Lista 9

MAT01168 – Matemática Aplicada II – 2015/1

Exercício 1. Repita o processo visto em aula para justificar que a solução da equação do calor

$$\begin{cases} u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), & \text{para } x \in (-\infty,+\infty), t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = f(x), & \text{para } x \in (-\infty,+\infty), \end{cases}$$

é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4c^2 t}} \, dy.$$

Sugestão: Utilize o Exercício 5 da Lista 8, quando necessário.

Exercício 2. Utilize o Exercício 1 e recursos computacionais para analisar a evolução temporal da solução da EDP

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & \text{para } x \in (-\infty,+\infty), t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = e^{-|x|}, & \text{para } x \in (-\infty,+\infty). \end{cases}$$

Escolha pelo menos 5 valores variados para t, alguns muito próximos de zero, outros muito grandes.

Exercício 3. A equação de difusão de temperatura em uma barra infinita com termo fonte é dada por

$$\begin{cases} u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), & \text{para } x \in (-\infty,+\infty), t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = 0, & \text{para } x \in (-\infty,+\infty). \end{cases}$$

A função $f(x,t)$ modela uma fonte de calor. Encontre a solução deste problema. Em seguida, escreva a solução nos seguintes exemplos:

(a) $f(x,t) = \begin{cases} 100, & \text{se } x \in (-1,1), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

(b) $f(x,t) = \delta(x-a)$

(c) $f(x,t) = \delta(t-b)$

Exercício 4. Considere a equação da onda

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), & \text{para } x \in (-\infty,+\infty), t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = f(x), & \text{para } x \in (-\infty,+\infty), \\ u_t(x,0) = g(x), & \text{para } x \in (-\infty,+\infty). \end{cases}$$

(a) Como visto em aula, mostre que, se $g(x) \equiv 0$, então a solução da equação é dada por

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2}.$$

(b) Mostre que, se $f(x) \equiv 0$, então a solução da equação é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) \, dy.$$

Sugestão: Qual a transformada inversa de $\dfrac{\hat{h}(\omega)}{i\omega}$?

(c) Conclua, por linearidade, que a solução do problema geral acima é

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) \, dy.$$

RESPOSTAS

3. $\displaystyle \frac{1}{2c\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4c^2(t-\tau)}} f(y,\tau)\; dy\; d\tau.$

3a. $\displaystyle \frac{50}{c\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{(x-y)^2}{4c^2(t-\tau)}}\; dy\; d\tau.$

3b. $\displaystyle \frac{1}{2c\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-a)^2}{4c^2(t-\tau)}}\; d\tau.$

3c. $\displaystyle \frac{1}{2c\sqrt{\pi(t-b)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4c^2(t-b)}}\; dy.$