mathscr{L}\{\mathrm{sen}\,wt\} = \frac{1}{2i}\mathscr{L}\{e^{iwt} - e^{-iwt}\} = \frac{1}{2i}\mathscr{L}\{e^{iwt}\} - \frac{1}{2i}\mathscr{L}\{e^{-iwt}\} =$$

$$= \frac{1}{2i}\Big(\underbrace{\frac{1}{s - iw}}_{\substack{\Downarrow \\ \text{TAB(7)} \\ a=iw}} - \underbrace{\frac{1}{s + iw}}_{\substack{\Downarrow \\ \text{TAB(7)} \\ a=-iw}}\Big) = \frac{1}{2i}\,\frac{s + iw - (s - iw)}{s^2 + w^2} = \frac{w}{s^2 + w^2}$$

Analogamente, se demonstram as TAB(15) e (16), basta lembrar as definições das funções seno e co-seno hiperbólicos:

$$\boxed{\text{senhat} = \frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at}) \qquad \text{e} \qquad \text{coshat} = \frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at})}$$

TAB(!5) $\mathcal{L}\{\text{senhat}\} = \dfrac{a}{s^2 - a^2}$

$$\mathcal{L}\{\text{senhat}\} = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\{e^{at} - e^{-at}\} = \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+a} = \frac{1}{2}\frac{s+a-(s-a)}{s^2-a^2} =$$

$\Downarrow$ TAB(7) $\Downarrow$

$$= \frac{a}{s^2 - a^2}$$

A demonstração da TAB(19) será mais fácil ainda, pois já conhecemos as Transformadas das funções 1 e coswt.

Vejamos

TAB(19): $\mathcal{L}\{1\text{-coswt}\} = w^2\,\dfrac{1}{s\,(s^2 + w^2)}$

$$\mathcal{L}\{1 - \text{coswt}\} = \underbrace{\mathcal{L}\{1\}}_{\text{TAB(1)}} - \underbrace{\mathcal{L}\{\text{coswt}\}}_{\text{TAB(14)}} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + w^2} = \frac{s^2 + w^2 - s^2}{s\,(s^2 + w^2)} =$$

$$= w^2\,\frac{1}{s\,(s^2 + w^2)}$$

Nesta demonstração, usamos as TAB(1) e (14), ou seja é a própria TABELA fornecendo as fórmulas necessárias .

Olhemos agora a TAB(20).

TAB(20): $\dfrac{1}{w^3}\,\mathcal{L}\{\text{wt-senwt}\} = \dfrac{1}{s^2(s^2 + w^2)}$

Mais uma vez, usamos a linearidade e fórmulas já demonstradas. Neste caso, TAB(2) e (13), fornecem as Transformadas de t e senwt.

Deixaremos como exercício a demonstração das TAB(24),(27) e (28).

Vamos agora conhecer a 2ª mais importante propriedade.

Como nosso objetivo é usar a T.L na solução de equações diferenciais, precisamos desenvolver a regra para o cálculo de Transformadas de derivadas de todas as ordens.

2ª) Propriedade : Transformada da Derivada

Supondo f(t) contínua e f'(t) contínua por partes para $t \geq 0$ então

$$\boxed{\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)}$$

Demonstração : Vamos considerar inicialmente, o caso em que f'(t) é contínua para $t \geq 0$.

Parte-se da definição de T.L. e integra-se por partes,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_{u} \underbrace{f'(t)dt}_{dv} = [e^{-st} f(t)]\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Apenas o limite inferior do 1° termo à esquerda contribui, dando $-f(0)$, e o 2° termo recupera a T.L. da função f(t) multiplicada por s. Isto é:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \qquad \text{c.q.d.}$$

Se f'(t) for contínua por partes, então o intervalo de integração deve ser fracionado em partes tais que f'(t) seja contínua em cada parte.

Para obter a T.L. da derivada segunda aplica-se a regra da derivada primeira, ou seja

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) = s\,[s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)] - f'(0)$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - s\,f(0) - f'(0)}$$

Similarmente

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3\mathcal{L}\{f(t)\} - s^2 f(0) - s\,f'(0) - f''(0)$$

E por indução matemática se chega à uma expressão geral para a Transformada de ordem n,

$$\boxed{\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\,\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots\ldots - f^{(n-1)}(0)}$$

Observação: Esta fórmula supõe $f, f', f'' \ldots f^{(n-1)}$ funções contínuas e apenas $f^{(n)}(t)$ poderá ser contínua por partes.

Exemplo 1.

Usar o método da Transformada de Laplace para resolver o seguinte problema de valor inicial,

$y''(t) + y(t) = t$ e $y(0)=1$, $y'(0)= 1$

Vamos destacar as três etapas do método:

1ª) Transforma-se a ED ou, em outras palavras, aplica-se o operador $\mathcal{L}$ em toda a ED,

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{t\}$$

Aplicando a 2ª propriedade no 1º termo e consultando a TABELA para encontrar $\mathcal{L}\{t\}$,

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2}$$

Usando a notação $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ e considerando as condições iniciais dadas, temos

$$s^2Y(s) - s - 1 + Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

Esta é a *equação subsidiária*. Caracteriza-se por estar no domínio da variável s e por ser uma equação algébrica. (Compare com a ED tratada pelo método operacional, da 1ª aula) .

Se, a variável t for tempo, então s será uma variável recíproca, ou seja será frequência e com isso o expoente de e^{-st} será adimensional, como deveria ser.

Assim, a Transformação de Laplace transformou um problema definido no domínio do tempo em uma equação algébrica definida no domínio de frequência.

Vamos agora à 2ª etapa.

2ª) Resolve-se a equação subsidiária , por métodos algébricos, é lógico.

$$(s^2 + 1)Y(s) = \frac{1}{s^2} + s + 1$$ ou

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$$

3ª) Procede-se a Transformação Inversa, afim de recuperar a função original y(t), solução do nosso problema,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\}$$

É a hora de consultar a TABELA pela esquerda, procurando as funções de s e identificando as respectivas funções de t na direita.

Assim, devemos fazer a seguinte leitura da TABELA:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\} = (t - \text{sent}) \quad \Rightarrow \quad \text{TAB(20), com } w = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\} = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad \text{TAB(14), com } w = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} = \text{sent} \quad \Rightarrow \quad \text{Tab(13), com } w = 1$$

Finalmente, a solução procurada é

$$y(t) = t - \text{sent} + \text{cost} + \text{sent} = t + \text{cost}$$

Se você lembra como procedia para resolver um problema não homogêneo como este, há de concordar com pelo menos duas grandes vantagens do método da T.L. quando comparado com os demais, quais sejam

a) Não há necessidade de encontrar a solução geral da homogênea associada.

b) Não há necessidade de calcular as constantes arbitrárias.

A Função Transferência:

Nas aplicações, é usual definir na 2ª etapa do método a chamada *função transferência* . Vamos ver como ela aparece. Para tanto tomemos um problema genérico de valor inicial

$$y'' + ay' + by = r(t) \qquad y(0) = K_0 \qquad y'(0) = K_1 ,$$

onde

a, b, K_0 , K_1 são constantes. A função $r(t)$ é chamada de *entrada* do sistema (força motriz aplicada) e $y(t)$ é a *saída* (resposta)do sistema.

No domínio de freqüência s , temos a equação *subsidiária* :

$$(s^2 + as + b)Y(s) = (s + a)y(0) + y'(0) + R(s) ,$$ onde

$R(s) = \mathcal{L}\{r(t)\}$.

A *Função Transferência* é definida como

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}$$

Em termos desta função podemos escrever

$$Y(s)=[(s + a)y(0) + y'(0)]Q(s) + R(s)Q(s)$$

Se $y(0)=y'(0)=0$, então $Y(s) = R(s)Q(s)$ ou, $Q(s)$ é o quociente

$$Q(s)=\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\mathcal{L}\{saida\}}{\mathcal{L}\{entrada\}}$$

Esta última fórmula justifica o nome de *função transferência* para Q(s).

No Exemplo 1, *a função transferência* é

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Uso da 2ª propriedade para calcular T.L.

Exemplo 2 : Use a 2ª propriedade para calcular a Transformada de $f(t)= t\,\text{sen}wt$.

$$f'(t) = \text{sen}wt + wt\cos wt$$

$$f''(t) = w\cos wt + w\cos wt - w^2 t\,\text{sen}wt$$

Nesta última derivada voltou a aparecer a função $f(t)= t\,\text{sen}wt$. Isto nos sinaliza que poderemos aplicar a T.L. na f'' , ou seja

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = 2w\,\mathcal{L}\{\cos wt\} - w^2\,\mathcal{L}\{f(t)\}$$

Usando a 2ª propriedade no lado esquerdo desta expressão, e lembrando que $f'(0)= 0$ e $f(0)= 0$, obtemos

$$s^2\,\mathcal{L}\{f(t)\} = 2w\,\frac{s}{(s^2 + w^2)} - w^2\,\mathcal{L}\{f(t)\} \quad , \qquad \text{ou}$$

$$(s^2 + w^2)\,\mathcal{L}\{f(t)\} = 2w\,\frac{s}{(s^2 + w^2)} \qquad \text{ou}$$

$$\mathcal{L}\{t\,\text{sen}wt\} = 2w\,\frac{s}{(s^2 + w^2)^2}$$

Concluindo: acabamos de demonstrar a **TAB(22)**.

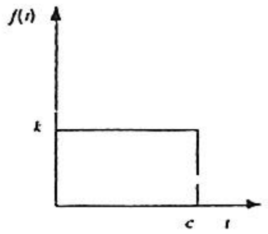
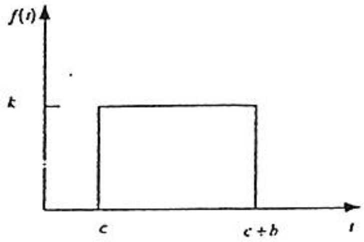
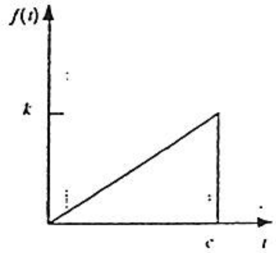
Use esta mesma técnica para calcular $\mathcal{L}\{t\cos wt\}$. Após, use o seu resultado para deduzir a **TAB(23)**.

Matemática Aplicada II–Área II

1ª Lista de Exercícios: Transformada de Laplace

Definição, Propriedade de Linearidade, Uso da Tabela

[1] Use a definição de Transformada de Laplace para encontrar a T. $\mathscr{L}$ das funções cujos gráficos são:

[a]  $R: \frac{k}{s}\left(1-e^{-cs}\right)$	[b]  $R: \frac{k}{s}\, e^{-sc}\left(1-e^{-sb}\right)$	[c]  $R: -\frac{k}{c}\left(\frac{c}{s}\, e^{-cs}+\frac{1}{s^2}\left(e^{-cs}-1\right)\right)$

[2] Use a propriedade de linearidade e a tabela para encontrar a T. $\mathscr{L}$ das seguintes funções (a, b, ω e θ são constantes):

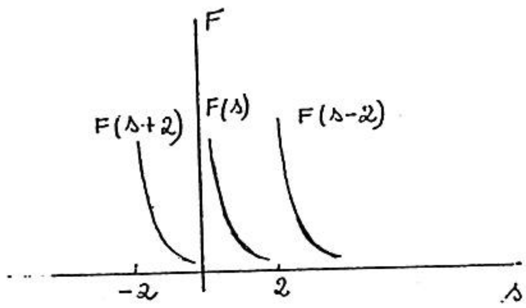
[a] $3t+4$ $R: \frac{3}{s^2}+\frac{4}{s}$	[b] t^2+at+b $R: \frac{2}{s^3}+\frac{a}{s^2}+\frac{b}{s}$	[c] $(a+bt)^2$ $R: \frac{a^2}{s}+\frac{2ab}{s^2}+\frac{2b^2}{s^3}$
[d] $\cos(\omega t+\theta)$ $R: \frac{s\cos\theta-\omega\,\text{sen}\,\theta}{s^2+\omega^2}$	[e] $(\text{senh}\, at)^2$, $\left(\text{senh}\, at=\frac{1}{2}\left(e^{at}-e^{-at}\right)\right)$ $R: \frac{1}{2}\left\{\frac{s}{s^2-4a^2}-\frac{1}{s}\right\}$	[f] $\cos^2 t$, $\left(\cos^2 t=\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right)$ $R: \frac{1}{2s}+\frac{s}{2s^2+8}$

[3] Dado $F(s)$ use a tabela para encontrar $f(t)$:

[a] $F(s)=\frac{5}{s+3}$ $R: 5e^{-3t}$	[b] $F(s)=\frac{1}{s^2+25}$ $R: \frac{1}{5}\,\text{sen}\, 5t$	[c] $F(s)=\frac{s}{s^2+2}$ $R: \cos\sqrt{2}\,t$
[d] $F(s)=\frac{6s}{s^2-16}$ $R: 6\cosh 4t$	[e] $F(s)=\frac{s-4}{s^2+4}$ $R: \cos 2t-2\,\text{sen}\, 2t$	[f] $F(s)=\frac{1}{s^4}$ $R: \frac{t^3}{6}$
[g] $F(s)=\frac{s+1}{s^2+1}$ $R: \cos t+\text{sen}\, t$	[h] $F(s)=\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{s^2}+\frac{a_3}{s^3}$ (a_1, a_2 e a_3 são constantes) $R: a_1+a_2 t+a_3\frac{t^2}{2}$	[i] $F(s)=\frac{\omega\cos\theta}{s^2+\omega^2}+\text{sen}\,\theta\,\frac{s}{s^2+\omega^2}$ (ω e θ são constantes) $R: \text{sen}\,(\omega t+\theta)$

A TRANSFORMADA DE LAPLACE : 3ª aula

Vamos dar seqüência ao estudo das propriedades da Transformada de Laplace, apresentando a 3ª propriedade. Esta propriedade é conhecida como *deslocamento no eixo s*. Por deslocamento no eixo s estamos querendo dizer, que estaremos substituindo a variável independente s, pela variável s-a ou pela variável s+a . No 1° caso, o gráfico da função F(s) sofre uma translação à direita e no 2° caso, uma translação à esquerda . A figura abaixo ilustra esta nomenclatura '*deslocamento*' à direita e à esquerda no eixo s.



3ª) Propriedade: Deslocamento no eixo s

Se F(s) é a Transformada de f(t), então F(s-a) será a Transformada de e^{at} f(t), isto é

$$\boxed{\mathcal{L}\{ e^{at} f(t)\} = F(s-a) \qquad , \; s>a}$$

ou, se tomarmos a Transformada Inversa de ambos os lados,

$$e^{at} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}$$

Demonstração:

Obtém-se F(s-a) substituindo s por s-a na definição de T.L., ou seja

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad \therefore \qquad F(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} [e^{at} f(t)]dt = \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} ,$$

com a condição s>a ,que garante a existência da nova T.L. Para demonstrar a Inversa é só aplicar o operador $\mathcal{L}^{-1}$ em ambos os lados da igualdade acima.

Comentários : Esta propriedade é muito importante na teoria de sinais elétricos. Vamos assumir que os sinais elétricos sejam representados por funções no domínio do tempo . Sabemos que a T.L. de uma função no domínio do tempo nos dá uma função no domínio da freqüência . Supondo que conheçamos a T.L. F(s) de um dado sinal f(t), e estamos diante de um analisador de freqüência e percebemos que o gráfico de F(s) na tela sofreu uma translação à direita .Poderemos concluir com base na 3ª propriedade que ela é a T.L. do sinal f(t) amplificado por e^{at} (a>0). Por outro lado, se F(s) aparece à esquerda, então concluímos que a função original está atenuada ou amortecida por e^{-at} (a>0).

Uso da 3ª propriedade para justificar fórmulas da TABELA:

Atentar para a coluna da direita da Tabela e identificar as funções f(t) que estão multiplicadas por e^{at} .

Você selecionará: TAB(7),(8),(9),(10),(17),(18),(25),(26).

Tomemos a TAB(7), que inclusive já demonstramos usando a definição de T.L. Temos agora uma outra maneira de demonstrá-la usando a 3ª propriedade, que basicamente consiste em substituir s por s-a na TAB(1).

De maneira análoga teremos :

TAB(8) $\Leftarrow$ TAB(2)	TAB(17) $\Leftarrow$ TAB(13)
TAB(9) $\Leftarrow$ TAB(3)	TAB(18) $\Leftarrow$ TAB(14)
TAB(10) $\Leftarrow$ TAB(6)	TAB(25) $\Leftarrow$ TAB(13)+TAB(14)
	TAB(26) $\Leftarrow$ TAB(13)

A leitura que você deve fazer das relações acima é que, por exemplo, a TAB(8) é obtida substituindo s por s-a na fórmula TAB(2). Da mesma forma as demais.

Assim já somam 25 fórmulas da TABELA que conseguimos demonstrar.

Vamos ver alguns exemplos de aplicação da 3ª propriedade.

Exemplo 3.

Encontre a T.L. de a) $f(t) = \text{senh}t \cos t$;

b) $f(t) = (1+t)^2 e^t$

c) $f(t) = e^{-4t} \cosh 5t$

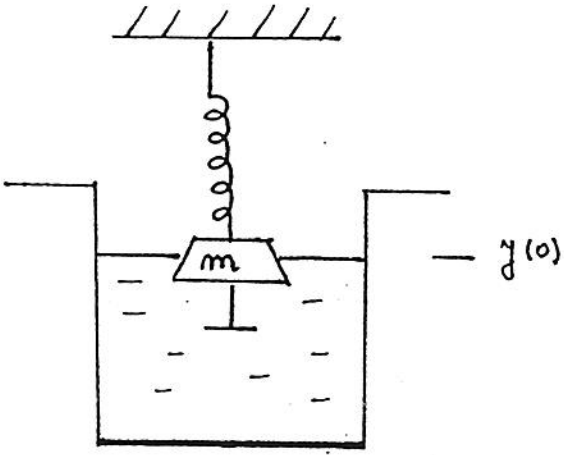
Encontre f(t) dado a) $F(s) = \dfrac{4}{s^2 - 2s - 3}$

b) $F(s) = \dfrac{s}{(s + \frac{1}{2})^2 + 1}$

c) $F(s) = \dfrac{1}{(s + 3)\,((s + 3)^2 + 9)}$

Exemplo 4: O Oscilador Harmônico Livre : caso amortecido.

Um corpo de massa m é ligado à extremidade inferior de uma mola elástica de constante k , cuja extremidade superior é fixa. Seja y(t) o deslocamento do corpo de sua posição de equilíbrio estático. Determinar as vibrações livres do corpo, partindo da posição inicial y(0) com velocidade inicial y′(0), supondo que existe um amortecimento β, conforme esquema abaixo .



Um OHS *livre* significa que não há forças externas atuando no sistema. A equação do movimento é obtida da 2ª lei de Newton

$$\sum_i \bar{F}_i = m\bar{a} \quad ,$$

ou seja a soma vetorial das forças que atuam na massa m deve ser igual ao produto da massa pela aceleração $\bar{a}$ do sistema. Neste caso, temos um sistema físico sujeito à Lei de Hooke, isto é

$$\bar{F}_k = -ky(t)\,\bar{j}$$

e mais a força de atrito $\bar{f}_a$, que se opõe ao movimento, diretamente proporcional a velocidade y′(t), com uma constante de amortecimento β

$$\bar{f}_a = -\beta y'(t)\,\bar{j}$$

Reunindo estas forças, temos :

$$-ky(t) - \beta y'(t) = m\, y''(t)$$

Re-arranjando os termos, obtemos a conhecida equação diferencial para o OHS livre de forças externas,

$$y''(t) + \frac{\beta}{m} y'(t) + \frac{k}{m} y(t) = 0.$$

Vamos resolver esta ED genérica usando o método da T.L. , ou seja aplicamos o operador $\mathcal{L}$ na equação,

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} + \frac{\beta}{m} \mathcal{L}\{y'(t)\} + \frac{k}{m} \mathcal{L}\{y(t)\} = 0$$

Usando a propriedade da Transformada da derivada e a notação $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ temos,

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + \frac{\beta}{m} [sY(s) - y(0)] + \frac{k}{m} Y(s) = 0$$

$$(s^2 + \frac{\beta}{m} s + \frac{k}{m}) Y(s) = sy(0) + y'(0) + \frac{\beta}{m} y(0)$$

Esta última é a equação *subsidiária* .

Vamos considerar $\beta^2 < 4mk$, conhecido como caso subamortecido. Para tanto tomam-se os valores $\beta = 4$, $m = 2$ e $k = 10$, sujeitos às condições iniciais dadas por $y(0) = 2$ e $y'(0) = -4$.

A equação subsidiária fica

$$(s^2 + 2s + 5) Y(s) = 2s - 4 + 4 \quad \text{ou} \quad Y(s) = 2 \frac{s}{s^2 + 2s + 5}$$

Para encontrar a solução $y(t)$, devemos proceder à Transformação Inversa : $y(t) = 2\, \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2 + 2s + 5}\}$.

A essas alturas já devemos ter suficiente familiaridade com a TABELA para reconhecer que o denominador $(s^2 + 2s + 5)$ precisa ser escrito na forma $(s+1)^2 + 4$ afim de ser identificado com os denominadores das TAB(17),(18). Nesta nova apresentação , vemos que estamos diante de um deslocamento, onde s foi substituído por s+1. Tal deslocamento deve também ocorrer no numerador. Sem alterar a função, somamos e subtraímos 1 no numerador e depois separamos em duas parcelas

$$y(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s + 1 - 1}{(s + 1)^2 + 4}\} = 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 4}\} - 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s + 1)^2 + 4}\}$$

Usando as TAB(18) e (17), com $a = -1$ e $w = 2$, respectivamente,

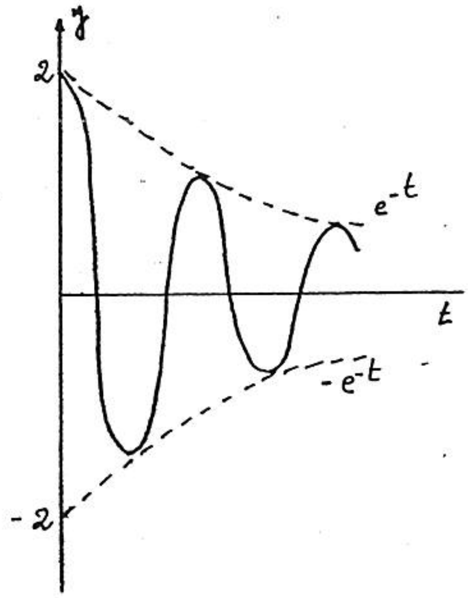
$$y(t) = 2[e^{-t}\cos 2t - e^{-t}\frac{\operatorname{sen}2t}{2}] \quad \text{ou}$$

$$y(t) = e^{-t}[2\cos 2t - \operatorname{sen}2t] = \sqrt{5}\, e^{-t}\cos(2t - 333{,}5°)$$

Esta última igualdade foi obtida usando a identidade:

$$\boxed{\begin{array}{l} A\cos wt + B\operatorname{sen} wt = C\cos(wt-\delta) \quad \text{onde} \\ C = \sqrt{A^2+B^2} \quad \text{e} \quad \delta = \arctan\frac{B}{A} \end{array}}$$

Esta identidade é muito útil, principalmente se quisermos fazer um esboço do gráfico da solução do nosso problema. Esta solução fornece as vibrações do OHS amortecido, cujo gráfico está esboçado abaixo.



A Função de Heaviside ou Função Degrau unitário

A função de Heaviside ou função degrau unitário é nula para t<a e assume o valor 1 para t>a. Em t=a a função não está definida e possui, neste ponto, uma descontinuidade por salto, chamada descontinuidade ordinária. Esta é, pois, uma função contínua por partes. Usando a notação do Cálculo, podemos expressá-la analítica e graficamente, respectivamente, como

$$u(t-a) = \begin{cases} 0\ , & t < a \\ 1\ , & t > a \end{cases} \qquad \text{ou}$$

No caso particular em que $a = 0$ temos: $u(t)=0$ para $t<0$ e $u(t)=1$ para $t>0$. A função de Heaviside, neste caso, é descontínua em $t=0$ e não estará definida em $t=0$.

A figura abaixo, mostra os gráficos da função de Heaviside para $a\neq 0$ e $a=0$, tal como apresentado nos livros de Matemática Aplicada e de Engenharia.

A observação que fazemos aqui , é que este gráfico não está construído com o rigor matemático do Cálculo I; os gráficos não deveriam incluir o ponto $t=a$ e $t=0$, respectivamente. Veremos, contudo, que a própria Matemática Aplicada fornece um procedimento que justifica a inclusão destes pontos no gráfico.

Tomemos o gráfico da função degrau unitário em $a=0$. Nas situações em que é necessário definir a transição 0^- a 0^+ , é usual supor que ela ocorre de forma linear; é a chamada aproximação linear da função de Heaviside. Esta aproximação linear, introduz a função rampa. Esta afirmação está ilustrada no gráfico a seguir.

Vamos, agora, usar a função degrau unitário para definir uma função muito utilizada nas aplicações, é a função pulso, que faz o papel de uma chave 'liga-desliga' (on-off), com amplitude unitária. Matematicamente, os pulsos são expressos em termos de funções de Heaviside por

$$f_p = u(t-a) - u(t-b) \quad , \quad a < b$$

Ou, na forma usada no Cálculo I para representar funções contínuas por partes

$$f_p=\begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & a < t < b \\ 0 & t > b \end{cases} \quad , \quad \text{cujo gráfico é}$$

Comentários: A função de Heaviside e a função pulso foram criadas para simular situações de laboratório, onde é preciso representar matematicamente funções que 'ligam' ou 'ligam-desligam' forças motrizes, as quais podem ser de natureza mecânica, elétrica, ou eletromagnética.

Assim, multiplicar uma função $f(t)$ por $u(t-a)$ significa que esta função será 'ligada' em $t=a$. Ilustramos abaixo com a função $f(t)=5\operatorname{sen}t$ ligada em $t=0$ e desligada em $t=2\pi$ no 1° gráfico e ligada em $t=\pi/4$ e desligada em $t=2\pi$, no 2° gráfico.

Ao expressar analiticamente estas funções, em vez de usarmos a notação do Cálculo, usaremos a função de Heaviside $u(t-a)$.

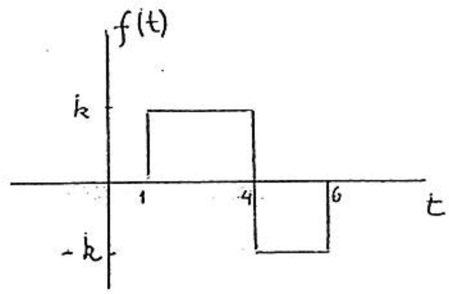
Assim, estas funções são, respectivamente:

$$f(t)=5\operatorname{sen}t\,[u(t)-u(t-2\pi)] \quad \text{e}$$

$$f(t)=5\operatorname{sen}t\,[u(t-\pi/4)-u(t-2\pi)]$$

Exemplo 5.

Use a função degrau unitário para representar a função do gráfico ao lado.



Exemplo 6.

Faça o gráfico da função

$$f(t) = 2[u(t)-u(t-\pi)] + \operatorname{sen}t\, u(t-2\pi)$$

MATEMÁTICA APLICADA II—ÁREA II: TRANSFORMADA DE LAPLACE

2ª Lista de Exercícios: Transformada da Derivada (2ª prop.), Solução de ED, Deslocamento no Eixo s (3ª prop.), Função Degrau Unitário (Função de Heaviside), Deslocamento no Eixo t (4ª prop.)

[1] Use a 2ª propriedade para demonstrar que $\mathscr{L}\{t\cos\omega t\} = \dfrac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$. A seguir, demonstre a fórmula 21 da Tabela.

[2] Use o método da T. $\mathscr{L}$ para resolver os seguintes problemas de valor inicial:

[a] $y''+2y'+y=e^{-t}$	$y(0)=-1,\ y'(0)=1$	R: $y(t)=e^{-t}\left(\frac{1}{2}t^2-1\right)$
[b] $y''+y=2\cos t$	$y(0)=3,\ y'(0)=4$	R: $y(t)=t\ \mathrm{sen}\ t+3\cos t+4\mathrm{sen}\ t$

[3] Use a propriedade de deslocamento no eixo s para encontrar as seguintes T. $\mathscr{L}$:

[a] $\mathscr{L}\{t^2e^{3t}\}$ R: $\dfrac{2}{(s-3)^3}$	[b] $\mathscr{L}\{e^{-2t}\mathrm{sen}\ 4t\}$ R: $\dfrac{4}{s^2+4s+20}$	[c] $\mathscr{L}\{e^{4t}\cosh 5t\}$ R: $\dfrac{s-4}{s^2-8s-9}$	[d] $\mathscr{L}\{e^{-2t}(3\cos 6t-5\mathrm{sen}\ 6t)\}$ R: $\dfrac{3s-24}{s^2+4s+40}$

[4] Encontre $f(t)$ dado $\mathscr{L}\{f(t)\}$:

[a] $\dfrac{n\pi}{(s+2)^2+n^2\pi^2}$ R: $e^{-2t}\mathrm{sen}(n\pi t)$	[b] $\dfrac{s}{(s+3)^2+1}$ R: $e^{-3t}(\cos t-3\mathrm{sen}\ t)$	[c] $\dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}$ R: $e^{2t}(6\cos 4t+2\mathrm{sen}4t)$	[d] $\dfrac{4s+12}{s^2+8s+16}$ R: $4e^{-4t}(1-t)$

[5] Representando as funções hiperbólicas em termos de funções exponenciais e usando a propriedade de deslocamento no eixo s, mostre que:

[a] $\mathscr{L}\{\cosh at\ \ \mathrm{sen}\ at\} = \dfrac{a(s^2+2a^2)}{s^4+4a^4}$

De maneira análoga se demonstra que:

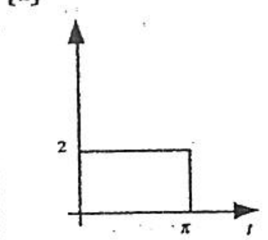
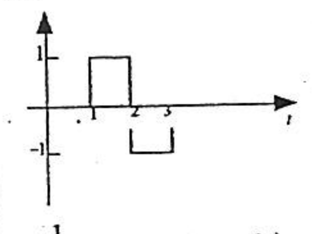
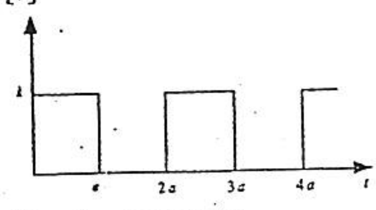
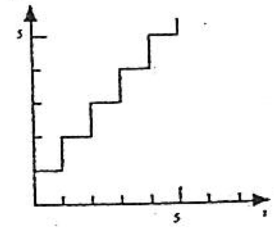
[b] $\mathscr{L}\{\mathrm{senh}\ at\ \ \cos at\} = \dfrac{a(s^2-2a^2)}{s^4+4a^4}$	[c] $\mathscr{L}\{\mathrm{senh}\ at\ \ \mathrm{sen}\ at\} = \dfrac{2a^2s}{s^4+4a^4}$

Pois bem, a partir das igualdades [a], [b], e [c], demonstre as fórmulas (25) e (26) da Tabela.

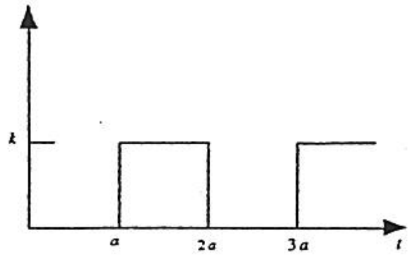
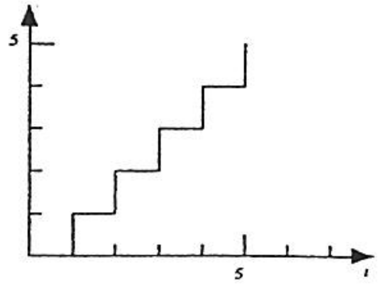
[6] Fazer o gráfico das funções:

[a] $u(t-1)+2\,u(t-3)-6\,u(t-4)$	[b] $(t-3)u(t-2)-(t-2)u(t-3)$	[c] $f(t-1)\ u(t-2)$, para $f(t)=2t$

[7] Represente as seguintes funções em termos da função degrau unitário e encontre suas T. $\mathscr{L}$:

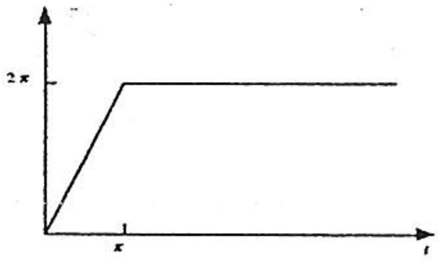
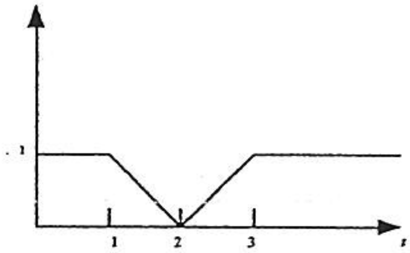
[a]  R: $\dfrac{2}{s}\left(1-e^{-\pi s}\right)$	[b]  R: $\dfrac{1}{s}\left(e^{-s}-2e^{-2s}+e^{-3s}\right)$	[c]  (Função periódica) R: $\dfrac{k}{s}\left(\dfrac{1}{1+e^{-as}}\right)$	[d]  "Stairs to the stars" R: $\dfrac{1}{s}\left(\dfrac{1}{1-e^{-s}}\right)$

[8] Use a propriedade do deslocamento no eixo t para encontrar a T. $\mathscr{L}$ de

[a]  $R: \dfrac{ke^{-as}}{s}\left(\dfrac{1}{1+e^{-as}}\right)$	[b]  $R: \dfrac{e^{-s}}{s}\left(\dfrac{1}{1-e^{-s}}\right)$

[Sugestão: Compare estes gráficos com os gráficos [c] e [d] do exercício [7].

[9] Use a 2^{a} propriedade (transformação da derivada) para calcular T. $\mathscr{L}$ das funções cujos gráficos são:

[a]  $R: \dfrac{2}{s^2}\left(1-e^{-\pi s}\right)$	[b]  $R: \dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s^2}\left(e^{-s}-2e^{-2s}+e^{-3s}\right)$

Observação: A idéia aqui é estabelecer a relação entre os gráficos acima e os gráficos [7-a] e [7-b], respectivamente.

[10] Encontre $g(t)$ e faça seu gráfico sendo $\mathscr{L}\{g(t)\}$ igual a:

[a] $\dfrac{2\left(e^{-2s}-e^{-4s}\right)}{s}$ $R: 2[u(t-2)-u(t-4)]$	[b] $\dfrac{e^{-as}}{s^2}$ $R: (t-a)\ u(t-a)$	[c] $\dfrac{se^{-\pi s}}{s^2+4}$ $R: \cos 2(t-\pi)\ u(t-\pi)$
[d] $\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+2}$ $R: e^{-(t-\pi)}\operatorname{sen}(t-\pi)\ u(t-\pi)$	[e] $\dfrac{e^{-s}+e^{-2s}-3e^{-3s}+6e^{-6s}}{s^2}$ $R:$ $(t-1)u(t-1)+(t-2)u(t-2)-3(t-3)u(t-3)+$ $6(t-6)u(t-6)$	

[11] Faça o gráfico das seguintes funções e encontre suas T. $\mathscr{L}$:

[a] $(t-\pi)\ u(t-\pi)$ $R: \dfrac{e^{-\pi s}}{s^2}$	[b] $t\,u(t-2)$ $R: e^{-2s}\left(\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{2}{s}\right)$	[c] sen t $u(t-\pi)$ $R: \dfrac{-e^{-\pi s}}{s^2+1}$

TRANSFORMADA DE LAPLACE: 4ª aula

Vimos pela propriedade do *deslocamento no eixo s* que se F(s) é a Transformada de f(t), então $e^{at}f(t)$ possui a Transformada F(s-a). Agora veremos propriedade do *deslocamento no eixo t*.

4ª) PROPRIEDADE: deslocamento no eixo t

Se F(s) é a Transformada de f(t), então f(t-a)u(t-a) possui a Transformada e^{-as} F(s). Isto é

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)}$$

Ou, tomando a Inversa em ambos os lados, podemos escrever

$$f(t-a)u(t-a) = \mathcal{L}^{-1}\{ e^{-as}F(s)\}.$$

Demonstração:
Parte-se da definição de T.L., ou seja

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_0^\infty f(t-a)u(t-a)e^{-st}\,dt = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}\,dt$$

Usamos, na 2ª igualdade, a definição de função de Heaviside. Faremos, agora, a conveniente substituição de variável $t-a=\tau$ ou $t=\tau+a$ e $dt = d\tau$, de tal forma que quando $t = a$, $\tau = 0$ e quando $t\to\infty$, $\tau\to\infty$.
Assim

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+a)}\,d\tau = e^{-as}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau$$

A última integral recupera a T.L. da função original f(t). Observar que a variável de integração de uma integral definida, como a acima, é uma variável 'muda', no sentido de que não faz diferença a letra usada (t ou τ), pois ela se esgota após a realização da integração. Assim, finalmente

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-as}F(s)\ , \quad \text{c.q.d.}$$

Transformada da função de Heaviside :

Um caso particular da 4ª propriedade é a T.L. da função de Heaviside u(t-a).

Toma-se f(t) = 1, na 4ª propriedade, isto é

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{1\} = e^{-as}\frac{1}{s} \quad , \text{ logo}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{u(t-a)\} = e^{-as}\frac{1}{s}}$$

No caso particular a = 0 , temos

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$$

Esta é a TAB(1), pois u(t) = 1 para t>0 e u(t) = 0 para t<0 é a função f(t) = 1 , t>0 . Em outras palavras, nossa TABELA começa com a função de Heaviside ou função degrau unitário.

Comentários :

Temos, portanto duas propriedades de *deslocamento*. O *deslocamento* no domínio de freqüência corresponde à multiplicação por uma exponencial no domínio do tempo e o deslocamento no domínio do tempo corresponde à multiplicação por uma exponencial no domínio de freqüência.

Com estas duas propriedades, alcançamos o estágio, onde a Transformada de Laplace , como método de solução de ED's é insubstituível , como veremos nas aplicações mais adiante.

Muitas funções definidas por partes poderão agora ter suas T.L. Observar que a TABELA não fornece Inversas da forma e^{-as} F(s). Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 7.

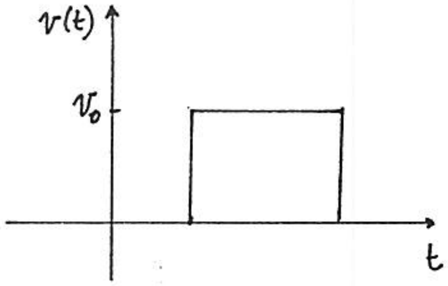
Para cada um dos ítens encontre a Inversa e faça seu gráficos:

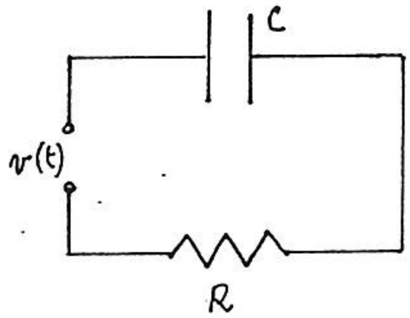
a) $G(s) = e^{-3s}\dfrac{1}{s^3}$ b) $G(s) = e^{-\pi s}\dfrac{s}{s^2+4}$

c) $G(s) = e^{-\pi s}\dfrac{1}{s^2+2s+1}$ d) $G(s) = e^{-s}\dfrac{1}{s^2} - 2e^{-2s}\dfrac{1}{s^2} + e^{-3s}\dfrac{1}{s^2}$

Exemplo 8. Resposta de um circuito RC a um pulso de amplitude V_0.

Encontre a corrente i(t) no circuito RC se uma tensão v(t) é aplicada. O circuito encontra-se em repouso antes da aplicação da tensão. O circuito e o gráfico da tensão são mostrados abaixo.





A resposta é a corrente DC, representada por i(t), que obedece à lei de Kirchoff dada por

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\, q(t) = v(t)$$

Lembrando que $q(t) = \int_0^t i(\tau)d\tau$ e expressando o pulso v(t) em termos das respectivas funções de Heaviside temos:

$$i(t) + \frac{1}{RC}\int_0^t i(\tau)d\tau = \frac{V_0}{R}[u(t-a) - u(t-b)]$$

Observar que esta não é uma equação diferencial, mas uma equação integral . Cabe perguntar : será que poderemos usar o método da Transformada de Laplace para resolvê-la ? A resposta é sim. Então faremos uma rápida pausa nesta aplicação para apresentar a 5ª propriedade: a Transformada da Integral.

5ª) PROPRIEDADE: a Transformada da Integral

Se f(t) é contínua por partes então

$$\boxed{\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s)}$$

Demonstração :

Seja $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \quad \therefore \quad g'(t) = f(t)$

Aplicando a T.L. nesta última igualdade e usando a propriedade da Transformada da Derivada temos,

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Como $g(0)=0$,então

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} \quad \text{ou}$$

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s) \quad \text{c.q.d.}$$

Voltando ao Exemplo 8 e usando a 5ª propriedade na equação integral do circuito RC temos

$$\mathcal{L}\{i(t)\} + \frac{1}{RC}\frac{1}{s}\mathcal{L}\{i(t)\} = \frac{V_0}{R}[\mathcal{L}\{u(t-a)\} - \mathcal{L}\{u(t-b)\}]$$

Usando a notação $\mathcal{L}\{i(t)\} = I(s)$ e a 4ª propriedade

$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = e^{-as}\frac{1}{s}$, chegamos à *subsidiária*

$$I(s) + \frac{1}{RC}\frac{1}{s}I(s) = \frac{V_0}{R}[e^{-as}\frac{1}{s} - e^{-bs}\frac{1}{s}]$$

Para mais facilmente isolar $I(s)$, vamos multiplicar ambos os lados desta igualdade por s e após reagrupamos os termos,

$$(s + \frac{1}{RC})\, I(s) = \frac{V_0}{R}[e^{-as} - e^{-bs}] \quad \text{ou}$$

$$I(s) = \frac{V_0}{R}[e^{-as}\frac{1}{s+\frac{1}{RC}} - e^{-bs}\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}]$$

Para encontrar a corrente $i(t)$, precisamos calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{-1}\{e^{-bs}\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\}$$

Estas Inversas estão na forma da 4ª propriedade, onde

$F(s) = \dfrac{1}{s+\dfrac{1}{RC}}$ e pela TAB(7) identificamos $f(t) = e^{-t/RC}$.

Assim $\qquad \mathcal{L}^{-1}\{ e^{-as} \dfrac{1}{s+\dfrac{1}{RC}} \} = f(t-a)u(t-a)$

e $\qquad \mathcal{L}^{-1}\{ e^{-bs} \dfrac{1}{s+\dfrac{1}{RC}} \} = f(t-b)u(t-b)$

Logo, a solução i(t) é

$$i(t) = \frac{V_0}{R}\,[e^{-(t-a)/RC}\,u(t-a) - e^{-(t-b)/RC}\,u(t-b)]$$

Esta fórmula sintetiza o comportamento da corrente nos três intervalos de t, quais sejam

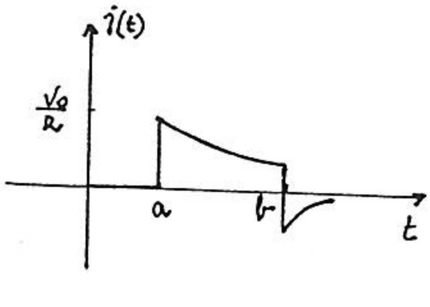
1°) $t<a$ $\qquad i(t)=0$

2°) $a<t<b$ $\qquad i(t) = K_1\, e^{-t/RC}$

3°) $t>b$ $\qquad i(t) = (K_1 - K_2)e^{-t/RC}$ $\qquad$ onde

$K_1 = \dfrac{V_0}{R}\, e^{a/RC}$ $\qquad$ e $\qquad$ $K_2 = \dfrac{V_0}{R}\, e^{b/RC}$

Como na escala do tempo b>a então $K_1 < K_2$ e a corrente neste intervalo é negativa . Esta é a chamada *corrente de descarga* .
O gráfico de i(t) é mostrado abaixo.



Vamos supor, agora, que em vez da corrente i(t), o Exemplo 8 peça para encontrar a carga q(t)), mantendo as demais condições do enunciado. A equação do circuito seria então uma equação diferencial, isto é

$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{RC}\,q(t) = \frac{V_0}{R}\,[u(t-a) - u(t-b)]$$

Aplicando a T.L. na equação e usando as propriedades 2 e 4, e a notação $Q(s)= \mathcal{L}\{q(t)\}$chegamos a

$$sQ(s)-q(0) + \frac{1}{RC}Q(s) = \frac{V_0}{R}\left[\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-bs}}{s}\right]$$

Lembrando que $q(0)=0$, temos

$$Q(s) = \frac{V_0}{R}\,\frac{1}{s(s+\frac{1}{RC})}\left[e^{-as} - e^{-bs}\right]$$

Usando a 4ª propriedade e a TAB(11), temos como solução

$$q(t)= V_0C[(1-e^{-(t-a)/RC})u(t-a)-(1-e^{-(t-b)/RC})u(t-b)]$$

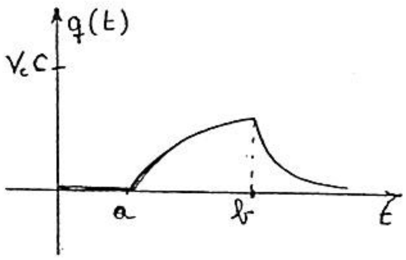
Esta única fórmula contém a solução nos três intervalos,

1°) $t<a$ $\quad q(t)=0$

2°) $a<t<b$ $\quad q(t)= V_0C\,[(1-e^{-(t-a)/RC})]$

3°) $t>b$ $\quad q(t)= V_0C\,[e^{-(t-b)/RC} - e^{-(t-a)/RC}]$

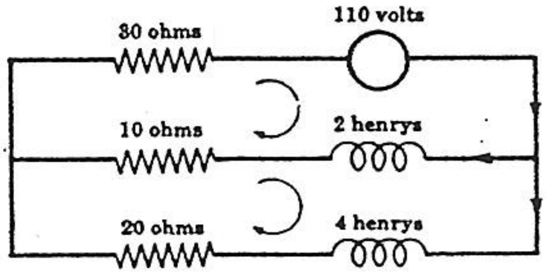
Como um exercício, mostre que a derivada $\frac{dq}{dt}$ em cada um dos intervalos, reproduz a corrente obtida anteriormente e que o gráfico da carga como função de t é dado por



Assim como o método da T.L. pode ser usado para resolver equações integrais e mesmo equações integro-diferenciais (como veremos mais adiante), também pode ser usado para resolver sistemas de equações . Ilustraremos esta possibilidade, resolvendo pelo método da T.L. o seguinte circuito constituído de duas malhas:

Exemplo 9. O Método da Tranformada de Laplace para resolver um sistema de equações diferenciais.

Encontre as correntes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ no circuito simples constituído de duas malhas, abaixo representado, sujeito a uma tensão $v(t)=110u(t)$, supondo $i_1(0)=0$ e $i_2(0)=0$.



Usando as leis de Kirchoff, a corrente total do circuito é $i(t)= i_1(t) + i_2(t)$ e a soma das quedas de tensão ao longo do circuito é dada, para cada malha do circuito por:

$$2\frac{di_1}{dt} + 10\, i_1(t) + 30\, i(t) = 110$$

$$4\frac{di_2}{dt} + 20\, i_2(t) - 10\, i_1(t) - 2\frac{di_1}{dt} = 0$$

Dividindo por 2, cada um dos termos destas equações e substituindo a corrente $i(t)$ por $i_1(t) + i_2(t)$, obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \dfrac{di_1}{dt} + 5i_1(t) + 15i_1 + 15i_2(t) = 55 \\ 2\dfrac{di_2}{dt} + 10i_2(t) - 5i_1 - \dfrac{di_1}{dt} = 0 \end{cases}$$

Aplicando a Transformada de Laplace e suas propriedades nas equações acima, lembrando que $i_1(0)=0$ e $i_2(0)=0$ e usando a notação $\mathcal{L}\{i_1(t)\} = I_1(s)$ e $\mathcal{L}\{i_2(t)\} = I_2(s)$, obtemos

$$\begin{cases} (s + 20)I_1(s) + 15I_2(s) = \dfrac{55}{s} \\ 2(s + 5)I_2(s) - (s + 5)I_1(s) = 0 \end{cases}$$

Pela 2ª equação $I_1(s) = 2I_2(s)$, que substituído na 1ª nos leva a

$$I_1(s) = \frac{1}{s(s + \frac{55}{2})} ,$$

cuja Inversa é dada pela TAB(11), com a=0 e b=-55/2 , ou seja

$$i_1(t)= 2(1 - e^{-\frac{55}{2}t}) \quad \text{e consequentemente}$$

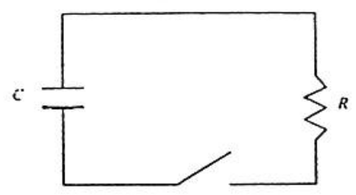
$$i_2(t)= (1 - e^{-\frac{55}{2}t}) \quad \text{e} \quad i(t) = 3(1 - e^{-\frac{55}{2}t})$$

MATEMÁTICA APLICADA II — ÁREA II: TRANSFORMADA DE LAPLACE

3ª Lista: Circuitos, Osciladores Harmônicos e Vigas, sujeitos a pulsos e impulsos

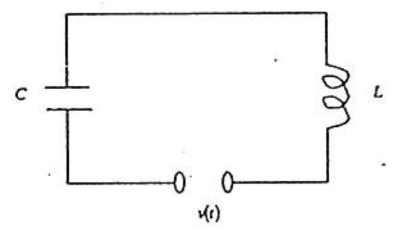
[1] Um capacitor de capacitância C é carregado até que seu potencial seja v_0. Em $t=0$, a chave do circuito ao lado é fachada e o capacitor começa a se descarregar através do resistor de resistência R. Use o método da T. $\mathscr{L}$ para encontrar a carga $q(t)$ no capacitor.

R: $q(t) = v_0\, C\, e^{-\frac{t}{RC}}$



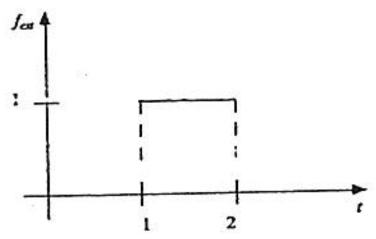
[2] Dado o circuito LC ao lado, encontre a corrente $i(t)$ e faça seu gráfico, assumindo $L=1$ *henry*, $C=1$ *farad*, corrente inicial nula, carga inicial no capacitor nula e $v(t) = u(t) - u(t-a)$.

R: $i(t) = \text{sen}\, t - \text{sen}(t-a)\; u(t-a)$



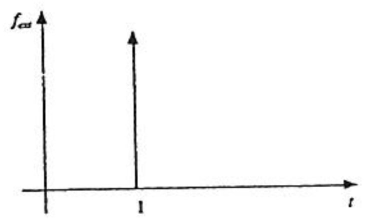
[3] Dada a equação do movimento de um oscilador harmônico simples: $-k\,y(t) - \beta\, y'(t) + f_{ext} = m\, y''(t)$
Calcule a resposta $y(t)$ deste oscilador sujeito a forças externas f_{ext} do tipo dado abaixo. Considere $m=1$, $k=2$, $\beta=3$, $y(0)=0$, e $y'(0)=0$.

[a]



R:
$$y(t) = \frac{1}{2}\left[1 - 2\, e^{-(t-1)} + e^{-2(t-1)}\right] u(t-1)$$
$$-\frac{1}{2}\left[1 - 2\, e^{-(t-2)} + e^{-2(t-2)}\right] u(t-2)$$

[b]



R: $y(t) = \left[e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)}\right] u(t-1)$

4) Considere um Oscilador Harmônico Simples(OHS) não amortecido, isto é $\beta=0$ na equação do OHS dado no exemplo 4 da 3ª aula. Suponha agora que este oscilador está sujeito a uma força externa dada por $F_{ext} = F_o \text{sen} \sqrt{k/m}\, t$. a) Use o método da Transformada de Laplace para calcular as oscilações forçadas y(t), sabendo que y(0)=0 e y'(0)=0 . b) Como se comporta o gráfico destas oscilações ? Que fenômeno físico você identifica

R: $y(t) = \frac{F_o}{2k}\left(\text{sen}\sqrt{k/m}\, t - \sqrt{k/m}\, t \cos\sqrt{k/m}\, t\right)$

TRANSFORMADA DE LAPLACE: 5ª aula

A Matemática e a Poesia : "Eterno é tudo aquilo que dura uma fração de segundo, mas com tamanha intensidade que se petrifica e nenhuma força jamais o resgata". Carlos Drummond de Andrade.

A função Delta de Dirac ou função impulso:

Em Física, chamam-se de forças impulsivas, forças muito intensas que atuam em curtíssimos intervalos de tempo e que ocorrem durante os processos de colisões. Sobre estas forças pouco se conhece, pois não há como medi-las. Esta situação é contornada com a definição, em Mecânica, da grandeza física Impulso. Sabemos que o Impulso é a integral no curto intervalo de tempo da força impulsiva e é igual à variação de momentum.

Fenômenos de natureza impulsiva ocorrem também em outras situações práticas, tais como uma viga sujeita à uma carga muito concentrada, ou em circuitos elétricos na presença de correntes e voltagens muito intensas. Daí a necessidade de representar matematicamente uma função que tenha essa característica impulsiva, ou seja, uma função dita altamente concentrada.

A função impulso procurada deve representar o processo de limite de uma certa função quando um parâmetro ε tende a zero.

É conveniente que este processo de limite seja tal que a função impulso apresente as seguintes características:

1°) A amplitude da função tende a infinito.

2°) A duração da função tende a zero.

3°) A área sob a curva que representa a função não depende de ε.

Existem muitos tipos de funções que atendem a esses requisitos.

Como acabamos de apresentar a função de Heaviside, vamos definir a função impulso a partir da seguinte função pulso:

$$f_\varepsilon(t-a) = \frac{1}{2\varepsilon}[\, u(t-(a-\varepsilon)) - u(t-(a+\varepsilon))\,]$$

Seu gráfico é mostrado ao lado.

A área deste retângulo é 1, ou

$$A = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f_\varepsilon(t-a)\,dt = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon}\,dt \equiv 1$$

Vemos que a área não depende do valor de ε, permanecendo constante mesmo se fizermos o limite $\varepsilon \to 0$.

Observamos também, que no limite $\varepsilon \to 0$ a função $f_\varepsilon(t-a)$ cresce indefinidamente, e com isso os dois outros requisitos são satisfeitos. Define-se, então a função impulso ou Delta de Dirac, $\delta(t-a)$, como,

$$\delta(t-a) = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(t-a).$$

Graficamente, a Delta de Dirac, poderá ser representada por um dos gráficos abaixo.

Na Física dá-se preferência à representação em forma de uma função 'distribuição' concentrada em torno do ponto t = a. Nas Engenharias é mais usado o gráfico em forma de seta, indicando seu crescimento infinito e sua concentração em t = a.

Nas aplicações, a delta de Dirac possui um significado físico e portanto devemos associar a ela uma grandeza física, digamos um potencial elétrico . Assim, é usual representar as grandezas impulsivas, atuando no instante t=a por $K\delta(t-a)$, onde K possui um significado físico.

Algo mais sobre a Delta de Dirac .

Vimos que, de uma forma simbólica, esta "função" poderá ser dada por

$$\delta(t-a) = \begin{cases} 0 & , t \neq a \\ \infty & , t = a \end{cases}$$

mas de tal maneira que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\,dt = 1$, isto é possui área unitária.

Outra identidade interessante, introduzida por Dirac(1902-1984), é a chamada <u>propriedade da filtragem</u>, válida para toda função contínua,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) f(t)\,dt = f(a)}$$

Esta integral pode ser "demonstrada" por meio do seguinte raciocínio: como $\delta(t-a)$ é nula para $t \neq a$, os limites de integração podem ser substituídos por $a-\varepsilon$ e $a+\varepsilon$. Além disso, como f(t) é contínua em t=a, seus valores no intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ não serão muito diferentes de f(a) e podemos dizer que, aproximadamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t)dt = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta(t-a)f(t)dt \approx f(a) \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta(t-a)dt \equiv f(a).$$

Analisando esta propriedade mais atentamente, observamos que ela atua como uma espécie de filtro, selecionando entre todos os valores possíveis de t, o valor no ponto t=a. Ou, interpretando graficamente o produto $f(t)\delta(t-a)$, vemos que este é o produto de uma função *genérica* por outra que é nula sempre, exceto em t=a. Logo, apenas neste ponto "sobreviverá" a função, isto é f(t=a).

Dentre as inúmeras aplicações desta propriedade, convém mencionar que ela é um dos possíveis recursos matemáticos para fazer a *amostragem* de um sinal analógico. Esta é uma das etapas para converter um sinal analógico, isto é, um sinal de variável contínua em um sinal de variável discreta. A *amostragem* poderá ser entendida, então como um processo de filtragem, só que no lugar de um único impulso devemos ter um trem de impulsos. Ilustramos no gráfico, abaixo a *amostragem* de um sinal analógico.

Ou, analiticamente,

Voltemos ao início, quando então introduzimos a função pulso $f_\varepsilon(t-a)$ e analisemos com mais atenção o seu limite $\varepsilon \to 0$, isto é

$$\delta(t-a) = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(t-a) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon}[u(t-(a-\varepsilon)) - u(t-(a+\varepsilon))] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon}[u((t-a)+\varepsilon)) - u((t-a)-\varepsilon) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta u(t-a)}{\Delta t} \equiv \frac{d}{dt}u(t-a)$$

Mais uma surpresa : a delta de Dirac é a derivada da função de Heaviside!

Como fica o Cálculo I, onde aprendemos que quando uma função apresenta uma descontinuidade como a apresentada pela função de Heaviside, a derivada da função não existe no ponto de descontinuidade ? O resultado acima está mostrando que o único ponto onde a derivada da função de Heaviside dá um valor diferente de zero é no ponto de descontinuidade. Podemos imaginar que do ponto de vista gráfico ,temos:

A Matemática Aplicada precisa contornar mais esta dificuldade. Voltemos à aproximação linear no ponto de descontinuidade, de tal forma que em torno de t=a tenhamos uma espécie de transição "microscópica" ao degrau unitário dada pela rampa $\frac{1}{2\varepsilon}(t-(a-\varepsilon))$, conforme o gráfico abaixo..

De tal forma que no limite $\varepsilon \to 0$ sua derivada vai a ∞ como

$$\frac{d}{dt}u(t-a) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} = \delta(t-a)$$

Ou seja, 'macroscopicamente', a derivada da função de Heaviside se comporta como a delta de Dirac.

Você viu quantas vezes usamos aspas no nosso texto. Esta foi a maneira de contornar uma certa falta de rigor matemático nas nossas demonstrações. Contudo, devemos olhar para a Delta de

Dirac, não como uma função no sentido do Cálculo, mas como um método de obter resultados que dependem de processos de limites. Este método, como o Cálculo Operacional, fornece resultados válidos desde que conheçamos e respeitemos suas limitações.

Em resumo, podemos trabalhar com a delta de Dirac como uma função que possui as seguintes características:

1ª) Área unitária - $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)dt = 1$

2ª) Derivada da função de Heaviside - $\delta(t-a) = \frac{d}{dt}u(t-a)$

3ª) Propriedade da filtragem - $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t)dt = f(a)$

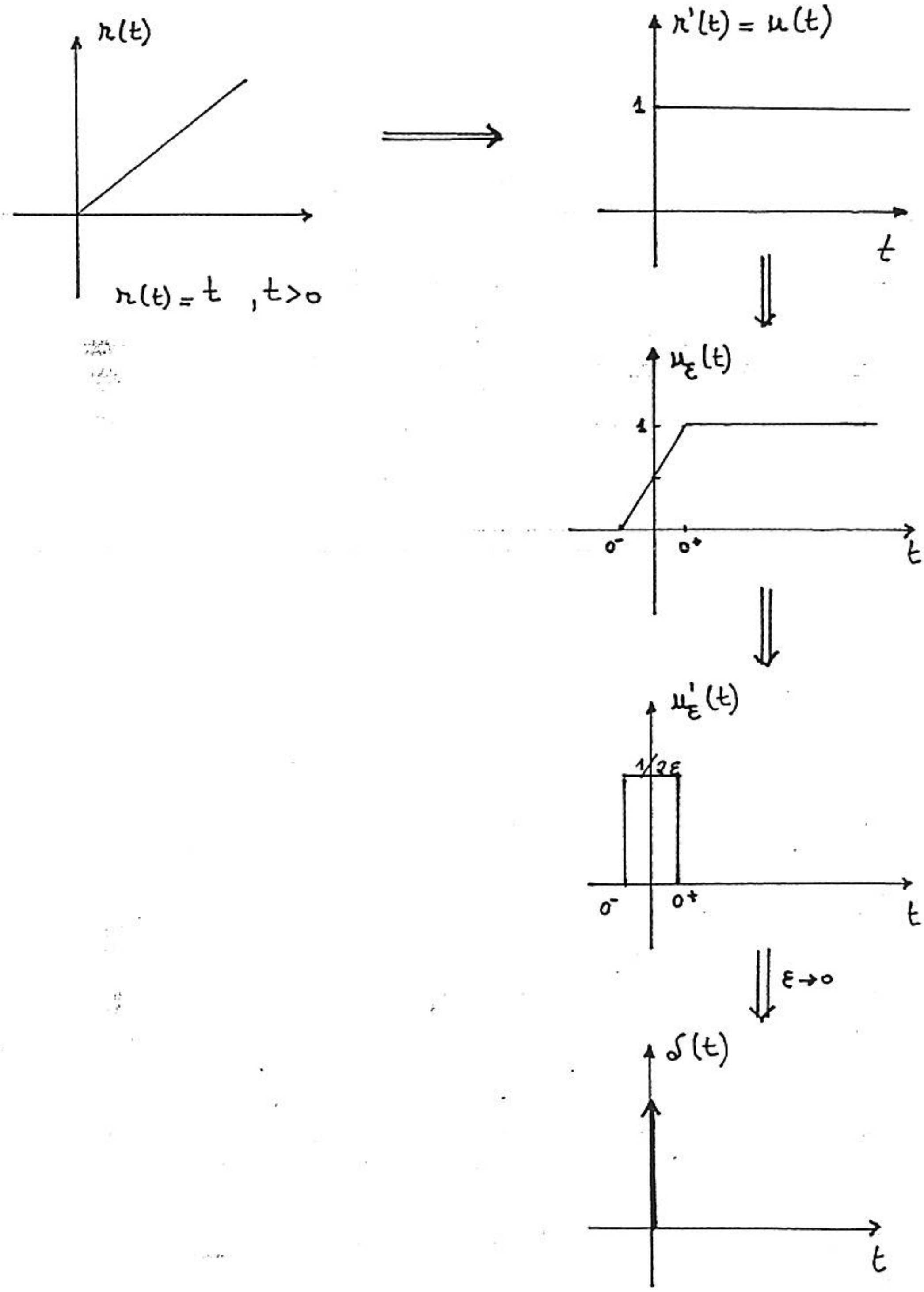
4ª) Representação simbólica - $\delta(t-a) = \begin{cases} 0 & , t \neq a \\ \infty & , t = a \end{cases}$

Sabemos que esta última afirmação não é matematicamente aceitável. Ela traduz uma abordagem fenomenológica. Veremos, mais adiante que a Análise de Fourier fornece, finalmente, uma representação formal e rigorosa para esta função.

As funções de Heaviside e delta de Dirac fazem parte de um elenco de funções que não são funções no *stricto sensu* do Cálculo Diferencial e Integral , por isso muitos autores as chamam de funções singulares.

Funções singulares são funções que apresentam descontinuidades por salto, também chamadas descontinuidades ordinárias, e são muito usadas nas aplicações.

Vamos mostrar como, a partir da função rampa, se obtém por "derivação gráfica" as demais funções singulares aqui apresentadas.



Funções : rampa, degrau, quase-degrau, pulso e impulso.

6ª) PROPRIEDADE : Transformada da Delta de Dirac .

Parte-se da definição de T.L. ,

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \int_0^{\infty} \delta(t-a)e^{-st}\,dt = e^{-as} \quad ,$$

onde a segunda igualdade foi obtida usando a propriedade de filtragem . Assim, temos

$$\boxed{\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}}$$

Exemplo 8. Voltemos ao circuito RC, sujeito a um pulso de amplitude V_o . A lei de Kirchoff para este circuito, como já vimos, é

$$i(t) + \frac{1}{RC}q(t) = \frac{V_0}{R}[u(t-a) - u(t-b)]$$

Vamos derivar com relação ao tempo ambos os lados desta equação, lembrando que $i(t) = \dfrac{dq}{dt}$,

$$i'(t) + \frac{1}{RC}i(t) = \frac{V}{R}[\delta(t-a) - \delta(t-b)]$$

onde as derivadas das funções de Heaviside foram substituídas pelas respectivas funções impulso.

Aplicando, agora a Transformada de Laplace, temos

$$sI(s) - i(0) + \frac{1}{RC}I(s) = \frac{V_0}{R}[\,e^{-as} - e^{-bs}\,] \qquad \text{ou}$$

$$(s + \frac{1}{RC})I(s) = \frac{V_0}{R}[\,e^{-as} - e^{-bs}\,] , \qquad \text{pois } i(0)=0.$$

Ou seja, chegamos ao mesmo resultado anterior, onde preferimos trabalhar com a equação integral .

Exemplo 10. No circuito RLC abaixo, em $t=0$, $q(0)=0$ e $i(0)=0$.

a)Use a Lei de Kirchoff

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}q(t) = v(t)$$

e o método da Transformada de Laplace para obter o resultado genérico

$$I(s)=\frac{1}{L}\,V(s)\,\frac{s}{(s+\frac{R}{2L})^2+\eta^2}\ ,\quad \text{onde } I(s)=\mathcal{L}\{i(t)\}\ ,$$

$$V(s)=\mathcal{L}\{v(t)\}\quad \text{e}\quad \eta^2=\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2\ .$$

b) Suponha agora que o circuito esteja sujeito a uma tensão impulsiva $v(t)=V_0\,\delta(t)$ e análise a solução i(t) nos três casos:

1°)Caso subamortecido ($\eta^2>0$): $L=1H,\ C=\frac{1}{2}F,\ R=2\Omega$.

2°)Caso superamortecido ($\eta^2<0$): $L=1H,\ C=2F,\ R=2\Omega$.

3°)Caso criticamente amortecido ($\eta^2=0$) :

$L=1H,\ C=1F,\ R=2\Omega$.

Exemplo 11. Considere uma viga engastada x=0 e x=L. Em $x=\frac{L}{3}$, uma carga concentrada $q(x)=P\delta(x-\frac{L}{3})$ age verticalmente para baixo, conforme a figura abaixo.

Calcule as deflexões y(x) da viga, considerando a equação da viga $\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{1}{EI}q(x)$ e as condições de contorno de uma viga engastada : $y(0)=y'(0)=0$, $y(L)=y'(L)=0$; e ainda supondo $y''(0)=C_1$ e $y'''(0)=C_2$ (C_1 e C_2 constantes).

(E:constante de Young, I: momento de inércia da viga.)

Exemplo 12. O metabolismo de uma medicação.

O estudo da resposta do corpo humano à uma certa medicação é importante para determinar a dose conveniente e o intervalo de tempo ideal entre as doses a fim de prover o tempo de máxima eficácia e reduzir os efeitos colaterais. Em sua forma mais simples de modelo para o metabolismo da droga, assume-se que a dose é liberada e entra na corrente sangüínea instantaneamente e a taxa na qual a droga é metabolizada é diretamente proporcional à sua concentração. A concentração da medicação c(t) como função do tempo é descrita, neste modelo, pela seguinte equação diferencial de 1ª ordem : $c'(t)+\frac{1}{\tau}c(t)=x(t)$

onde $x(t)$ descreve a entrada da medicação e τ é a chamada 'clearance rate', uma medida de quão rápido a medicação é metabolizada e eliminada da corrente sanguínea. Freqüentemente, é necessário doses repetidas. Se a concentração c_o é administrada instantaneamente a intervalos regulares de T, então a entrada $x(t)$ pode ser modelada como um trem de impulsos :

$$x(t)=c_o[\delta(t)+\delta(t-T)+\delta(t-2T)+...]$$

Calcule a resposta c(t) às repetidas doses.

TRANSFORMADA DE LAPLACE: 6ª aula

Na aula de hoje, vamos revisar os métodos que já dispomos para calcular tanto as Transformadas de Laplace como suas Inversas. Vejamos :

- Métodos para obtenção da Transformada de Laplace de uma função f(t), isto é $\mathcal{L}\{f(t)\}$:

1°) Pela definição de T.L., $\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$

2°) Direto de uma tabela de T.L.

3°) Em conjunto com uma tabela de propriedades das T.L.

- Métodos para obtenção das Transformadas Inversas de uma função F(s), isto é $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$:

1°) Direto de uma tabela de T.L.

2°) Em conjunto com uma tabela de propriedades.

3°) Utilização de procedimentos algébricos que levam às fórmulas tabeladas.

<u>Procedimentos algébricos :</u>

Já tivemos oportunidade de usar a fatoração e de *completar os quadrados* no denominador de funções racionais próprias da forma $F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}$, onde P(s) e Q(s) são funções polinomiais. Nosso objetivo sempre foi o de colocar a função na forma das funções tabeladas.
Para as funções racionais próprias, há ainda um outro método algébrico muito poderoso que é o Método de Separação em Frações Parciais, já conhecido do Cálculo I. Vamos revisar este método na aula de hoje, através da solução de vários exemplos.

Um último procedimento algébrico de grande utilidade será apresentado na 9ªaula: é o método de expansão por Séries de Potências.

Exemplo 11. Coloque as funções racionais abaixo, na forma de frações parciais, conforme o formato da Tabela de T.L. :

a) $F(s)=\dfrac{s^2-6s+4}{s^3-3s^2+2s}$

b) $F(s)=\dfrac{s^2+s-2}{(s+1)^3}$

c) $F(s)=\dfrac{s}{(s+1)^3}$

d) $F(s)=\dfrac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}$

e) $F(s)=\dfrac{3s^2-2s-1}{(s-3)(s^2+1)}$

f) $F(s)=\dfrac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}$

g) $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s-2)}$.

Esta última função pode ser lida como o produto de duas funções, isto é: $F(s)=\dfrac{1}{s^2}\dfrac{1}{(s-2)}=G(s)H(s)$, sendo $G(s)=\dfrac{1}{s^2}$ e $H(s)=\dfrac{1}{s-2}$.

Observe que cada uma das funções possui Inversa tabelada, ou seja, $g(t)=t$ e $h(t)=e^{2t}$. Se quisermos calcular a Inversa $f(t)$ a partir das funções $g(t)$ e $h(t)$, então poderemos usar o Teorema da Convolução .

<u>7ª)PROPRIEDADE: Teorema da Convolução.</u>

Se $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}=g(t)$ e $\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}=h(t)$ são funções conhecidas, então

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{G(s)H(s)\}=\int_0^t g(\tau)h(t-\tau)d\tau= g*h}$$

Notação: A forma $g*h$ é chamada de produto convolutivo ou convolução de g e h.

Este teorema não será demonstrado, contudo é interessante que se saiba que a convolução é comutativa, isto é $g*h= h*g$.

No contexto em que estamos apresentando o método da Transformada de Laplace, o teorema da convolução será uma alternativa para o cálculo de Inversas . Contudo, convém lembrar que precisaremos realizar integrações que em geral demandam longos e elaborados cálculos. Cabe ao aluno decidir sobre sua conveniência.(Ver Exemplo 12, abaixo)

Mas, o teorema da convolução tem outras importantes aplicações como na solução de certas equações integrais(Exemplos 13 e 14) e, em análise de circuitos, onde este teorema está relacionado com os conceitos de *memória e função peso.*

Exemplo 12. Tomemos o item f) do Exemplo 11 e calculemos a Inversa, usando o teorema da convolução. Assim, escreveremos F(s) como um produto, isto é $F(s)=G(s)H(s)$, onde $G(s)= \frac{1}{s^2}$ e $H(s)= \frac{1}{(s-2)}$, cujas Inversas são $g(t)= t$ (TAB(2)) e $h(t)= e^{2t}$ (TAB(7)).

Consequentemente

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)H(s)\}=\int_0^t \tau\, e^{2(t-\tau)}\, d\tau = e^{2t}\int_0^t \tau\, e^{-2\tau}\, d\tau$$

Integrando por partes, com $u = \tau$ e $dv = e^{-2\tau}d\tau$, temos

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)H(s)\}=$$

$$=e^{2t}\left[-\frac{\tau e^{-2\tau}}{2}\Big|_0^t + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-2\tau}d\tau\right] = e^{2t}\left[-\frac{te^{-2t}}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(e^{-2t}-1\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{2t}$$

Esta é a Inversa que já havíamos obtido pelo método de separação em frações parciais.

Só para ilustrar uma outra maneira de solução , tente usar a 5ª propriedade : $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$, identificando F(s) com $\frac{1}{s(s-2)}$.

Solução de certas equações integrais :

As equações integrais a que nos referimos são muito particulares . São equações em que as integrais estão na forma de produtos convolutivos. Apresentaremos, a seguir, dois exemplos destas equações e suas soluções pelo método da T.L.

Exemplo 13. Resolva a seguinte equação integral

$$y(t) = t + \int_0^t y(\tau)\,\mathrm{sen}(t-\tau)\,d\tau \quad .$$

Solução: $\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{t\} + \mathcal{L}\{y(t) * \mathrm{sen}(t)\}$

Usando a TAB(2), o teorema da convolução e a TAB(13), com w=1, temos

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + Y(s)\frac{1}{s^2+1} \quad , \quad \text{ou}$$

$$Y(s)\left[1 - \frac{1}{s^2+1}\right] = \frac{1}{s^2} \quad , \text{ ou ainda}$$

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}$$

Usando a TAB(3), chegamos à solução: $y(t) = t + \dfrac{t^3}{6}$

Exemplo 14. Resolver $y(t) = 2t - 4\int_0^t y(\tau)(t-\tau)\,d\tau$

Procedendo como no exemplo anterior, temos

$$\mathcal{L}\{y\} = 2\mathcal{L}\{t\} - 4\mathcal{L}\{y*t\} \quad \text{ou} \quad Y(s) = \frac{2}{s^2} - 4Y(s)\frac{1}{s^2}$$

Isolando Y(s), temos $Y(s) = \dfrac{2}{s^2+4}$

cuja Inversa é dada pela TAB(13),

$$y(t) = \mathrm{sen}2t \ .$$

4ª Lista: Transformada Inversa de Funções Racionais

Lembre-se que você poderá encontrar a transformada inversa de uma função racional diretamente na tabela ou terá que fazer antes alguns procedimentos algébricos simples (P. A.). Entre os procedimentos algébricos inclue-se a decomposição em frações parciais (F. P.). Você poderá ainda, em alguns poucos casos, optar pelo Teorema da Convolução (T. C.).

Calcule a transformada inversa de:

[1] $F(s)=\dfrac{3s+7}{s^2-2s-3}$	*R:* $4e^{3t}-e^{-t}$ (P. A.)
[2] $F(s)=\dfrac{1}{(s-2)^3}$	*R:* $\frac{1}{2}t^2e^{2t}$ (Tab.)
[3] $F(s)=\dfrac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}$	*R:* $2e^t-2\cos t+\operatorname{sen} t$ (F. P.)
[4] $F(s)=\dfrac{s+12}{s^2+4s}$	*R:* $3-2e^{-4t}$ (P. A.)
[5] $F(s)=\dfrac{s-3}{s^2-1}$	*R:* $\cosh t-3\operatorname{senh} t$ (P. A.)
[6] $F(s)=\dfrac{3s}{s^2+2s-8}$	*R:* $2e^{-4t}+e^{2t}$ (P. A.)
[7] $F(s)=\dfrac{3s^2-2s-1}{(s-3)(s^2+1)}$	*R:* $2e^{3t}+\cos t+\operatorname{sen} t$ (F. P.)
[8] $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2+4s+13}$	*R:* $e^{-2t}\left(\cos 3t-\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t\right)$ (P. A.)
[9] $F(s)=\dfrac{s^2+s-2}{(s+1)^3}$	*R:* $e^{-t}\left(1-t-t^2\right)$ (F. P.)
[10] $F(s)=\dfrac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}$	*R:* $2\cos 3t+\frac{10}{3}\operatorname{sen} 3t+\frac{8}{9}(1-\cos 3t)$ $+\frac{40}{27}(3t-\operatorname{sen} 3t)$ (P. A.)
[11] $F(s)=\dfrac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}$	*R:* $-\frac{1}{6}e^{-t}-\frac{4}{3}e^{2t}+\frac{7}{2}e^{3t}$ (F. P.)
[12] $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+4)(s^2+1)}$	*R:* $\frac{1}{3}\left(\operatorname{sen} t-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)$ (T. C.)

TRANSFORMADA DE LAPLACE: 7ª aula.

Transformada de funções periódicas.

Já foram calculadas as Transformadas de algumas funções periódicas. Na Tabela de T.L., as Transformadas $\mathcal{L}\{\text{senwt}\}$ e $\mathcal{L}\{\text{coswt}\}$ foram calculadas usando a fórmula de Euler e a propriedade da linearidade. Na 2ª lista ,exercício n°7c) você deve ter calculado a Transformada de um trem de pulsos, que também é uma função periódica.

Vamos agora, apresentar uma maneira alternativa para calcular a Transformada de funções periódicas, que será a nossa 8ª propriedade.

8ª) PROPRIEDADE: Transformada de Funções Periódicas

A Transformada de Laplace de uma função f(t) periódica, contínua por partes, de período p é

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sp}} \int_0^p e^{-st} f(t)dt}$$

Demonstração:

Parte-se da definição :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \underbrace{\int_0^p}_{1^\circ termo} + \underbrace{\int_p^{2p}}_{2^\circ termo} + \underbrace{\int_{2p}^{3p}}_{3^\circ termo} + \ldots.$$

A partir do 2° termo, vamos proceder a convenientes substituições de variável, afim de que todos os demais termos possam ser expressos em função do 1°. Assim,

$$\int_p^{2p} e^{-st} f(t)dt = e^{-sp} \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau, \text{ onde } t=\tau+p,\ dt=d\tau$$

$$\int_{2p}^{3p} e^{-st} f(t)dt = e^{-2sp} \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau, \text{onde } t=\tau+2p\ ,\ dt=d\tau$$

E assim sucessivamente. Agrupando os termos, a partir do 2° , temos

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = [1 + e^{-sp} + e^{-2sp} + \ldots] \int_0^p e^{-st} f(t)dt$$

\# Recordando Cálculo II : Identifica-se a série entre parênteses como a série geométrica, que converge para

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots = \frac{1}{1-x} \quad , \text{com } x = e^{-sp} < 1 \ .$$

Logo

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sp}} \int_0^p e^{-st} f(t)dt \qquad \text{c.q.d.}$$

Comentários:

Assim, a Transformada de uma função periódica poderá ser calculada como uma integral de Laplace dentro do período da função, multiplicada pelo fator $\frac{1}{1-e^{-sp}}$.

Vejamos como fica no caso da função senwt cujo período é $\frac{2\pi}{w}$:

$$\mathcal{L}\{\text{senwt}\} = \frac{1}{1-e^{\frac{-s2\pi}{w}}} \int_0^{2\pi/w} e^{-st} \text{ senwt } dt = \frac{1}{1-e^{\frac{-s2\pi}{w}}} \left[\frac{e^{-st}}{s^2+w^2} (s \text{ senwt } -\right.$$

$$\left. -w \text{ coswt}) \right]_0^{2\pi/\omega} = \frac{1}{1-e^{\frac{-s2\pi}{w}}} \left[\frac{e^{\frac{-2\pi s}{w}}}{s^2+w^2}(-w) - \frac{1}{s^2+w^2}(-w) \right] =$$

$$= \left[\frac{1}{\cancel{1-e^{\frac{-s2\pi}{w}}}}\right] \frac{w}{s^2+w^2} \left[\cancel{1-e^{\frac{-2\pi s}{w}}}\right] = \frac{w}{s^2+w^2} \ .$$

Ou seja, chegamos ao mesmo resultado anterior (TAB(13).

Demonstre a TAB(14), como um exercício de utilização da 8ª propriedade .

Exemplo 15. Refaça o exercício 7c) da 2ª lista, usando a 8ª propriedade.

Tabela de Gráficos de Funções Periódicas Especiais .

A Tabela de Gráficos de funções periódicas apresentada a seguir, é mais uma tabela que você poderá usar no dia da prova. Ela é uma tabela de Transformadas de Laplace um pouco diferente da anterior, pois as funções f(t) são funções que tem nome e são dadas apenas graficamente. À direita, faz-se a leitura da respectiva Transformada. Temos, por ordem, a função *onda quadrada* (que não deve ser confundida com o *trem de pulsos*) , *a onda triangular, o retificador de meia onda, o retificador de onda completa e a onda dente de serra.* Esses tipos de funções periódicas ocorrem na Física e nas Engenharias, nas mais diversas modelagens.

Vamos demonstrar cada uma das Transformadas usando a 8ª propriedade.

Onda Quadrada de período p=2a

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-s2a}}\int_0^{2a} f(t)e^{-st}\,dt=\frac{1}{1-e^{-s2a}}[\int_0^{a} e^{-st}\,dt-\int_a^{2a} e^{-st}\,dt]=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-s2a}}\{-\frac{1}{s}(e^{-as}-1)-(-\frac{1}{s})(e^{-2as}-e^{-as})\}=$$

$$=\frac{1}{s}\,\frac{1}{1-e^{-s2a}}[\,e^{-2as}-2\,e^{-as}+1]=\frac{1}{s}\,\frac{1}{(1-e^{-as})(1+e^{-as})}[1-e^{-as}]^2=$$

$$=\frac{1}{s}\frac{(1-e^{-as})}{(1+e^{-as})}=\frac{1}{s}\tanh(\frac{as}{2}),$$ onde se usou a identidade

$$\tanh(\frac{as}{2})=\frac{\operatorname{senh}(as/2)}{\cosh(as/2)}$$ e $$\operatorname{senh}(\frac{as}{2})=\frac{1}{2}(e^{as/2}-e^{-as/2})$$

$$\cosh(\frac{as}{2})=\frac{1}{2}(e^{as/2}+e^{-as/2})$$

Ou seja

$$\tanh\left(\frac{as}{2}\right)=\frac{e^{as/2}-e^{-as/2}}{e^{as/2}+e^{-as/2}}=\frac{e^{as/2}(1-e^{-as})}{e^{as/2}(1+e^{-as})}=\frac{(1-e^{-as})}{(1+e^{-as})}$$

Onda triangular de período p=2a

Faremos aqui uma aplicação da derivação gráfica. Observando o gráfico da onda triangular, constatamos que ele é formado de segmentos de reta que possuem declividade $\frac{1}{a}$ no intervalo $0<t<a$ e declividade $-\frac{1}{a}$ no intervalo $a<t<2a$, portanto sua derivada oscila como uma onda quadrada de amplitude $\frac{1}{a}$. Portanto, neste caso é muito mais prático aplicar a 2ª propriedade (Transformada da derivada) para calcular a Transformada da onda triangular pois já conhecemos a Transformada da onda quadrada.

Assim, tomando $f'(t)=\frac{1}{a}[\text{onda quadrada}]$ e $f(t)=$ onda triangular, temos

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}= s\,\mathcal{L}\{f(t)\}- f(0)$$

$$\frac{1}{a}\,\mathcal{L}\{\text{onda quadrada}\}= s\,\mathcal{L}\{\text{onda triangular}\}$$

Logo, $\mathcal{L}\{\text{onda triangular}\}= \frac{1}{s}\frac{1/a}{s}\tanh\left(\frac{as}{2}\right) = \frac{1}{as^2}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$.

c.q.d.

Retificador de meia onda de período $p=2\pi/w$

Pela 8.ª propriedade temos:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{\frac{-2\pi s}{w}}}\int_0^{2\pi/w} e^{-st}\,f(t)dt = \frac{1}{1-e^{\frac{-2\pi s}{w}}}\int_0^{\pi/w} e^{-st}\,\text{sen}wt\;dt =$$

$$= \frac{1}{1-e^{\frac{-2\pi s}{w}}}\left[e^{-st}\,\frac{1}{s^2+w^2}(s\,\text{sen}wt - w\cos wt)\right]\Big|_0^{\pi/w} =$$

$$= \frac{1}{1-e^{\frac{-2\pi s}{w}}}\,\frac{1}{s^2+w^2}\left[e^{\frac{-s\pi}{w}}\,w + w\right] = w\,\frac{1}{s^2+w^2}\,\frac{\cancel{(1+e^{-s\pi/w})}}{\cancel{(1+e^{-s\pi/w})}\,(1-e^{-s\pi/w})} \quad \therefore$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = w\,\frac{1}{s^2+w^2}\,\frac{1}{(1-e^{-s\pi/w})}$$

c.q.d.

Retificador de onda completa de período $p=\pi/w$

De maneira análoga, obtemos :

$\mathscr{L}\{f(t)\}=$

$$\frac{1}{1-e^{-s\pi/w}}\int_0^{\pi/w} e^{-st/w}\ \text{senwt}\ dt = w\,\frac{1}{s^2+w^2}\,\frac{(1+e^{-s\pi/w})}{(1-e^{-s\pi/w})} = w\,\frac{1}{s^2+w^2}\coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$$

c.q.d.

Onda dente de serra de período p=a .

Também usando a 8ª propriedade, temos

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sa}}\int_0^a \frac{1}{a}\ t\ e^{-st}\,dt = \frac{1}{a}\,\frac{1}{1-e^{-as}}\left[-\frac{te^{-st}}{s}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^a =$$

$$= \frac{1}{a}\,\frac{1}{(1-e^{-as})}\left[-\frac{ae^{-as}}{s}-\frac{1}{s^2}e^{-as}+\frac{1}{s^2}\right] = \frac{1}{a}\,\frac{1}{(1-e^{-as})}\,\frac{1}{s}\left[-ae^{-as}+\frac{1}{s}(1-e^{-as})\right] =$$

$$= \frac{1}{as^2}-\frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$$

c.q.d.

Transformadas Inversas :

Para encontrar Inversas de funções F(s) que são Transformadas de funções periódicas não poderemos proceder da mesma forma que nos casos anteriores, pois a Transformada resulta de uma integração dentro do período da função e não de t=0 a ∞ , como na nossa Tabela de T.L.

Apresentamos no exemplo abaixo, como proceder nestes casos.

Exemplo 16. Calcule $\mathcal{L}^{-1}\{ \dfrac{2 + e^{-2s} - 3e^{-s}}{s(1 - e^{-2s})} \}$.

O fator $(1-e^{-2s})$ no denominador sugere uma função periódica de período 2 .

O ponto chave do encaminhamento da solução consiste em escrever $(1-e^{-2s})^{-1}$ como uma série de potências, isto é

$$(1-e^{-2s})^{-1} = 1 + (e^{-2s}) + (e^{-2s})^2 + (e^{-2s})^3 + \ldots\ldots.$$

E consequentemente

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s}(2 + e^{-2s} - 3e^{-s})(1 + e^{-2s} + e^{-4s} + e^{-6s} + \ldots)$$

Multiplicando cada termo à esquerda pela série temos:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s}\left\{\begin{array}{llllllll} 2 & & +2e^{-2s} & & +2e^{-4s} & & +2e^{-6s}\ldots \\ & & +e^{-2s} & & +e^{-4s} & & +e^{-6s}\ldots \\ & -3e^{-s} & & -3e^{-3s} & & -3e^{-5s} & \ldots \end{array}\right\}..$$

Simplificando, obtemos:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s}\{2 - 3e^{-s} + 3e^{-2s} - 3e^{-3s} + 3e^{-4s} - 3e^{-5s} + \ldots\}$$

Lembrando a Transformada da função degrau unitário

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s} \quad , \ (4^a \text{ propriedade})$$

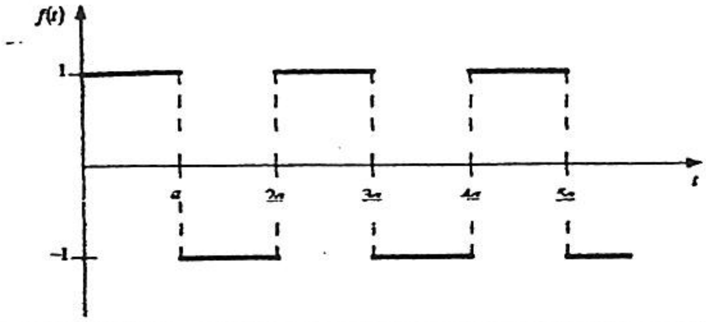
Temos finalmente:

$$f(t)=2u(t) - 3u(t-1) + 3u(t-2) - 3u(t-3) + 3u(t-4) + \ldots.$$

O gráfico desta função é

Transformadas de Laplace de Algumas Funções Periódicas

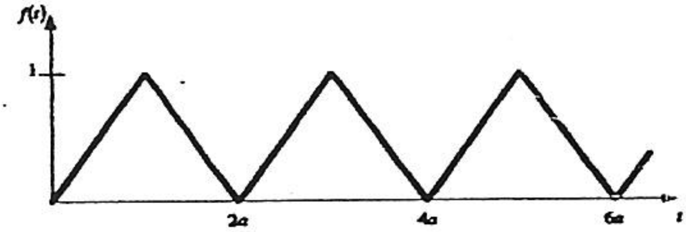
Onda quadrada



$\mathcal{L}\{f(t)\}$

$$\frac{1}{s}\,\mathrm{tgh}\left(\frac{a\,s}{2}\right)$$

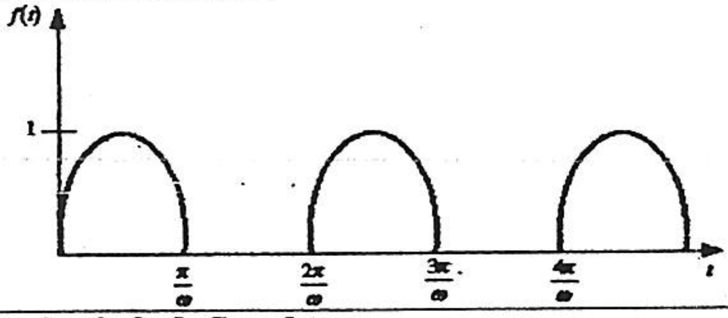
Onda triangular



$\mathcal{L}\{f(t)\}$

$$\frac{1}{a\,s^2}\,\mathrm{tgh}\left(\frac{a\,s}{2}\right)$$

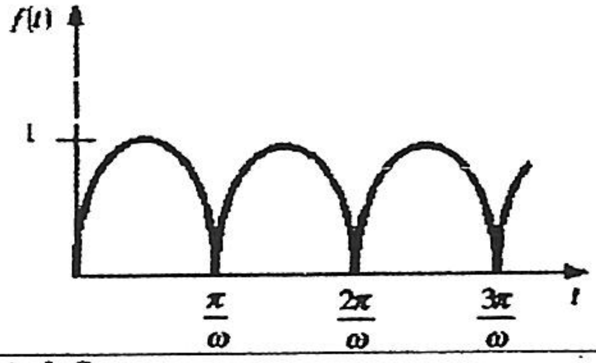
Retificador de Meia Onda



$\mathcal{L}\{f(t)\}$

$$\frac{\omega}{\left(s^2+\omega^2\right)\left(1-e^{-\frac{\pi}{\omega}s}\right)}$$

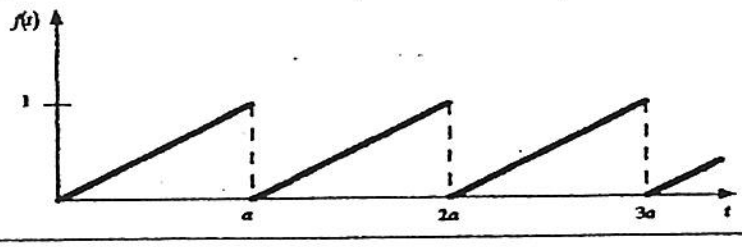
Retificador de Onda Completa



$\mathcal{L}\{f(t)\}$

$$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\,\mathrm{cotgh}\left(\frac{\pi\,s}{2\omega}\right)$$

Onda Dente de Serra



$\mathcal{L}\{f(t)\}$

$$\frac{1}{a\,s^2}-\frac{e^{-a\,s}}{s\left(1-e^{-a\,s}\right)}$$

5ª Lista: A Delta de Dirac (função impulso); O Produto Convolutivo e o Teorema da Convolução; Equações Integrais

[1] Achar a solução dos seguintes problemas de valor inicial:

[a] $\begin{cases} y''+2y'+2y=\delta(t-\pi) \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$ R: $y(t)=e^{-t}\text{sen}\,t\left(1-e^{\pi}u(t-\pi)\right)+e^{-t}\cos t$	[b] $\begin{cases} y''+3y'+2y=\delta(t-5)+u(t-10) \\ y(0)=0 \\ y'(0)=\frac{1}{2} \end{cases}$ R: $y(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)+\left[e^{-(t-5)}-e^{-2(t-5)}\right]u(t-5)+\left[\frac{1}{2}-e^{-(t-10)}+\frac{1}{2}e^{-2(t-10)}\right]u(t-10)$

[c] $\begin{cases} y''+y=\delta(t-2\pi) \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$	R: $y(t)=\text{sen}\,t+\text{sen}\,(t-2\pi)\,u(t-2\pi)$

[2] Mostre que $(\delta * f)(t)=f(t)$

Sugestão: Use a propriedade de filtragem da Delta de Dirac.

[3] A equação de movimento de um OHS não amortecido sujeito a oscilações forçadas pode ser escrita como $y''(t)+\omega^2 y(t)=r(t)$, onde $\omega^2=\dfrac{k}{m}$ e $r(t)=\dfrac{F_{ext}}{m}$.

[a] Use o método da Transformada de Laplace e chegue a: $F(s)=\dfrac{s\,y(0)+y'(0)}{s^2+\omega^2}+\dfrac{R(s)}{s^2+\omega^2}$, onde $R(s)=\mathcal{L}\{r(t)\}$.

[b] Mostre que a solução pode ser escrita com o auxílio da tabela de T. $\mathcal{L}$ e do Teorema da Convolução como:

$$y(t)=y(0)\cos\omega t+\frac{y'(0)}{\omega}\text{sen}\,\omega t+\frac{\text{sen}\,\omega t}{\omega}*r(t)$$

[4] Use o Teorema da Convolução para calcular: $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right)$ R: $\dfrac{1}{2}\left(\text{sen}\,t-\cos t+e^{-t}\right)$

[5] Use a T. $\mathcal{L}$ e o Teorema da Convolução para resolver as seguintes equações integrais:

[a] $y(t)=1+\int_0^t y(\tau)\,d\tau$ R: $y(t)=e^t$	[b] $y(t)=1-\int_0^t y(\tau)(t-\tau)\,d\tau$ R: $y(t)=\cos t$
[c] $y(t)=te^t-2e^t\int_0^t e^{-\tau}y(\tau)\,d\tau$ R: $y(t)=\text{senh}\,t$	[d] $y(t)=1-\text{senh}\,t+\int_0^t(1+\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau$ R: $y(t)=\cosh t$

TRANSFORMADA DE LAPLACE: 8ª aula

Na aula de hoje, iniciaremos a dedução final das fórmulas da TABELA que ficaram pendentes. Estas fórmulas envolvem funções especiais que surgem na solução de alguns problemas da Física e das Engenharias.

A 1ª delas é a TAB(6), sendo que as TAB(4) e (5) são casos particulares da TAB(6).

Demonstração da TAB(6).

Façamos a leitura da TAB(6): $\mathcal{L}\{t^{\kappa-1}\} = \dfrac{\Gamma(\kappa)}{s^{\kappa}}$, $\kappa>0$

onde $\Gamma(\kappa)$ é a função gama definida por $\Gamma(\kappa) = \int_0^{\infty} e^{-x}\, x^{\kappa-1} dx$

Parte-se da definição de T.L da função $t^{\kappa-1}$,

$\mathcal{L}\{t^{\kappa-1}\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\ t^{\kappa-1}\ dt$, onde se faz a seguinte substituição : $st=x \therefore t=\dfrac{x}{s}$ e $dt=\dfrac{1}{s}dx$. Consequentemente

$$\mathcal{L}\{t^{\kappa-1}\} = \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^{\kappa-1} \frac{1}{s} dx = \frac{1}{s^{\kappa}} \int_0^{\infty} e^{-x}\ x^{\kappa-1}\ dx = \frac{\Gamma(\kappa)}{s^{\kappa}} \qquad \text{c.q.d.}$$

Casos particulares: $\kappa=\frac{1}{2} \Rightarrow$ TAB(4) , $\kappa = \frac{3}{2} \Rightarrow$ TAB(5) , onde se usou os valores $\Gamma(1/2)= \sqrt{\pi}$ e $\Gamma(3/2)= \sqrt{\pi}/2$.

Observar que, usando a fórmula de recorrência $\Gamma(\kappa+1)= \kappa\Gamma(\kappa)$, se chega a $\Gamma(n)= (n-1)!$,ou seja a TAB(3) pode ser vista como um caso particular da TAB(6), basta considerar $\kappa = n$, sendo n um inteiro.

A TAB(10) pode, agora, ser demonstrada aplicando na TAB(6) a propriedade do deslocamento no eixo s .

Exemplo 17. Demonstre a TAB(32) usando TAB(4) e TAB(5) e a conveniente propriedade de deslocamento.

Cálculo de Transformadas ou Inversas por Séries de Potência.

O método das séries de potências possibilita o cálculo de Transformadas de Laplace ou de Inversas de funções cuja série de potência seja conhecida.

Para tanto vamos precisar de uma Tabela de séries de potências , a fim de que possamos identificá-las no decorrer da dedução.

Consultando nossa TABELA, identificamos que a partir da fórmula TAB(29) até TAB(43) todas podem ser demonstradas por este método.

Para ilustrar este método , vamos demonstrar as TAB(31) e TAB(34).

TAB(31) $\mathscr{L}\{J_o(at)\} = \dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$, onde $J_o(at)$ é a função de Bessel de ordem zero, definida ,no rodapé da TABELA. Assim

$$\mathscr{L}\{1-\left(\frac{at}{2}\right)^2+\left(\frac{at}{2}\right)^4\frac{1}{(2!)^2}-\left(\frac{at}{2}\right)^6\frac{1}{(3!)^2}-.....\} =$$

$$= \mathscr{L}\{1\}-\left(\frac{a}{2}\right)^2\mathscr{L}\{t^2\}+\left(\frac{a}{2}\right)^4\frac{1}{(2!)^2}\mathscr{L}\{t^4\}-\left(\frac{a}{2}\right)^6\frac{1}{(3!)^2}\mathscr{L}\{t^6\}+...$$

Para cada um dos termos, usamos a TAB(3): $\mathscr{L}\{t^{n-1}\}=\dfrac{(n-1)!}{s^n}$

$$\mathscr{L}\{J_o\}=\frac{1}{s}-\left(\frac{a}{2}\right)^2\frac{2!}{s^3}+\left(\frac{a}{2}\right)^4\frac{1}{(2!)^2}\frac{4!}{s^5}-\left(\frac{a}{2}\right)^6\frac{1}{(3!)^2}\frac{6!}{s^7}+...=$$

$$=\frac{1}{s}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{s}\right)^2+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{a}{s}\right)^4-\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{a}{s}\right)^6+......\right]$$

Esta última série é a série binomial ,onde identificamos x = $\left(\frac{a}{s}\right)^2$ e m = $-\frac{1}{2}$, isto é

$$\left(1+\left(\frac{a}{s}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{s}\right)^2+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{a}{s}\right)^4-\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{a}{s}\right)^6+\ldots\right]$$

Logo $\mathcal{L}\{J_o\}=\frac{1}{s}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{s}\right)^2}}=\frac{1}{s}\frac{1}{\sqrt{\frac{s^2+a^2}{s^2}}}=\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$ c.q.d.

Vamos demonstrar agora a TAB(34).

TAB(34) $\mathcal{L}\{J_o\,(2\sqrt{kt}\,)\}=\frac{1}{s}\,e^{-k/s}$ ou $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\,e^{-k/s}\}=J_o\,(2\sqrt{kt}\,)$

Usando a série de potências para a exponencial temos,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}e^{-k/s}\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\left[1-\frac{k}{s}+\left(\frac{k}{s}\right)^2\frac{1}{2!}-\left(\frac{k}{s}\right)^3\frac{1}{3!}+\ldots\ldots\right]\right\}=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}-k\,\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}+$$

$$+\frac{k^2}{2!}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^3}\}-\frac{k^3}{3!}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^4}\}+\ldots..$$

Usando a TAB(3) $\mathcal{L}^{-1}\,\{\frac{1}{s^n}\}=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, temos

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\,e^{-k/s}\}=1-kt+\frac{k^2}{2!}\frac{t^2}{2!}-\frac{k^3}{3!}\frac{t^3}{3!}+\ldots\ldots.$$

Comparando com a série que define a função de Bessel J_o

$J_o(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^4(2!)^2}-\ldots.$,identificamos $\frac{x^2}{2^2}=kt\ \therefore\ x=2\sqrt{kt}$

<u>Solução de equações diferenciais a coeficientes variáveis.</u>

A 9ª propriedade tem uma outra aplicação que é resolver pelo método da T.L. certas equações diferenciais a coeficientes variáveis.

Veremos esta aplicação através do exemplo abaixo.

Exemplo 19. Use o método da T.L.para resolver o seguinte problema de valor inicial

$$ty''(t) + y'(t) + 4ty(t) = 0 \quad , \quad y(0)= 3 \text{ e } y'(0) = 0 \; .$$

Solução: $$\underbrace{\mathcal{L}\{ty''(t)\}}_{9^a \text{ prop.}} + \underbrace{\mathcal{L}\{y'(t)\}}_{2^a \text{ prop.}} + 4\underbrace{\mathcal{L}\{ty(t)\}}_{9^a \text{ prop.}}= 0$$

$$\mathcal{L}\{ty''(t)\}=-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y''(t)\} = -\frac{d}{ds}\left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] =$$
$$= -2sY(s) - s^2Y'(s) + 3$$

Substituindo na equação, temos

$-2sY(s)- s^2Y'(s) + 3 + sY(s) - 3 -4Y'(s)= 0$ ou

$-(s^2 + 4)Y'(s) - sY(s) = 0$ ou ainda

$$-(s^2 + 4)\frac{dY(s)}{ds}= sY(s)$$

Vemos que neste caso a equação subsidiária não é uma equação algébrica . Contudo, é uma equação diferencial bem mais simples que a inicial. Sua solução é obtida pela integral logarítmica, isto é :

$$\int\frac{dY(s)}{Y(s)} = -\int\frac{s}{s^2 + 4}\,ds \quad ,$$ cuja solução é

$$\ln Y(s) = -\frac{1}{2}\ln(s^2 + 4) + C \quad ,$$ ou

$$\ln Y(s) = \ln(s^2 + 4)^{-1/2} + \ln C_0$$

$J_o(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \ldots\ldots$, identificamos $\frac{x^2}{2^2} = kt \therefore x = 2\sqrt{kt}$

Logo

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\ e^{-k/s}\} = J_o\ (2\sqrt{kt}) \quad , \text{ c.q.d.}$$

9ª Propriedade: Derivada da Transformada

Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, então

$$\boxed{\frac{d}{ds} F(s) = -\mathcal{L}\{tf(t)\}}$$

Demonstração:

Usando a definição de Transformada de Laplace para calcular a derivada , temos:

$$\frac{d}{ds} F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)\ e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)\frac{d}{ds}e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)\ (-t)\ e^{-st}dt =$$

$$= \int_0^\infty [-tf(t)]\ e^{-st}dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\} \qquad \text{c.q.d.}$$

Comentários:

Esta propriedade possibilita calcular a Transformada de funções da forma $tf(t)$ desde que se conheça a Transformada de $f(t)$. As fórmulas TAB(2), (8) e (22) que já foram demonstradas estão nesta forma. Novas Transformadas podem ser calculadas ,como no exemplo abaixo.

Exemplo 18. Calcule $\mathcal{L}\{t^2\ f(t)\}$, com $f(t) = \text{sen}wt$.

Usando a conveniente propriedade dos logarítmos, podemos escrever esta última igualdade como,

$$\ln Y(s) = \ln \frac{C_0}{\sqrt{s^2+4}} \quad \therefore \quad Y(s) = \frac{C_0}{\sqrt{s^2+4}}$$

A Inversa de Y(s) é dada pela TAB(31) : $y(t)=C_0J_0(2t)$.
Precisamos ainda calcular C_0 . Para tanto usamos a condição inicial $y(0)=3$ e, considerando que $J_0(0)=1$, obtemos

$$C_0J_0(0)=3 \quad \therefore \quad C_0 = 3$$

Finalmente, temos a solução $y(t)= 3J_0(2t)$.

Exemplo **20**. Resolva a equação de Laguerre para n=2, isto é

$$ty''(t) + (1-t)y'(t) + 2y(t) = 0 \quad , y(0)=2 \; , \; y'(0)=-4 .$$

6ª (e última) Lista: Transformada de Laplace de Funções Especiais.T. $\mathcal{L}$ e o Método das Séries. A Delta de Dirac (6ª Propriedade). T. $\mathcal{L}$ de Funções Periódicas (8ª Propriedade). Derivada da T. $\mathcal{L}$ (9ª Propriedade). Integral da T. $\mathcal{L}$ (10ª Propriedade).

[1] Use a tabela de T. $\mathcal{L}$ para mostrar que:

[a] $\mathcal{L}\left\{t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{-1}{2}}\right\}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{(2s+1)}{s^{\frac{3}{2}}}$	[b] $\mathcal{L}\left\{t^{\frac{-1}{3}}\right\}=\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{s^{\frac{2}{3}}}$	[c] $\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-2t}}{\sqrt{t}}\right\}=\sqrt{\frac{\pi}{s+2}}$
[d] $\mathcal{L}\left\{J_0\left(2\sqrt{t}\right)\right\}=\frac{e^{\frac{-1}{s}}}{s}$	[e] $\mathcal{L}\left\{\frac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\, e^{\frac{-1}{s}}$	[f] $\mathcal{L}\{J_1(t)\}=\frac{\sqrt{s^2+1}-s}{\sqrt{s^2+1}}$

(Lembre-se que $J_1(t)=-J_0'(t)$)

[2] Use o método de séries de potências para mostrar que: $\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}\sqrt{t}\right\}=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{4s}}$.

[3] Usando a 9ª Propriedade, calcule:

[a]	[b]	[c]	[d]
$\mathcal{L}\{t \operatorname{senh} at\}$	$\mathcal{L}\{t \cosh 3t\}$	$\mathcal{L}\{t\, J_0(2t)\}$	$\mathcal{L}\{t\, J_0(2t)\, e^{-t}\}$
R: $\frac{2as}{\left(s^2-a^2\right)^2}$	R: $\frac{s^2+9}{\left(s^2-9\right)^2}$	R: $\frac{s}{\left(s^2+4\right)^{\frac{3}{2}}}$	R: $\frac{s+1}{\left(s^2+2s+5\right)^{\frac{3}{2}}}$

[4] Resolva:

$\begin{cases} t\,y''(t)+2\,y'(t)+t\,y(t)=0 \\ y(0)=1,\ y(\pi)=0 \end{cases}$ (Lembre-se que $\lim_{s\to\infty} Y(s)=0$)	R: $y(t)=\frac{\operatorname{sen} t}{t}$

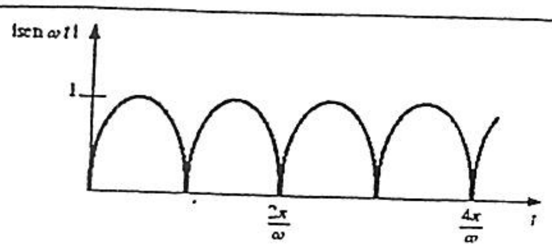
[5] Use a 10ª Propriedade para demonstrar que:

[a]	[b]	[c]
$\mathcal{L}\left\{\frac{\operatorname{senh} t}{t}\right\}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{s+1}{s-1}\right)$	$\mathcal{L}\left\{\frac{2}{t}\,(1-\cos\,\omega t)\right\}=\ln\left(\frac{s^2+\omega^2}{s^2}\right)$ Tab.	$\mathcal{L}\left\{\frac{2}{t}\,(1-\cosh\,at)\right\}=\ln\left(\frac{s^2-a^2}{s^2}\right)$

[6] Dadas as funções periódicas $f(t)$, faça o gráfico de $f(t)$ e calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

[a] $f(t)$ possui período $p=4$. $f(t)=\begin{cases}3t,\ 0<t<2\\ 6,\ 2<t<4\end{cases}$ R: $\frac{3-3e^{-2s}-6se^{-4s}}{s^2\left(1-e^{-4s}\right)}$	[b] $f(t)$ possui período $p=2\pi$. $f(t)=e^t$, $0<t<2\pi$ R: $\frac{e^{2(1-s)\pi}-1}{(1-s)\left(1-e^{-2\pi s}\right)}$

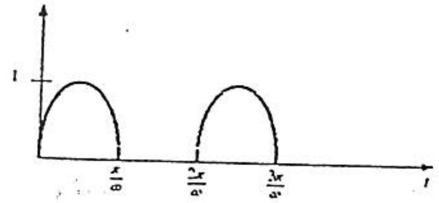
[7] **Onda seno retificada:** Calcule a T. $\mathcal{L}$ da função $|\text{sen } \omega t|$, mostrando no gráfico abaixo.



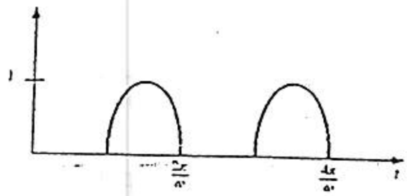
$R: \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2} \coth\left(\dfrac{\pi}{2\,\omega} s\right)$

[8] **Retificador de meia-onda:**

[a]



[b]



Calcule a T. $\mathcal{L}$ da função representada no gráfico [b] a partir da função representada em [a] cuja T. $\mathcal{L}$. calculada em aula é $\dfrac{\omega}{\left(s^2+\omega^2\right)\left(1-e^{\frac{-\pi s}{\omega}}\right)}$.

$R: \dfrac{\omega}{\left(s^2+\omega^2\right)\left(e^{\frac{\pi s}{\omega}}-1\right)}$

[9] Use a 8ª Propriedade para calcular a T. $\mathcal{L}$ da função periódica representada no gráfico [c] do exercício nº 7 da 2ª Lista.

[10] Encontre a solução de: $\begin{cases} 2\,y''(t)+8\,y(t)=h(t) \\ y(0)=10 \;\;,\;\; y'(0)=0 \end{cases}$ para

[a] $h(t)=h_0\,\mu_a(t)$, onde h_0 é uma constante.	[b] $h(t)=h_0\,\delta(t)$, onde h_0 é uma constante.
$R: \; y(t)=10\cos 2t+\dfrac{1}{8}\,h_0\left[1-\cos 2(t-a)\right]\mu_a(t)$	$R: \; y(t)=10\cos 2t+\dfrac{1}{4}\,h_0 \text{ sen } 2t$

Observe que $\mu_a(t)=\mu(t-a)$, a função degrau unitário ou função de Heaviside.

[11] Encontre: $\mathcal{L}\left\{t\,\mu_1(t)+t^2\,\delta(t-1)\right\}$

$R: \dfrac{e^{-s}\left(s^2+s+1\right)}{s^2}$

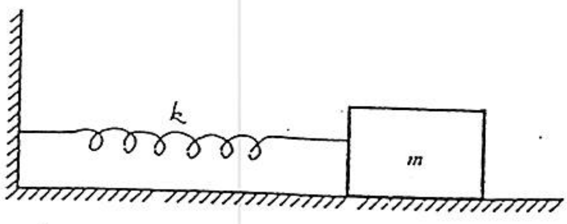
[12] Encontre: $\mathcal{L}\left\{\cos t \,\ln t\,\delta(t-\pi)\right\}$

$R: -e^{-\pi s}\ln \pi$

[13]

Considere o oscilador harmônico não-amortecido representado na figura ao lado. Suponha que em $t=0$, a massa m está em sua posição de equilíbrio. Encontre o deslocamento $x(t)$ para $t>0$, se uma força $F_0\,\delta(t)$ é aplicada.

$R: \dfrac{F_0}{\sqrt{k\,m}} \text{ sen } \sqrt{\frac{k}{m}}\,t$



TRANSFORMADA DE LAPLACE: 9ª aula.

10ª Propriedade: Integral da Transformada

Se o limite para t tendendo a zero pela direita de $\frac{f(t)}{t}$, existe, então

$$\boxed{\int_s^{\infty} F(\mathcal{s})\,d\mathcal{s} = \mathcal{L}\{\frac{f(t)}{t}\}}$$

Observar que a variável de integração é 'muda', pois a integral acima é definida. Para não confundi-la com o limite inferior de integração, que é s, estamos usando como variável de integração o símbolo $\mathcal{s}$.

Demonstração:

Parte-se de $\int_s^{\infty} F(\mathcal{s})\,d\mathcal{s} = \int_s^{\infty} [\int_0^{\infty} e^{-\mathcal{s}t} f(t)\,dt\,]\,d\mathcal{s}$.

Reverte-se a ordem de integração, isto é, integra-se primeiro na variável $\mathcal{s}$ e depois na variável t,

$$\int_s^{\infty} F(\mathcal{s})\,d\mathcal{s} = \int_0^{\infty} [\int_s^{\infty} e^{-\mathcal{s}t}\, f(t)\,d\mathcal{s}]\,dt = \int_0^{\infty} f(t)\,[\int_s^{\infty} e^{-\mathcal{s}t}\,d\mathcal{s}]\,dt =$$

$$= \int_0^{\infty} f(t)\left[\frac{e^{-\mathcal{s}t}}{(-t)}\right]_s^{\infty} dt = -\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t}\,[e^{-\infty} - e^{-st}\,]\,dt = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t}\, e^{-st}\,dt =$$

$$= \mathcal{L}\{\frac{f(t)}{t}\}$$, c.q.d.

Comentários : Esta é mais uma propriedade que possibilita o cálculo de novas Transformadas a partir de Transformadas conhecidas. Assim, se conhecemos a Transformada de f(t) poderemos obter a Transformada de

$\frac{f(t)}{t}$, calculando a integral da Transformada de f(t). Contudo, em certos casos teremos que analisar com cuidado o processo do limite superior da integral, quando $s \to \infty$, como se faz em Cálculo I, quando calculamos integrais impróprias.

As fórmulas TAB(29),(39),(40),(41) e (42) podem ser calculadas com esta propriedade, pois todas são da forma $\frac{f(t)}{t}$, e a correspondente F(s) é conhecida.

TAB(29) $\mathcal{L}\{\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}} (e^{bt} - e^{at})\} = \sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$

A função a ser transformada pode ser escrita como

$$\frac{1}{t}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}(e^{bt} - e^{at}) = \frac{1}{t}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{bt} - \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{at}\right],$$

ou seja na forma da 10ª propriedade, onde $f(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{bt}$ e $g(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{at}$. Suas Transformadas dadas pela TAB(4) com deslocamento no eixo s, são respectivamente,

$$F(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{s-b}} \quad \text{e} \quad G(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{s-a}}$$

Usando então a 10ª propriedade, temos

$$\mathcal{L}\{\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt} - e^{at})\} = \frac{1}{2}\int_s^\infty \frac{1}{\sqrt{s-b}}ds - \frac{1}{2}\int_s^\infty \frac{1}{\sqrt{s-a}}ds =$$

$$= \left[\sqrt{s-b} - \sqrt{s-a}\right]_s^\infty$$

Vamos analisar com atenção o processo de limite $s \to \infty$, que aparece nesta última igualdade:

$$\lim_{s\to\infty}[\sqrt{s-b}-\sqrt{s-a}]=\lim_{s\to\infty}[\sqrt{s-b}-\sqrt{s-a}]\left[\frac{\sqrt{s-b}+\sqrt{s-a}}{\sqrt{s-b}+\sqrt{s-a}}\right]=$$

$$=\lim_{s\to\infty}\frac{s-b-s+a}{\sqrt{s-b}+\sqrt{s-a}}=\lim_{s\to\infty}\frac{a-b}{\sqrt{s-b}+\sqrt{s-a}}=0$$

Este limite que acabamos de calcular é uma indeterminação da forma $\infty-\infty$ e como vimos, houve necessidade de um certo procedimento para levantar esta indeterminação.

Assim, o limite superior dá zero e o limite inferior s=s dá o resultado esperado, isto é

$$\mathcal{L}\{\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt}-e^{at})\}=\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$$

Vejamos agora a TAB(39):

TAB(39) $\mathcal{L}\{\frac{1}{t}(e^{bt}-e^{at})\}=\ln\frac{s-a}{s-b}$

$$\mathcal{L}\{\frac{1}{t}(e^{bt}-e^{at})\}=\int_s^\infty\left[\frac{1}{s-b}-\frac{1}{s-a}\right]ds=$$

$$=[\ln(s-b)-\ln(s-a)]_s^\infty=\left[\ln\frac{s-b}{s-a}\right]_s^\infty$$

Novamente, estamos diante de um limite que envolve uma indeterminação, desta vez da forma $\ln(\frac{\infty}{\infty})$. Como a função logarítmo é uma função contínua, então procedemos da seguinte maneira

$$\lim_{s\to\infty}\ln\frac{s-b}{s-a}=\ln\left[\lim_{s\to\infty}\frac{s-b}{s-a}\right]=\ln[\lim_{s\to\infty}1]=\ln 1=0,$$

onde se usou a regra de L'Hôpital.

Assim,

$$\mathcal{L}\{\frac{1}{t}(e^{bt} - e^{at})\} = \left[\ln\frac{s-b}{s-a}\right]_s^\infty = \ln\frac{s-a}{s-b} \qquad \text{c.q.d.}$$

Passemos à demonstração da TAB(40).

TAB(40) $$\mathcal{L}\{\frac{2}{t}(1-\cos wt)\} = \ln\frac{s^2+w^2}{s^2}$$

Usando TAB(1) e TAB(14), podemos escrever

$$\mathcal{L}\{2(1-\cos wt)\} = 2\,\frac{1}{s} - 2\,\frac{s}{s^2+w^2}\,,$$

e pela 10ª propriedade

$$\mathcal{L}\{\frac{2}{t}(1-\cos wt)\} = \int_s^\infty \left[2\frac{1}{s} - 2\frac{s}{s^2+w^2}\right]ds = \left[\ln s^2 - \ln(s^2+w^2)\right]_s^\infty =$$

$$= \left[\ln\frac{s^2}{s^2+w^2}\right]_s^\infty$$

Novamente ao substituir $s\to\infty$ estamos diante de uma indeterminação da forma $\ln\frac{\infty}{\infty}$. Procedemos da mesma maneira que na dedução da TAB(39) ,

$$\lim_{s\to\infty}\ln\frac{s^2}{s^2+w^2} = \ln\left[\lim_{s\to\infty}\frac{s^2}{s^2+w^2}\right] = \ln\lim_{s\to\infty}\frac{2s}{2s} = \ln 1 = 0$$

Retornando à nossa dedução, temos,

$$\mathcal{L}\{\frac{2}{t}(1-\cos wt)\} = \left[\ln\frac{s^2}{s^2+w^2}\right]_s^\infty = \ln\frac{s^2+w^2}{s^2}\,, \qquad \text{c.q.d.}$$

Passemos à TAB(41),

TAB(41) $\mathcal{L}\{\{\frac{2}{t}(1 - \text{coshat}\} = \ln\frac{s^2-a^2}{s^2}$

Usando TAB(1) e TAB(16) podemos escrever,

$$\mathcal{L}\{2(1\text{-coshat})\} = 2\,\frac{1}{s} - 2\,\frac{s}{s^2-a^2}$$

Aplicando a 10ª propriedade, temos

$$\mathcal{L}\{\{\frac{2}{t}(1\text{-coshat}\} = \int_s^\infty [2\frac{1}{s} - 2\frac{s}{s^2-a^2}]ds = [2\ln s - \ln(s^2-a^2)]\Big|_s^\infty =$$

$$= \left[\ln\frac{s^2}{s^2-a^2}\right]_s^\infty = \lim_{s\to\infty}\left[\ln\frac{s^2}{s^2-a^2}\right] - \ln\frac{s^2}{s^2-a^2} = 0 - \ln\frac{s^2}{s^2-a^2} = \ln\frac{s^2-a^2}{s^2}$$

c.q.d.

Demonstraremos agora a TAB(42).

TAB(42) $\mathcal{L}\{\frac{1}{t}\text{ senwt}\} = \arctan(\frac{w}{s})$

Usando a TAB(13) , e a 10ª propriedade, temos,

$$\mathcal{L}\{\frac{1}{t}\text{ senwt}\} = \int_s^\infty \frac{w}{s^2+w^2}ds = \arctan(\frac{s}{w})\Big|_s^\infty$$

Esta integral está tabelada , isto é $\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

Precisamos , agora, proceder a substituição dos limites de integração,

$\mathcal{L}\{\frac{1}{t}\text{senwt}\} = \arctan(\infty) - \arctan(\frac{s}{w}) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{s}{w}) =$
$= \text{arccot}(\frac{s}{w})$

Nesta última igualdade, usamos a identidade trigonométrica $\tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cot\theta$.

Mas ainda não está na forma da TAB(42), isto é precisamos mostrar que $\text{arccot}(\frac{s}{w}) = \arctan(\frac{w}{s})$.

Seja $\alpha = \text{arccot}(\frac{s}{w}) \therefore \cot\alpha = \frac{s}{w}$ e como $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$ então

$\tan\alpha = \frac{w}{s}$. Logo, $\alpha = \arctan(\frac{w}{s})$ e consequentemente

$\text{arccot}(\frac{s}{w}) = \arctan(\frac{w}{s})$.

Agora que já demonstramos a TAB(42), podemos ir para a última fórmula da nossa TABELA.

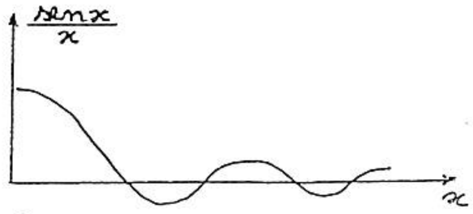
TAB(43) $\mathcal{L}\{\text{Si}(t)\} = \frac{1}{s}\,\text{arccot}(s)$

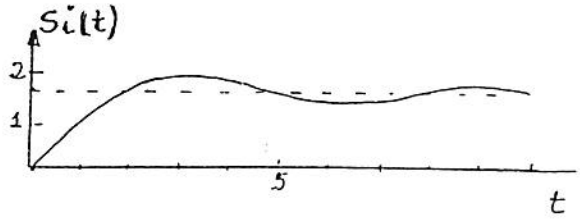
Esta é a Transformada da chamada função Integral Seno e é definida por

$$\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\text{sen}\,x}{x}\,dx.$$

Esta função pertence a uma classe de funções definidas por integrais que não podem ser calculadas por um número finito de funções elementares. Esta classe inclui, entre outras, a função gama e a função erro, muito usadas na Matemática Aplicada.

A função $\frac{\text{sen}\,x}{x}$ que é o integrando da função Si(t), é bastante conhecida do Cálculo I . Apresentamos a seguir os gráficos destas funções.





Para demonstrar a TAB(43) usaremos a 5ª propriedade, (Transformada da integral) e a TAB(42) ,

TAB(43) $\mathcal{L}\{Si(t)\} = \frac{1}{s}$ arccot(s)

Assim

$$\mathcal{L}\{Si(t)\} = \mathcal{L}\{\int_0^t \frac{\operatorname{sen}\tau}{\tau} d\tau\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\frac{\operatorname{sen}t}{t}\} = \frac{1}{s}\arctan(\frac{1}{s}) = \frac{1}{s}\operatorname{arccot}(s)$$

c.q.d.

Fim da Área II !

Propriedades da Transformada de Laplace

1	*Linearidade*	$\mathcal{L}\{a\,f(t)+b\,g(t)\} = a\,\mathcal{L}\{f(t)\}+b\,\mathcal{L}\{g(t)\}$
2	*Transformada da Derivada*	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\}-f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\,\mathcal{L}\{f(t)\}-s\,f(0)-f'(0)$ $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\,\mathcal{L}\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$
3	*Deslocamento no eixo s*	$\mathcal{L}\{e^{at}\,f(t)\} = F(s-a)$
4	*Deslocamento no eixo t*	$\mathcal{L}\{f(t-a)\,u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$
5	*Transformada da Integral*	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
6	*Transformada da Delta de Dirac*	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
7	*Teorema da Convolução*	$\mathcal{L}\{f(t)*g(t)\} = F(s)G(s)$ *onde* $f(t)*g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = g(t)*f(t)$
8	*Transformada de Funções Periódicas*	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sp}}\int_0^p e^{-s\tau}f(\tau)\,d\tau$
9	*Derivada da Transformada*	$\mathcal{L}\{t\,f(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
10	*Integral da Transformada*	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s)ds$

Notação Usada.: $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

SÉRIES DE POTÊNCIAS	INTERVALO DE CONVERGÊNCIA
$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+\cdots$	$-1<x<1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$	$-\infty<x<+\infty$
$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$	$-1<x\leq 1$
$\tan^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$	$-1\leq x\leq 1$
$\operatorname{sen} x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$	$-\infty<x<+\infty$
$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$	$-\infty<x<+\infty$
$\operatorname{senh} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots$	$-\infty<x<+\infty$
$\cosh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots$	$-\infty<x<+\infty$
$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n$	$-1<x<1$* $m\neq 0, 1, 2, \ldots$

* O comportamento nas extremidades do intervalo depende de m: Para $m\geq 0$ a série converge absolutamente em ambas as extremidades; para $m\leq -1$ a série diverge em ambas as extremidades; e para $-1<m<0$ a série converge condicionalmente em $x=1$ e diverge em $x=-1$.