# Lista 10

MAT01168 – Matemática Aplicada II – 2015/1

**Exercício 1.** Escreva os números complexos abaixo em forma polar (encontre o argumento principal $\operatorname{Arg} z = \theta \in (-\pi, \pi]$). Em seguida, represente-os no plano complexo.

$(a)$ $1+i$

$(b)$ $-4+4i$

$(c)$ $-5$

$(d)$ $1+\pi i$

$(e)$ $\dfrac{\sqrt{2}+i/3}{-\sqrt{8}-2i/3}$

$(f)$ $\dfrac{-4+19i}{2+5i}$

$(g)$ $(1+i)^2$

$(h)$ $(1-i)^{20}$

**Exercício 2.** Determine e esboce as regiões do plano complexo dadas abaixo:

$(a)$ $\{z \in \mathbb{C};\ |z+1-5i| \leq 3/2\}$

$(b)$ $\{z \in \mathbb{C};\ 0 < |z| < 1\}$

$(c)$ $\{z \in \mathbb{C};\ 0 < |z| \leq 1\}$

$(d)$ $\{z \in \mathbb{C};\ \pi < |z-4+2i| < 3\pi\}$

$(e)$ $\{z \in \mathbb{C};\ |\arg z| < \pi/4\}$

$(f)$ $\{z \in \mathbb{C};\ -\pi \leq |\operatorname{Im}(z)| < \pi\}$

**Exercício 3.** Encontre $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ e determine o valor da função nos pontos dados:

$(a)$ $f(z) = 5z^2 - 12z + 3 + 2i$ no ponto $z_0 = 4-3i$

$(b)$ $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$ no ponto $z_0 = 1-i$

$(c)$ $f(z) = \dfrac{z-2}{z+2}$ no ponto $z_0 = 8i$

**Exercício 4.** Encontre $f'(z_0)$:

$(a)$ $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$, $z_0 = i$

$(b)$ $f(z) = (z-4i)^8$, $z_0 = 3+4i$

$(c)$ $f(z) = \dfrac{z^3}{(z+i)^3}$, $z_0 = i$

**Exercício 5.** Dada a função $f(z)$ abaixo, decida se $f$ é ou não holomorfa.

$(a)$ $f(z) = iz\bar{z}$

$(b)$ $f(z) = e^{-2x}\big(\cos(2y) - i\operatorname{sen}(2y)\big)$

$(c)$ $f(z) = e^{x}\big(\cos(y) - i\operatorname{sen}(y)\big)$

$(d)$ $f(z) = \operatorname{Re}(z^2) - i\operatorname{Im}(z^2)$

**Exercício 6.** Quais das funções abaixo são harmônicas? Se é harmônica, encontre sua função harmônica conjugada (de modo que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ seja holomorfa).

$(a)$ $u(x,y) = x^2 + y^2$

$(b)$ $u(x,y) = xy$

$(c)$ $v(x,y) = xy$

$(d)$ $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$

$(e)$ $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

$(f)$ $v(x,y) = e^{x}\operatorname{sen}(2y)$

**Exercício 7.** Calcule:

$(a)$ $e^{3+4i}$

$(b)$ $e^{2+3\pi i}$

$(c)$ $e^{11\pi i/2}$

$(d)$ $e^{2\pi i(1+i)}$

**Exercício 8.** Encontre $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$.

$(a)$ $f(z) = e^{z^2}$

$(b)$ $f(z) = e^{1/z}$

**Exercício 9.** Encontre o valor principal de:

$(a)$ $\operatorname{Log}(-11)$

$(b)$ $\operatorname{Log}(4-4i)$

$(c)$ $\operatorname{Log}(1+i)$

$(d)$ $(2i)^{2i}$

$(e)$ $(1-i)^{1+i}$

$(f)$ $i^{i/2}$

$(g)$ $(3+4i)^{1/3}$

$(h)$ $(-1)^{2-i}$

RESPOSTAS

1a. $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$

1b. $4\sqrt{2}e^{3\pi i/4}$

1c. $5e^{i\pi}$

1d. $\sqrt{1+\pi^2}e^{i\arctan\pi} = \sqrt{1+\pi^2}e^{i\cdot 1{,}262627\ldots}$

1e. $\frac{1}{2}e^{i\pi}$

1f. $\sqrt{13}e^{i\arctan(2/3)} = \sqrt{13}e^{i\cdot 0{,}588002\ldots}$

1g. $2e^{i\pi/2}$

1h. $1024e^{-5\pi i}$

2a. Disco de raio 3/2 (incluindo a borda), centrado em $z_0 = -1+5i$

2b. Disco sem um ponto: de raio 1 (não incluindo a borda), centrado em $z_0 = 0$ (não incluindo $z_0$)

2c. Disco sem um ponto: de raio 1 (incluindo a borda do círculo de raio 1), centrado em $z_0 = 0$ (não incluindo $z_0$)

2d. Anel: região entre dois círculos, ambos centrados em $z_0 = 4-2i$, um de raio $\pi$, outro de raio $3\pi$

2e. Cone infinito que se encontra apenas no primeiro e quarto quadrantes, entre as retas de inclinação $-\pi/4$ e $\pi/4$

2f. Faixa horizontal infinita

3a. $u(x,y) = 5x^2 - 5y^2 - 12x + 3,\ v(x,y) = 10xy - 12y + 2,\ f(4-3i) = -10-82i$

3b. $u(x,y) = \dfrac{x-1}{(x-1)^2+y^2},\ v(x,y) = \dfrac{-y}{(x-1)^2+y^2},\ f(1-i) = i$

3c. $u(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-4}{(x+2)^2+y^2},\ v(x,y) = \dfrac{4y}{(x+2)^2+y^2},\ f(8i) = \dfrac{15+8i}{17}$

4a. $f'(z) = \dfrac{2i}{(z+i)^2}$ e $f'(i) = -\frac{i}{2}$

4b. $f'(z) = 8(z-4i)^7$ e $f'(3+4i) = 17496$

4c. $f'(z) = \dfrac{3iz^2}{(z+i)^4}$ e $f'(i) = -\frac{3i}{16}$

5a. Não é

5b. É

5c. Não é

5d. Não é

6a. Não é

6b. É e $v(x,y) = \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{2}$

6c. É e $u(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$

6d. É e $v(x,y) = 3x^2y - y^3$

6e. Não é

6f. Não é

7a. $e^3 \cos(4) + ie^3 \operatorname{sen}(4) = -13,12... - i15,20...$

7b. $-e^2 = -7,38905...$

7c. $-i$

7d. $e^{-2\pi} = 535,4916...$

8a. $u(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy),\ v(x,y) = e^{x^2-y^2}\operatorname{sen}(2xy)$

8b. $u(x,y) = \exp\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)\cos\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right),\ v(x,y) = -\exp\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$

9a. $\log(11) + i\pi$

9b. $\log(4\sqrt{2}) + i\dfrac{3\pi}{4}$

9c. $\log\sqrt{2} + i\dfrac{\pi}{4}$

9d. $e^{-\pi + i\log 4}$

9e. $e^{\log\sqrt{2}+\pi/4+i(\log\sqrt{2}-\pi/4)}$

9f. $e^{-\pi/2+i\log(1)/2}$

9g. $e^{\log(5)/3+i\arctan(4/3)/3}$

9h. $e^{\pi^2}$