Lista 5*

MAT01168 – Matemática Aplicada II – 2015/1

Exercício 1. Encontre por integração:

(a) $1 * 1$

(b) $t * e^t$

(c) $1 * \cos(\omega t)$

(d) $e^{kt} * e^{-kt}$

Exercício 2. Achar a solução dos seguintes problemas de valor inicial:

(a) $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \delta(t-5) - u(t-10) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1/2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y'' + y = \delta(t-2\pi) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$

Exercício 3. Por integração, justifique as seguintes propriedades da operação de convolução:

(a) $f * g = g * f$

(b) $(f * g) * h = f * (g * h)$

(c) $f * (g + h) = f * g + f * h$

(d) $(\delta * f)(t) = f(t)$

Cuidado para não confundir as variáveis de integração que aparecerão no item (b).

Exercício 4. A equação do movimento de um OHS não amortecido sujeito a oscilações forçadas pode ser escrita como

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = r(t), \qquad \text{onde } \omega := \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ e } r(t) = \frac{F_{\text{ext}}(t)}{m}.$$

(a) Pelo método da transformada de Laplace, encontre $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$.

(b) Com o auxílio do Teorema da Convolução, encontre $y(t)$ (em termos de $R = \mathcal{L}(r)$).

Exercício 5. Use o Teorema da Convolução para calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right).$$

Exercício 6. Use o Teorema da Convolução para resolver as seguintes equações integrais:

(a) $y(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t y(\tau)\, d\tau$

(b) $y(t) = 1 - \displaystyle\int_0^t y(\tau)(t-\tau)\, d\tau$

(c) $y(t) = te^t - 2e^t \displaystyle\int_0^t e^{-\tau} y(\tau)\, d\tau$

(d) $y(t) = 1 - \operatorname{senh} t + \displaystyle\int_0^t (1+\tau) y(t-\tau)\, d\tau$

RESPOSTAS

1a. t

1b. $e^t - t - 1$

1c. $\dfrac{1}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t)$

*Reprodução da quinta lista sobre a transformada de Laplace da Prof. Irene Strauch, com alguns exercícios adicionais.

1d. $\dfrac{1}{2k}(e^{kt}-e^{-kt})=\dfrac{1}{k}\operatorname{senh}(kt)$

2a. $y(t)=e^{-t}\operatorname{sen}t+e^{\pi}e^{-t}\operatorname{sen}(t-\pi)u(t-\pi)+e^{-t}\cos t=e^{-t}\operatorname{sen}t\big(1-e^{\pi}u(t-\pi)\big)+e^{-t}\cos t$

2b. $y(t)=\dfrac{1}{2}(e^{-t}-e^{-2t})+(e^{5-t}-e^{10-2t})u(t-5)+\dfrac{1}{2}(1-2e^{10-t}+e^{20-2t})u(t-10)$

2c. $y(t)=\operatorname{sen}t+\operatorname{sen}(t-2\pi)u(t-2\pi)$

4a. $F(s)=\dfrac{sy(0)+y'(0)}{s^2+w^2}+\dfrac{R(s)}{s^2+w^2}$

4b. $y(t)=y(0)\cos(\omega t)+\dfrac{y'(0)\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega}+\dfrac{\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega}*r(t)$

5. $\dfrac{1}{2}\big[\operatorname{sen}t-\cos t+e^{-t}\big]$

6a. $y(t)=e^{t}$

6b. $y(t)=\cos t$

6c. $y(t)=\operatorname{senh}t$

6d. $y(t)=\cosh t$