Lista 6*

MAT01168 – Matemática Aplicada II – 2015/1

Exercício 1. Use a tabela da transformada de Laplace para mostrar que:

(a) $\mathcal{L}\big\{t^{1/2} + t^{-1/2}\big\} = \dfrac{\sqrt{\pi}(2s+1)}{2s^{1/2}}$

(b) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{e^{-2t}}{\sqrt{t}}\right\} = \sqrt{\dfrac{\pi}{s+2}}$

(c) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\cos(2\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\right\} = e^{-1/s}\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$

Exercício 2. Use o método das séries de potências para mostrar que

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}\sqrt{t}\} = \frac{\sqrt{\pi}e^{-1/4s}}{2s^{3/2}}.$$

Sugestão: Use que

$$\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right) = \frac{(2n+1)!}{n!2^{2n+1}}\sqrt{\pi}.$$

Exercício 3. Usando a derivada da transformada de Laplace, calcule:

(a) $\mathcal{L}\{t\operatorname{senh}(at)\}$

(b) $\mathcal{L}\{t\cosh(at)\}$

Exercício 4. Resolva

$$\begin{cases} ty''(t) + 2y'(t) + ty(t) = 0 \\ y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Sugestão: Utilize que $\lim\limits_{s\to+\infty} Y(s) = 0$.

Exercício 5. Utilize a integral da transformada de Laplace para demonstrar que:

(a) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\operatorname{senh} t}{t}\right\} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{s+1}{s-1}\right)$

(b) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{2}{t}\big(1-\cos(\omega t)\big)\right\} = \ln\left(\dfrac{s^2+\omega^2}{s^2}\right)$

(c) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{2}{t}\big(1-\cosh(\omega t)\big)\right\} = \ln\left(\dfrac{s^2-\omega^2}{s^2}\right)$

Exercício 6. Faça o gráfico de $f(t)$ e calcule $\mathcal{L}\big\{f(t)\big\}$.

(a) f periódica de período $p = 4$ e $f(t) = \begin{cases} 3t, & \text{se } t \in (0,2) \\ 6, & \text{se } t \in (2,4) \end{cases}$

(b) f periódica de período $p = 2\pi$ e $f(t) = e^t$, para $t \in (0, 2\pi)$.

(b) $f(t) = |\operatorname{sen}(\omega t)|$.

Exercício 7. Para k constante, encontre a solução de

(a) $\begin{cases} 2y''(t) + 8y(t) = kh(t-a) \\ y(0) = 10, y'(0) = 0 \end{cases}$

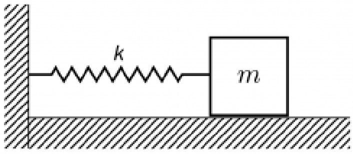
(b) $\begin{cases} 2y''(t) + 8y(t) = k\delta(t) \\ y(0) = 10, y'(0) = 0 \end{cases}$

Exercício 8. Encontre

*Reprodução da sexta lista sobre a transformada de Laplace da Prof. Irene Strauch, com pequenas modificações.

(a) $\mathcal{L}\big\{th(t-1)+t^2\delta(t-1)\big\}$ (b) $\mathcal{L}\big\{(\cos t)(\ln t)\delta(t-1)\big\}$

Exercício 9. Considere o OHS não amortecido representado na figura abaixo. Suponha que, em $t=0$, a massa m está em sua posição de equilíbrio. Encontre o deslocamento $x(t)$ para $t>0$, se uma força $F_0\delta(t)$ é aplicada.



RESPOSTAS

3a. $\dfrac{2as}{(s^2-a^2)^2}$

3b. $\dfrac{s^2+9}{(s^2-9)^2}$

4. $y(t)=\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$

6a. $\dfrac{3-3e^{-2s}-6se^{-4s}}{s^2(1-e^{-4s})}$

6b. $\dfrac{e^{2\pi(1-s)}-1}{(1-s)(1-e^{-2\pi s})}$

6c. $\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\coth\left(\dfrac{\pi s}{2\omega^2}\right)$

7a. $y(t)=10\cos(2t)+\dfrac{k}{8}\Big(1-\cos\big(2(t-a)\big)\Big)u(t-a)$

7b. $y(t)=10\cos(2t)+\dfrac{k}{4}\operatorname{sen}(2t)$

8a. $\dfrac{e^{-s}(s^2+s+1)}{s^2}$

8b. $-e^{-\pi s}\ln\pi$

9. $y(t)=\dfrac{F_0}{\sqrt{km}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)$