Matemática Aplicada II—Área I 4ª Lista de Exercícios

Aplicação dos Conceitos de Gradiente, Divergente e Rotacional

[1] Mostre que se $\vec{F}$ é um campo vetorial conservativo, então $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$.

[2] Dado o campo vetorial regido pela lei inverso do quadrado $\vec{F} = k\frac{1}{r^3}\vec{r}$, sem usar coordenadas cartesianas, mostre que:

(a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 \quad , \quad |\vec{r}| \neq 0$.

(b) $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$.

(c) $\varphi(r) = -\frac{k}{r}$ é a função potencial associada ao campo $\vec{F} = k\frac{1}{r^3}\vec{r}$.

[3] Uma partícula de massa m e velocidade $\vec{v}$ é atraida para a origem por uma força central dada por $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$. Mostre que o momentum angular $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ é constante, isto é $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$.

[4]Use a equação da continuidade para mostrar que para um fluído incompressível e em estado estacionário o campo de velocidade $\vec{v}$ é tal que $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$.

[5] O escoamento de um fluído incompressível e estacionário é regido pelo campo vetorial. $\vec{v}$ Verifique em cada caso, se há fontes ou sumidouros em alguma região do espaço:

(a) $\vec{v} = (x + y)\ \vec{i} - xz^3\vec{j} + x^2 \text{seny}\ \vec{k}$ (b) $\vec{v} = xy\ \vec{i} - xy\ \vec{j} + y^2\ \vec{k}$

(c) $\vec{v} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$

[6] Supondo que um fluído gira como um corpo rígido com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega_0\ \vec{k}$ mostre que $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\text{rot}\ \vec{v}$.

[7] Em cada caso é dada a velocidade $\vec{v}$ do movimento estacionário de um fluído. Encontre $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ e diga se o campo $\vec{v}$ é um campo irrotacional ou um campo de vórtice:

(a) $\vec{v} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$ (b) $\vec{v} = -2y\vec{i} + 2x\vec{j}$ (c) $\vec{v} = y^2\vec{i}$

[8] Um campo central dado por $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$ é irrotacional?

[9] Qual a lei da Física que está por trás do conceito de campo conservativo?

[10] Discuta o significado físico da equação da continuidade.