Lista 11

MAT01168 – Matemática Aplicada II – 2015/1

Exercício 1. Descreva e faça um esboço dos caminhos com representação paramétrica dada por:

(a) $z(t) = \left(1 + \dfrac{i}{2}\right) t,\ t \in [2, 5]$

(b) $z(t) = 3 + i + (1 - i)t,\ t \in [0, 3]$

(c) $z(t) = t + 2it^2,\ t \in [1, 2]$

(d) $z(t) = 1 + i + e^{-\pi it},\ t \in [0, 2]$

(e) $z(t) = 2 + 4e^{\pi it/2},\ t \in [0, 2]$

(f) $z(t) = 5e^{-it},\ t \in [0, \pi/2]$

Exercício 2. Encontre uma representação paramétrica para

(a) O segmento entre $-1 + 1$ e $1 + 3i$

(b) De 0 até $2 + i$, apenas pela horizontal ou vertical

(c) Círculo unitário, sentido anti–horário

(d) Círculo unitário, sentido horário

(e) Elípse $4x^2 + 9y^2 = 36$, sentido anti–horário

(f) $\{z \in \mathbb{C};\ |z + a + bi| = r\}$

Exercício 3. Calcule:

(a) $\displaystyle\int_C \operatorname{Re} z\ dz$, onde C = caminho mais curto de $1 + i$ a $3 + 3i$

(b) $\displaystyle\int_C e^z\ dz$, onde C = caminho mais curto de πi a $2\pi i$

(c) $\displaystyle\int_C \cos(2z)\ dz$, onde C = semi–círculo $|z| = \pi, x \geq 0$, de $-\pi i$ a πi

(d) $\displaystyle\int_C \left(z + \frac{1}{z}\right)\ dz$, onde C = círculo unitário, sentido anti–horário

Exercício 4. Para quais curvas C, o Teorema Integral de Cauchy garante que:

(a) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z}\ dz = 0?$

(b) $\displaystyle\int_C \frac{e^{1/z^2}}{z^2 + 16}\ dz = 0?$

Exercício 5. Calcule $\displaystyle\oint_C f(z)\ dz$, para C = círculo unitário, sentido anti–horário. Indique quando que o Teorema de Cauchy pode ser aplicado.

(a) $f(z) = e^{-z^2}$

(b) $f(z) = \dfrac{1}{(2z - 1)}$

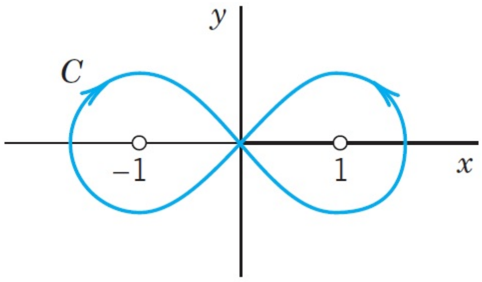
(c) $f(z) = \operatorname{Im} z$

(d) $f(z) = \tan(z/4)$

Exercício 6. Utilize frações parciais para calcular

$$\oint_C \frac{1}{z^2 - 1}\ dz,$$

onde a curva fechada C é como na figura:



Exercício 7. Calcule
$$\oint_C \frac{e^z}{z}\, dz,$$
onde C consiste de $|z| = 2$ no sentido anti–horário e $|z| = 1$ no sentido horário.

Exercício 8. Integre a função $f(z) = \dfrac{z^2}{z^2 - 1}$ pela Fórmula Integral de Cauchy, no sentido anti–horário, nos círculos:

(a) $|z + 1| = 1$

(b) $|z - 1 - i| = \pi/2$

(c) $|z + i| = 1,4$

(d) $|z + 5 - 5i| = 7$

Exercício 9. Calcule a integral de contorno no sentido anti–horário:

(a) $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^2 + 4}\, dz$, onde $C : 4x^2 + (y - 2)^2 = 4$

(b) $\displaystyle\oint_C \frac{z}{z^2 + 4z + 3}\, dz$, onde C : círculo de centro -1 e raio $3/2$

(c) $\displaystyle\oint_C \frac{z + 2}{z - 2}\, dz$, onde $C : |z - 1| = 2$

Exercício 10. Calcule a integral no círculo unitário, sentido anti–horário:

(a) $\displaystyle\oint_C \frac{\operatorname{sen} z}{z^4}\, dz$

(b) $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z^n}\, dz,\ n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

(c) $\displaystyle\oint_C \frac{\cos z}{z^{2n+1}}\, dz,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Exercício 11. Calcule:

(a) $\displaystyle\oint_C \frac{z^3 + \operatorname{sen} z}{(z - i)^3}\, dz$, onde C : bordo do quadrado de vértices $\pm 2, \pm 2i$, no sentido anti–horário

(b) $\displaystyle\oint_C \frac{\tan(\pi z)}{z^2}\, dz$, onde C : elípse $16x^2 + y^2 = 1$, no sentido horário

(c) $\displaystyle\oint_C \frac{e^{z^2}}{z(z - 2i)^2}\, dz$, onde $C : |z - 3i| = 2$, no sentido horário

RESPOSTAS – Em breve

1a. Segmento de reta que une $2 + i$ a $(5 + 5i)/2$

1b. Segmento de reta que une $3+i$ a $6-2i$

1c. Pedaço de uma parábola (pense que se $x=t$, $y=2x^2$)

1d. Círculo de centro $1+i$ e raio 1, percorrido no sentido horário

1e. Semi–círculo de centro 2 e raio 4 (parte superior), percorrido no sentido anti–horário

1f. Um quarto de um círculo (parte do quadrante 4) de centro 0 e raio 5, percorrido no sentido horário.

2a. $z(t)=(1-t)(-1+i)+t(1+3i)$, para $t\in[0,1]$

2b. $z(t)=\begin{cases} 4t, & \text{para } t\in[0,1/2] \\ 2+i(2t-1), & \text{para } t\in[1/2,1] \end{cases}$

2c. $z(t)=e^{it}$, para $t\in[0,2\pi]$

2d. $z(t)=e^{-it}$, para $t\in[0,2\pi]$

2e. $z(t)=3\cos t+2i\,\text{sen}\,t$, para $t\in[0,2\pi]$

2f. $z(t)=-a-bi+re^{it}$, para $t\in[0,2\pi]$, se no sentido anti–horário; $z(t)=-a-bi+re^{-it}$, se no sentido horário.

3a. $4+4i$

3b. 2

3c. $2i\,\text{senh}(2\pi)$

3d. $2\pi i$

4a. Para qualquer curva fechada simples tal que o ponto $z=0$ não esteja contido na região limitada pela curva.

4b. Pelo Teorema de Cauchy, para qualquer curva fechada simples tal que os pontos $z=0,\pm4i$ não estejam contidos na região limitada pela curva. Note que $z=0$ também é uma singularidade, mas pelo Teorema dos Resíduos, poderíamos afirmar que a integral é zero para qualquer curva fechada simples tal que apenas os pontos $z=\pm4i$ não estejam contidos na região delimitada pela curva (por quê?).

5a. 0, pelo Teorema de Cauchy.

5b. πi, não podemos aplicar o Teorema de Cauchy.

5c. $-\pi$, não podemos aplicar o Teorema de Cauchy.

5d. 0, pelo Teorema de Cauchy.

6. $2\pi i$

7. 0

8a. $-\pi i$

8b. πi

8c. 0

8d. $-\pi i$

9a. $\pi/2$

9b. $-\pi i$

9c. $8\pi i$

10a. $-\dfrac{\pi i}{3}$

10b. $\dfrac{2\pi i}{(n-1)!}$

10c. $\dfrac{2\pi i(-1)^n}{(2n)!}$

11a. $-6\pi + \dfrac{1}{2}\left(e + \dfrac{1}{e}\right) = -6\pi + \operatorname{senh}(1)$

11b. $2\pi^2 i$

11c. $\dfrac{1-4i}{4e^4}$