UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL-UFRGS **DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA** **MATEMÁTICA APLICADA II**	Área I 2^a Lista de Exercícios Geometria Diferencial e Movimento de uma Partícula ao Longo de uma Curva C

[1] Encontre os vetores unitários $\vec{T}$ e $\vec{N}$ para as curvas abaixo em $t = t_0$.

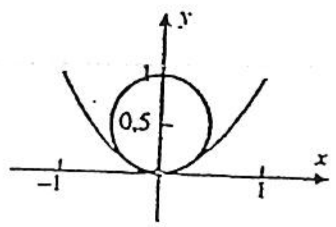
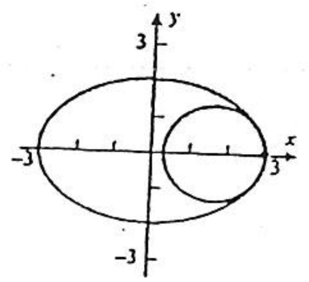
(a) $\vec{r}(t) = 5\cos t\,\vec{i} + 5\,\text{sen}\,t\,\vec{j}$, $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$	R: $\vec{T} = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $\vec{N} = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
(b) $\vec{r}(t) = (t^2 - 1)\,\vec{i} + t\vec{j}$, $t_0 = 1$	R: $\vec{T} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{N} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

[2] O vetor binormal unitário foi definido em aula como $\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$. Argumente, sem cálculos, que ele também poderia ser definido como: $\vec{B}(t) = \dfrac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}$.

[3] Use esta última fórmula para calcular $\vec{B}(t)$ para a curva C:
$\vec{r}(t) = (\text{sen}\,t - t\cos t)\,\vec{i} + (\cos t + t\,\text{sen}\,t)\,\vec{j} + \vec{k}$

R: $\vec{B}(t) = -\vec{k}$

[4]

Para cada uma das curvas ao Lado, use a respectiva circunferência de curvatura para estimar o raio de curvatura ρ. R: (a) $\rho = 0{,}5$ (b) $\rho \approx 1{,}25$	(a)  	(b) 

[5] Calcule a curvatura $\kappa(t)$ e faça um esboço da curva com a respectiva circunferência de curvatura:

(a) $y = \dfrac{1}{x}$, em $x = 1$ R: $\kappa = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$	(b) $y = \dfrac{1}{2}x^2$, em $x = -1$ R: $\kappa = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$	(c) $y = e^x$, em $x = 0$ R: $\kappa = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

[6] Calcule o raio de curvatura $\rho(t)$ da elipse $x(t) = 2\cos t$, $y(t) = \text{sen}\,t$, $0 \le t \le 2\pi$, em $t = 0$ e $t = \dfrac{\pi}{2}$. Esboce as circunferências de curvatura nestes pontos. R: $\rho(0) = \dfrac{1}{2}$, $\rho\left(\dfrac{\pi}{2}\right) =$

[7] Em que ponto a curva $y = e^x$ tem a máxima curvatura? R: $t = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$

[8] Seja $\vec{r}(t)$ o vetor-posição de uma partícula em movimento e t o tempo. Encontre $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$ e $\|\vec{v}(t)\|$. Faça um esboço da trajetória representando $\vec{v}(t)$, e $\vec{a}(t)$ em t_0:

(a) $\vec{r}(t) = 3\cos t\,\vec{i} + 3\,\text{sen}\,t\,\vec{j}$, $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$ R: $\vec{v}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$, $\vec{a}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$	(b) $\vec{r}(t) = e^t\,\vec{i} + e^{-t}\,\vec{j}$, $t_0 = 0$ R: $\vec{v}(0) = (1, -1)$, $\vec{a}(0) = (1, 1)$
(c) $\vec{r}(t) = \cosh t\,\vec{i} + \text{senh}\,t\,\vec{j}$, $t_0 = \ln 2$ R: $\vec{v}(\ln 2) = \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{4}\right)$, $\vec{a}(\ln 2) = \left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{3}{4}\right)$	(d) $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \text{sen}\,t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$, $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$ R: $\vec{v}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, $\vec{a}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

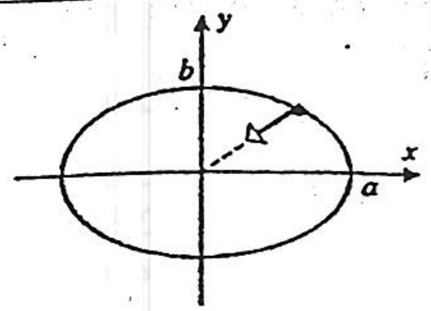
[9]

Conforme o gráfico ao lado, a trajetória de uma partícula é representada na forma paramétrica por:

$x(t) = a\ \cos\omega t\,,\ y(t) = b\ \text{sen}\,\omega t$

(a) Mostre que a aceleração $\vec{a}(t)$ está voltada em direção à origem.

(b) Mostre que $\|\vec{a}(t)\|$ é proporcional à distância da partícula à origem.



[10] O movimento de uma partícula é descrito por $\vec{r}(t) = (t - t^2)\,\vec{i} - t^2\,\vec{j}$. Encontre o valor mínimo para $\|\vec{v}(t)\|$ da partícula e sua localização quando tiver esta velocidade.

R: $\|\vec{v}(t)\|_{\min} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,,\ P\left(\dfrac{3}{16}, -\dfrac{1}{16}\right)$

[11] Encontre o ângulo entre $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$ para $\vec{r}(t) = t^3\,\vec{i} + t^2\,\vec{j}\,,\ t = 1$. R: 15^0

[12] Onde ao longo da trajetória $\vec{r}(t) = (t^2 - 5t)\,\vec{i} + (2t+1)\,\vec{j} + 3t^2\,\vec{k}$, os vetores velocidade e aceleração são ortogais. R: $P\left(-\dfrac{19}{16}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{16}\right)$

[13] Prove que se o módulo da velocidade de uma partícula é constante, então os vetores velocidade e aceleração são perpendiculares. (Sugestão: Considere $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \bullet \vec{v}$)

[14] Prove que se a aceleração de uma partícula em movimento é zero para todo t, então a partícula se move ao longo de uma reta. (Sugestão: lembre-se que $\kappa(t) = \dfrac{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}{v^3}$)

[15] Calcule a componente tangencial a_T e a componente normal a_N da aceleração, em $t = t_0$, para:

(a) $\vec{r}(t) = 2\ \cos t\,\vec{i} + 2\ \text{sen}\ t\,\vec{j}\,,\ t_0 = \dfrac{\pi}{3}$ R: $a_T = 0,\ a_N = 2$	(b) $\vec{r}(t) = e^{-t}\,\vec{i} + e^{t}\,\vec{j}\,,\ t_0 = 0$ R: $a_T = 0,\ a_N = \sqrt{2}$
(c) $\vec{r}(t) = (t^3 - 2t)\,\vec{i} + (t^2 - 4)\,\vec{j}\,,\ t_0 = 1$ R: $a_T = 2\sqrt{5},\ a_N = 2\sqrt{5}$	(d) $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + t^3\,\vec{k}\,,\ t_0 = 1$ R: $a_T = \dfrac{22}{\sqrt{14}},\ a_N = \sqrt{\dfrac{38}{7}}$

[16] Dados $\vec{v} = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{a} = \vec{i} + 2\,\vec{k}$ num certo ponto. Determine a_T, a_N, $\vec{T}$ e $\vec{N}$ neste instante.

R: $a_T = \dfrac{4}{3}$	$a_N = \dfrac{\sqrt{29}}{3}$	$\vec{T} = \dfrac{1}{3}\left(2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k}\right)$	$\vec{N} = \dfrac{\vec{i} - 8\,\vec{j} + 14\,\vec{k}}{3\sqrt{29}}$

[17] Calcule a componente tangencial da aceleração dado $\|\vec{v}\| = \sqrt{3t^2 + 4}\,,\ t = 2$. R: $\dfrac{3}{2}$

[18] O acelerador do Laboratório Enrico Femi é circular e possui um raio de $1\,km$. Ache a componente normal da aceleração de um próton movendo-se em torno do acelerador com uma velocidade de módulo constante e igual a $2{,}9 \times 10^5\ km/s$. R: $8{,}41 \times 10^{10}\ km/s^2$