Lista 8

MAT01168 – Matemática Aplicada II – 2015/1

Exercício 1. Lembre da definição

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\big\{f(x)\big\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx$$

e mostre que

$$\hat{f}'(\omega) = -i\mathcal{F}\big\{x f(x)\big\}.$$

Exercício 2. Calcule a transformada de Fourier $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\big\{f(x)\big\}$ das funções abaixo:

(a) $f(x) = e^{-b|x|}$, para $x \in \mathbb{R}$, onde $b > 0$ é constante.

(b) $f(x) = x^2 e^{-|x|}$, para $x \in \mathbb{R}$.

(c) $f(x) = 3u(x) - 3u(x - 15)$, para $x \in \mathbb{R}$ (u é a função de Heaviside).

(d) $f(x) = \delta(x + 3) + 3\delta(x - 8)$, para $x \in \mathbb{R}$ (δ é a função de Dirac).

(e) $f(x) = \begin{cases} 4x, & \text{se } x \in (a, b) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Exercício 3. Explique, sem fazer contas, o método que utilizamos em aula para determinar:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$,

(b) $\mathcal{F}\big\{e^{-x^2/2}\big\} = e^{-\omega^2/2}$.

Em seguida, sem consultar livros ou notas de aula, faça as contas com detalhes.

Exercício 4. Justifique a propriedade de mudança de escala: Se a é um número real não nulo, então

$$\mathcal{F}\big\{f(at)\big\} = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\omega/a).$$

Sugestão: Analise os casos $a > 0$ e $a < 0$ separadamente.

Exercício 5. Como consequência dos exercícios anteriores, mostre que

$$\mathcal{F}\big\{e^{-ax^2}\big\} = \frac{1}{\sqrt{2a}}\, e^{-\omega^2/4a}, \quad a > 0.$$

Exercício 6. Utilizando a Transformada de Fourier (de que forma?), obter a solução geral da equação diferencial ordinária

$$y''(x) - 5y(x) = e^{-3|x|}, \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

RESPOSTAS

2a. $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\ \dfrac{b}{b^2+\omega^2}$

2b. $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{2-6\omega^2}{(1+\omega^2)^3}$

2c. $\dfrac{3}{\sqrt{2\pi}}\cdot\dfrac{1-e^{-15\omega i}}{i\omega}=\dfrac{3}{\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{\operatorname{sen}(15\omega)}{\omega}+i\ \dfrac{\cos(15\omega)-1}{\omega}\right)$

2d. $\dfrac{e^{3\omega i}+3e^{-8\omega i}}{\sqrt{2\pi}}=\dfrac{\big(\cos(3\omega)+3\cos(8\omega)\big)+i\big(\operatorname{sen}(3\omega)-3\operatorname{sen}(8\omega)\big)}{\sqrt{2\pi}}$

2e. $2\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(-\,i\ \dfrac{ae^{-a\omega i}}{\omega}+i\ \dfrac{be^{-b\omega i}}{\omega}+\dfrac{e^{-b\omega i}}{\omega^2}-\dfrac{e^{-a\omega i}}{\omega^2}\right)$

6. $\dfrac{1}{4}e^{-3|x|}-\dfrac{3}{4\sqrt{5}}e^{-\sqrt{5}|x|}$