

# ANÁLISE DE FOURIER

EM

NOVE AULAS

Prof<sup>a</sup> Irene Strauch  
Área III da disciplina de Matemática Aplicada  
Departamento de Matemática Pura e Aplicada  
Instituto de Matemática -UFRGS

**Análise de Fourier: 1ª aula**

"O estudo profundo da natureza é a mais fecunda fonte de descobertas matemáticas".

"A Matemática parece ser uma faculdade da mente humana destinada a suplementar a brevidade da vida e a imperfeição dos sentidos".

Joseph Fourier (1768-1830).

Jean Joseph Baptiste Fourier se notabilizou com a sua Teoria Analítica do Calor, onde estudou a transmissão de calor em uma barra metálica longa, usando um método de séries que consiste em representar uma função periódica em termos de funções seno e cosseno.

Esta representação por séries teve um profundo significado, contribuindo significativamente para a evolução do conceito de função.

A atitude, naquela época, era chamar  $f(x)$  de função, se e somente se  $f(x)$  pudesse ser representada por uma expressão bem comportada como um polinômio. Se o gráfico de  $f(x)$  contivesse, por exemplo, vértices e lacunas, então  $f(x)$  não seria considerada uma função. Fourier, contudo, afirmava que os gráficos com lacunas e vértices podiam ser representados por séries trigonométricas e, portanto, deveriam ser tratados como funções legítimas, o que causou uma grande discussão na comunidade de matemáticos da época.

Finalmente em 1837, quando Fourier já havia morrido, Dirichlet (1805-1859) provou que a representação de Fourier estava correta enunciando o seu teorema. Este teorema ficou conhecido como as condições de Dirichlet para que uma função periódica possa ser representada por uma Série de Fourier.

Esta foi a origem do que hoje chamamos Análise de Fourier. Este grande "poema matemático", maneira como Lord Kelvin (1824-1907) se referiu a teoria de Fourier, tem aplicações que transcendem aos problemas físicos de transmissão de calor.

Hoje em dia, a Análise de Fourier tem aplicações não só na física moderna, mas em novas áreas do conhecimento surgidas nos últimos 15 anos e que tem recebido vários nomes (teoria de comunicação, sinais e sistemas, DSP-Digital Signal Processing, método das imagens usado em física-médica e em muitos outros campos).

Fourier foi um dos poucos físicos-matemáticos que tiveram a sorte de possuir um nome que se tornou permanente em todas as línguas, como um adjetivo bem conhecido da comunidade científico-tecnológica.

## Que vem a ser a Teoria da Comunicação e qual a sua relação com a Matemática ?

A comunicação entra diariamente em nossas vidas de tantas e de tão diversas maneiras que é fácil dar exemplos. Desde a fala humana, aos telefones, rádio, TV, a comunicação entre computadores, a comunicação via satélite.

Fundamentalmente, a comunicação envolve a transmissão da informação de um ponto a outro através de uma sucessão de processos: os sistemas.

Por exemplo, na fala humana estes processos envolvem acionar as cordas vocais, produzir sons, aqui chamados de sinais, que se propagam através do ar (meio físico) e é captado pelos nossos ouvidos, os receptores, e então processado pelo nosso cérebro. Neste exemplo os sistemas responsáveis pela produção e recepção dos sinais sonoros são de natureza biológica. Eles também poderiam ser executados usando sistemas eletrônicos que simulam ou imitam sua contrapartida biológica.

Devido aos avanços tecnológicos dos últimos 10-15 anos novas áreas do conhecimento se organizaram dando origem a tópicos que necessitam muito da matemática. Nós aqui vamos aproveitar o ensejo e introduzir os termos que são usuais nestas novas áreas. Áreas novas tem a sua própria nomenclatura. Assim os **sons** e as **imagens transmitidos** são chamados de *sinais* e todos os processos envolvidos na transmissão e recepção são os *sistemas*. Para descrever tanto os sinais como os sistemas precisamos de muita matemática. Neste tópico da matemática, vamos desenvolver a matemática de Fourier, a matemática das representações das funções.

### Sinais e Sistemas:

Assim, cada vez que mencionarmos a palavra sinal em nosso texto, estamos usando-a como um sinônimo de uma função matemática. De fato, um sinal é formalmente definido como uma função de uma ou mais variáveis, a qual veicula informações sobre a natureza de um fenômeno físico.

Em muitas situações, um sinal pode estar na forma de uma voltagem ou de uma corrente elétrica e a variável independente é o tempo. Contudo, dependendo da natureza do sinal e do tipo de informação a ser transmitida poderemos ter as coordenadas espaciais como variáveis.

### Classificação dos sinais :

Os sinais poderão ser descritos por funções reais ou complexas, mas em ambos casos, a variável independente é uma variável real. No caso de sinais complexos, o significado físico estará contido, separadamente, na parte real e imaginária do sinal e no módulo da função.

Os sinais poderão ser, também, periódicos, quase-periódicos ou aperiódicos.

Para os sinais periódicos se define a potência contida no sinal. Para os sinais não-periódicos se define a energia contida no sinal.

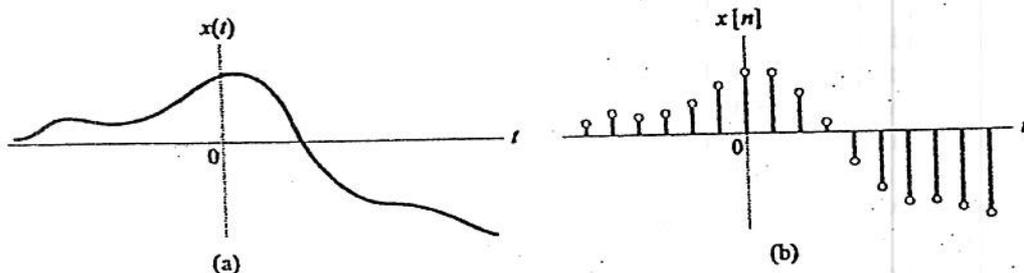
Os sinais podem, ainda, ser determinísticos, aleatórios (randômicos) ou caóticos. Um sinal determinístico é aquele para o qual não há nenhuma incerteza com relação ao seu valor no tempo. Sinais determinísticos podem ser modelados por funções específicas do tempo. Por outro lado, sinais aleatórios são sinais que, em cada instante de tempo, são descritos por variáveis aleatórias e são definidos em termos de sua densidade de probabilidade. Já os sinais caóticos são determinísticos, mas muito sensíveis às condições iniciais. Qualquer incerteza nas condições iniciais por menor que seja, crescerá exponencialmente com o tempo.

Neste texto, nos limitaremos a sinais determinísticos.

Um sinal é dito causal se é nulo para valores de  $t < 0$ . Será não-causal se assumir valores para  $t < 0$ . Lembrando que a variável  $t$  é o tempo, é necessário dar um significado a um tempo negativo quando comparado a um tempo positivo. Tempos negativos podem ser, em muitos contextos, entendidos como o passado, e tempos positivos como o futuro, com relação a um determinado instante  $t_0 = 0$ .

Os sinais podem ser, finalmente, analógicos ou discretos.

Um sinal analógico é um sinal que varia com o tempo de forma contínua, ou seja, a variável  $t$  é uma variável contínua. Por outro lado, um sinal discreto é representado por uma função de variável discreta, isto é, definida em instantes isolados de tempo, os quais, em geral, são uniformemente espaçados. A figura a seguir, ilustra a relação entre um sinal de tempo contínuo  $x(t)$  e um sinal de tempo discreto  $x[n]$  dele derivado.



Sinais analógicos surgem quando uma onda física, como por exemplo, uma onda acústica ou uma onda luminosa se converte em um sinal elétrico. A conversão é realizada através de um transdutor; exemplos incluem o microfone, o qual converte as variações de pressão das ondas acústicas em correspondentes variações de voltagem ou de correntes, e a célula fotoelétrica, a qual faz o mesmo com as variações da intensidade luminosa.

Um sinal de tempo discreto pode ser obtido de um sinal de tempo contínuo, fazendo-se uma amostragem do mesmo a uma taxa uniforme.

Um sinal discreto deverá ainda passar por mais duas etapas antes de se tornar um sinal digital, quais sejam, a quantização e a codificação.

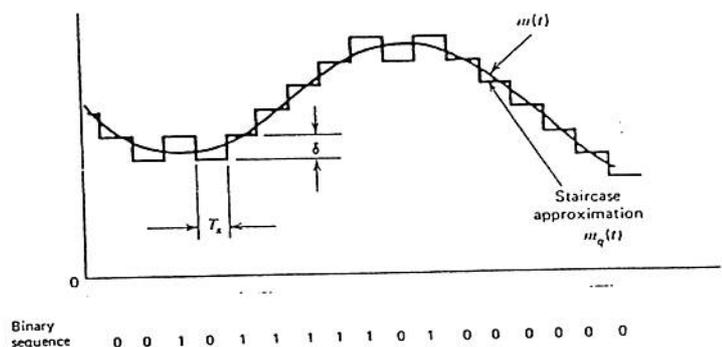
Resumindo,

A conversão analógico-digital passa por três etapas:

- Amostragem- é o processo no qual é feita uma amostragem em um sinal de tempo contínuo através de medidas de sua amplitude em tempos discretos.
- Quantização- consiste em representar os valores de amplitude resultantes das amostragens dentro de níveis discretos.
- Codificação- consiste em atribuir a cada nível quantizado um determinado código, que poderá ser o código binário formado de 0's e 1's.

A saída de um computador é um exemplo de sinal digital.

Ilustramos no gráfico abaixo, uma das possíveis maneiras de realizar as etapas necessárias para descrever a transição analógico-digital.



Na essência destes processos está a representação matemática dos sinais. Os métodos da Análise de Fourier, representando os sinais (as funções) em termos de componentes senoidais, tem sido sem sombra de dúvidas o método mais usado, ofuscando os demais pela sua reconhecida praticidade. Convém destacar que a utilização da Análise de Fourier torna-se ainda mais apropriada se o sistema físico for um sistema linear invariante no tempo.

Em primeiro lugar, é preciso entender, neste contexto, o que vem a ser um sistema. Um sistema é formalmente definido como uma entidade que manipula um ou mais sinais para realizar uma função específica, produzindo, assim, novos sinais. A interação entre um sistema e seus sinais associados é ilustrada esquematicamente na figura abaixo.

Um sistema é dito linear quando obedece o princípio da superposição, ou em outras palavras, obedece a conhecida propriedade da linearidade.

Assim, se  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  representam as respostas de um sistema às entradas  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , respectivamente, o sistema é linear se a resposta à combinação  $ax_1(t)+bx_2(t)$  é igual a  $ay_1(t)+by_2(t)$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes arbitrárias.

Vejamos agora o significado de um sistema invariante no tempo.

Seja  $y(t)$  a resposta a uma entrada  $x(t)$  em um sistema. Este sistema é dito invariante no tempo se a resposta à entrada deslocada no tempo  $x(t-t_0)$  é igual  $y(t-t_0)$ , onde  $t_0$  é uma constante.

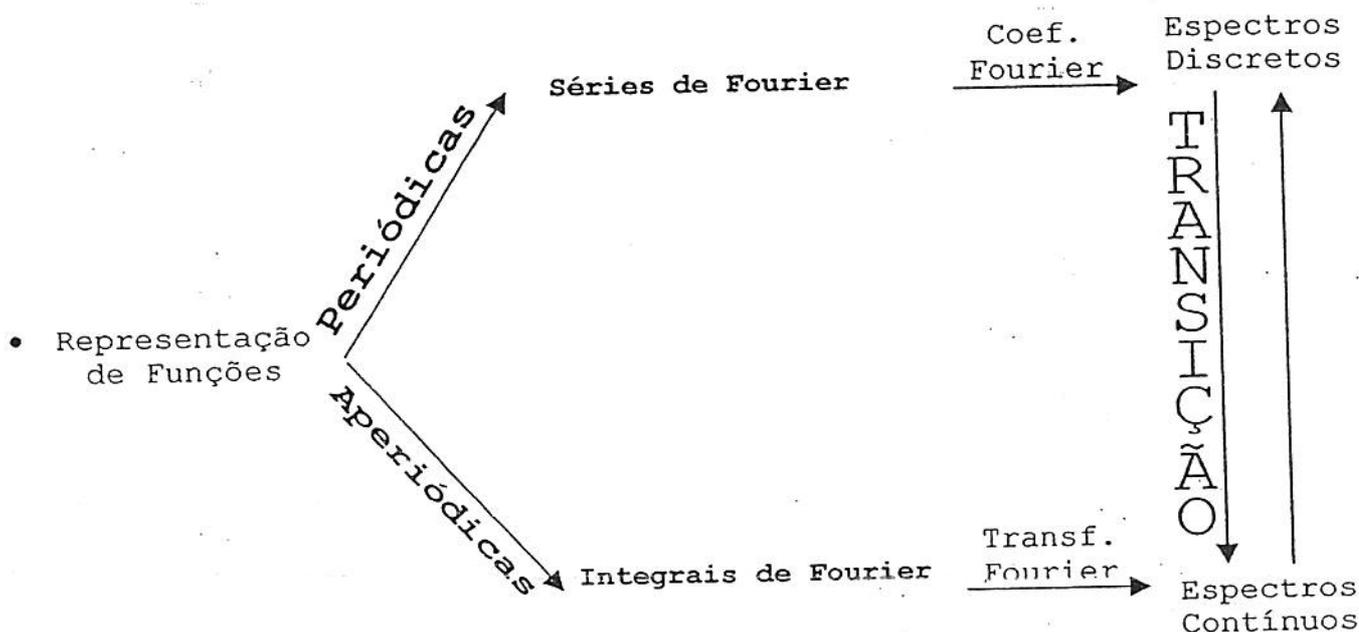
Por exemplo, a saída de um sistema linear invariante no tempo, no qual a entrada foi uma onda senoidal, deverá ser uma outra onda senoidal de mesma frequência, porém com amplitude e fase diferentes. Para estes sistemas, conhecidos pela sigla SLIT, a Análise de Fourier é o método matemático insubstituível não só para representar os sinais como também para analisar o próprio sistema.

#### **Nosso objetivo:**

Há quatro representações de Fourier distintas. Cada uma aplicável a uma classe de sinais. Estas quatro classes de sinais são definidas considerando se o sinal é periódico ou não. Dentro desta divisão inicial, ainda cabe separá-los quanto à natureza da variável tempo: tempo contínuo ou tempo discreto. Os sinais periódicos de tempo contínuo têm representações por Séries de Fourier (FS) e sinais periódicos de tempos discretos por Séries de Fourier a Tempos Discretos (DTFS). Já os sinais não periódicos são representados por Integrais de Fourier que poderão ser de tempo contínuo ou de tempo discreto. Neste curso, nos limitaremos às representações Fourier de tempo contínuo.

Cabe salientar que a Análise de Fourier é um tópico da matemática que não se restringe apenas às representações de funções. Ela também fornece métodos poderosos para solução de equações diferenciais, quer utilizando as Séries de Fourier, quer utilizando o conceito de transformação associado à Transformada de Fourier. Estes dois aspectos de uma mesma teoria estão inter-relacionados, conforme mostraremos ao longo deste curso. Apresentamos, a seguir um esquema de como desenvolveremos este tópico.

ANÁLISE DE FOURIER



- Solução de Equações Diferenciais- Método das Séries de Fourier  
Método das Transformadas de Fourier

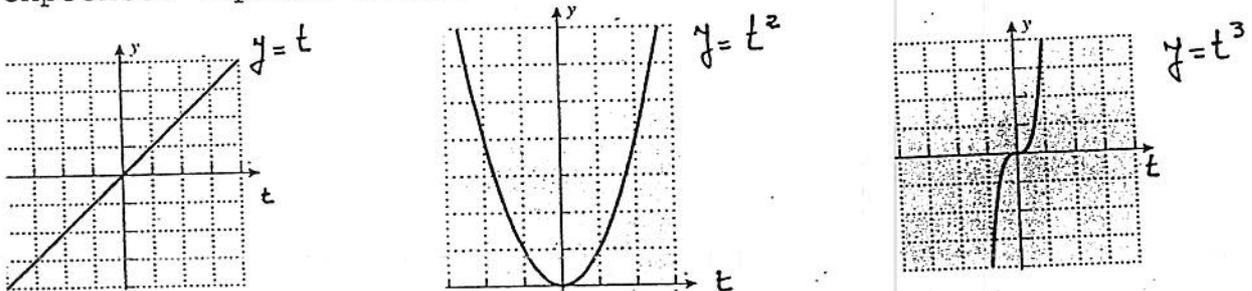
## Funções Pares e Ímpares versus Simetria Gráfica.

Na Análise de Fourier é muito importante o papel desempenhado pela chamada 'simetria' da função; isto é, é importante saber se ela é par, ímpar ou não tem paridade definida. Esta existência ou não de paridade reflete-se no gráfico desta função, que terá ou não uma simetria ou anti-simetria frente à reflexão vertical. Já mencionamos que, nos problemas aplicados, em geral, a variável independente é o tempo. Nos problemas onde nossas funções são funções causais, isto é,  $f(t)$  se anula para  $t < 0$ , o gráfico da função não apresenta simetria de reflexão. Contudo, a Análise de Fourier é construída em cima de leis de simetria. Assim, por hipótese, assumiremos o caso mais geral no qual as funções são não-causais, isto é,  $f(t) \neq 0$  para  $t < 0$ .

Recordemos as definições de funções pares e funções ímpares.

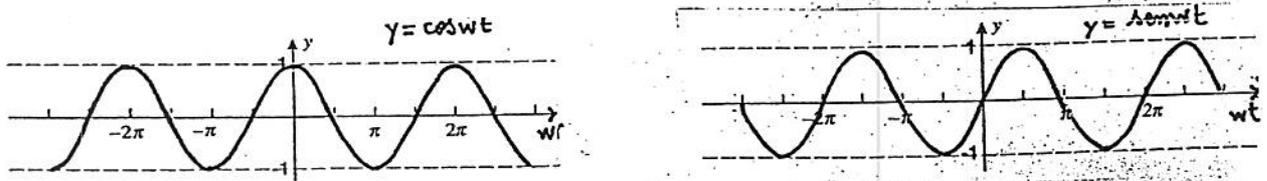
- Uma função real  $f(t)$  é dita par se  $f(t) = f(-t)$ . Estas funções são chamadas pares porque as funções polinomiais que possuem apenas expoentes pares exibem esta característica.

- Uma função real  $f(t)$  é dita ímpar se  $f(t) = -f(-t)$ . Da mesma forma, as funções polinomiais que possuem apenas expoentes ímpares exibem esta característica.

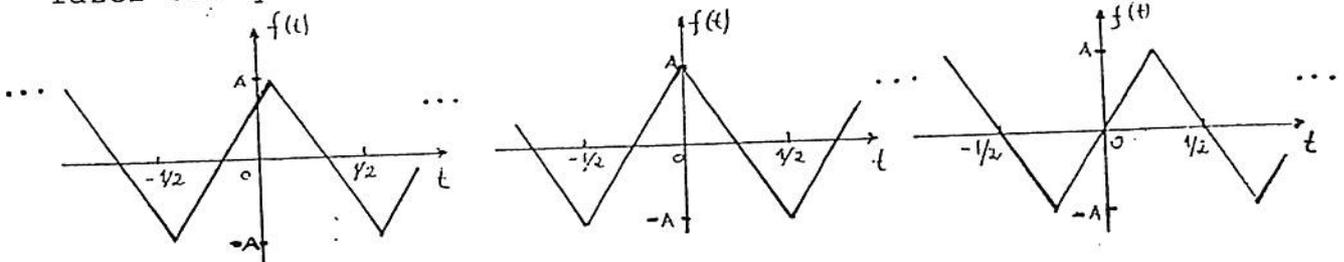


Observar que, se dobrarmos o papel no eixo vertical do gráfico da função par, o lado esquerdo coincide com o lado direito, isto é, o gráfico é simétrico frente à reflexão vertical. Já no gráfico da função ímpar, serão necessárias duas dobras, uma sobre cada eixo para se obter a coincidência dos gráficos; é a anti-simetria.

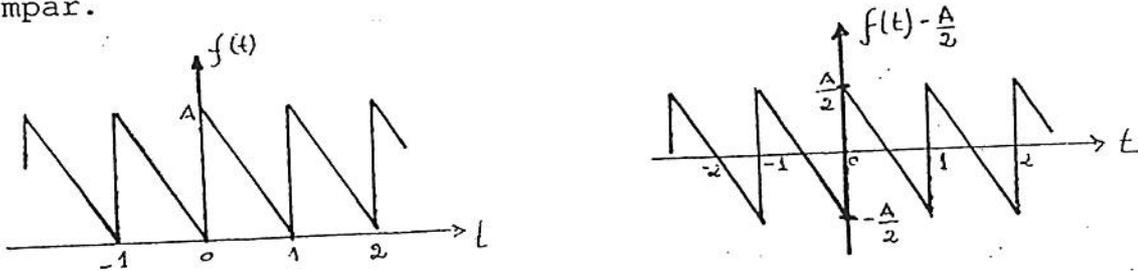
Vamos eleger como função par por excelência, a função  $\cos wt$  e função ímpar por excelência, a função  $\sin wt$ , cujos gráficos apresentam, respectivamente simetria e anti-simetria frente à reflexão vertical.



Muitas vezes, um simples deslocamento da função ao longo do eixo horizontal pode fazer com que a função perca sua paridade. Por outro lado, também é possível fazer com que uma dada função se torne par ou ímpar simplesmente escolhendo um valor apropriado para a origem do eixo horizontal. Por exemplo, a função periódica chamada onda triangular abaixo não é nem par nem ímpar. Entretanto, deslocando-a ao longo do eixo  $t$ , podemos fazer com que se torne uma função par ou ímpar.



Da mesma forma, a paridade de uma função pode estar escondida por um termo constante somado ou subtraído à função. Ilustraremos com outra função periódica: a onda dente de serra de amplitude  $A$ , cujos gráficos estão representados a seguir. A subtração da constante  $A/2$  de  $f(t)$  desloca o eixo  $t$  para cima de um valor  $A/2$ . A nova função  $g(t)=f(t)-A/2$  é agora uma função ímpar.



Observação: As definições acima pressupõem funções reais. Devemos ter cuidado, entretanto, ao definir a paridade de funções complexas. Neste caso, deve-se falar em simetria conjugada.

Definição: Uma função complexa  $f(t)$  será conjugada simétrica se satisfizer

$$f(-t) = f^*(t) ,$$

onde o asterisco denota o complexo conjugado. Assim, o complexo conjugado da função

$$f(t) = x(t) + i y(t)$$

é

$$f^*(t) = x(t) - i y(t) ,$$

onde  $x(t)$  é a parte real de  $f(t)$ ,  $y(t)$  a parte imaginária de  $f(t)$  e  $i = \sqrt{-1}$ . Por outro lado,  $f(-t) = x(-t) + iy(-t)$ . Logo,  $f^*(t)$  só será igual a  $f(-t)$  se  $x(t) = x(-t)$  e  $y(t) = -y(-t)$ .

Conclusão: uma função complexa  $f(t)$  é simétrica conjugada se sua parte real for par e sua parte imaginária for ímpar.

Exemplo 1 : Verificar se a função  $f(t) = \cos wt + i \sin wt$  é conjugada simétrica.

### Propriedades das Funções Pares e Ímpares.

1ª) O produto de duas funções pares ou de duas funções ímpares é uma função par.

O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.

Demonstração: Seja  $f(t) = f_1(t)f_2(t)$ .

Se  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  forem funções pares, então substituindo  $t \rightarrow -t$ , temos:

$$f(-t) = f_1(-t)f_2(-t) = f_1(t)f_2(t) = f(t)$$

O que prova que  $f(t)$  é par.

-----  
Se  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  forem ambas ímpares, então substituindo  $t \rightarrow -t$ , temos:

$$f(-t) = f_1(-t)f_2(-t) = [-f_1(t)][-f_2(t)] = f(t)$$

O que prova que  $f(t)$  é par.

-----  
Finalmente, se  $f_1(t)$  for par e  $f_2(t)$  for ímpar, então na troca  $t \rightarrow -t$ , temos:

$$f(-t) = f_1(-t)f_2(-t) = f_1(t)[-f_2(t)] = -f_1(t)f_2(t) = -f(t)$$

Isto prova que  $f(t)$  é ímpar.

-----  
2ª) Se  $f(t)$  é uma função par, então a integral desta função entre dois limites simétricos  $a$  e  $-a$ , é igual ao dobro da integral desde 0 até  $a$ , isto é

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$$

Demonstração:

Parte-se de

$$\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt$$

Na 1ª integral do lado direito, faz-se a conveniente substituição de variável  $t \rightarrow -t$ , conseqüentemente  $dt \rightarrow -dt$  e os limites de integração ficarão de  $a$  até  $0$ , isto é

$$\int_a^0 f(t)dt = \int_a^0 f(-t)(-dt) = -\int_a^0 f(t)dt = \int_0^a f(t)dt \quad \text{onde}$$

se usou o fato de que  $f(t)$  é par, isto é  $f(t)=f(-t)$ , e na última integral, inverteu-se os limites de integração trocando o seu sinal.

Assim, substituindo esta última igualdade na integral de partida, temos, finalmente

$$\int_a^a f(t)dt = \int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt \quad \text{c.q.d.}$$

3ª) Se  $f(t)$  é ímpar, então a integral entre dois limites simétricos é nula, isto é,

$$\int_{-a}^{+a} f(t)dt = 0$$

Demonstração:

Parte-se de

$$\int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt$$

Novamente, faz-se na 1ª integral, a substituição de variável  $t \rightarrow -t$ , conseqüentemente  $dt \rightarrow -dt$  e os limites de integração ficarão de  $a$  até  $0$ , isto é

$$\int_{-a}^0 f(t)dt = \int_a^0 f(-t)(-dt) = -\int_a^0 [-f(t)]dt = \int_a^0 f(t)dt = -\int_0^a f(t)dt \quad \text{onde}$$

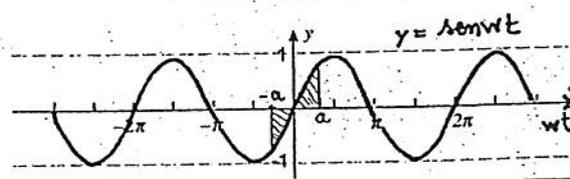
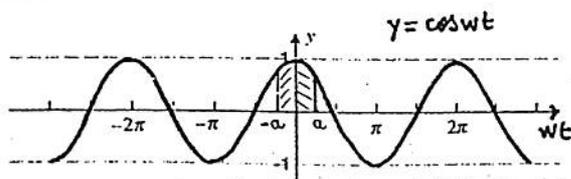
se usou o fato de que  $f(t)$  é ímpar, isto é  $f(t)=-f(-t)$  e na última integral inverteu-se os limites de integração, e conseqüentemente trocou-se o sinal da integral.

E, finalmente substituindo este resultado na integral de partida temos:

$$\int_{-a}^a f(t)dt = -\int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = 0 \quad \text{, c.q.d.}$$

Estas duas demonstrações analíticas têm a sua versão gráfica. Por exemplo, vamos escolher duas funções de paridade definida, como co-seno e seno. Interpretando as integrais da forma  $\int_{-a}^a \text{sent} dt$

e  $\int_{-a}^a \text{coss} dt$  como a área líquida nos gráficos destas funções, chegaremos aos mesmos resultados que as duas últimas propriedades, conforme ilustramos abaixo.



4ª) Toda função  $f(t)$  sem paridade definida pode ser expressa como a soma de uma função par  $f_p(t)$  e uma função ímpar  $f_i(t)$ , isto é

$$f(t) = f_p(t) + f_i(t) \quad \text{onde}$$

$$f_p(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)] \quad \text{e} \quad f_i(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)]$$

Verificação: Somando  $f_p(t)$  com  $f_i(t)$  facilmente encontramos  $f(t)$ . Resta provar que  $f_p(t)$  é par e  $f_i(t)$  é ímpar. Esta prova é feita, testando as definições de função par e função ímpar. Assim, na troca  $t \rightarrow -t$ , temos:

$$f_p(-t) = \frac{1}{2} [f(-t) + f(t)] \equiv f_p(t), \quad \text{logo } f_p(t) \text{ é par.}$$

$$f_i(-t) = \frac{1}{2} [f(-t) - f(t)] \equiv -f_i(t), \quad \text{logo } f_i(t) \text{ é ímpar.}$$

Exemplo 2.

Dada a função  $f(x) = e^x$  encontre sua parte par  $f_p$  e sua parte ímpar  $f_i$ .

a) Inicialmente, vamos considerar  $x$  uma variável real.

Seja  $x = wt$ . Nossa função fica, então  $f(t) = e^{wt}$ .

Conseqüentemente

$$f_p(t) = \frac{1}{2} [e^{wt} + e^{-wt}] \equiv \cosh wt \quad \text{e}$$

$$f_i(t) = \frac{1}{2} [e^{wt} - e^{-wt}] \equiv \sinh wt$$

Os gráficos destas funções são dados abaixo, permitindo conferir as suas respectivas simetrias.

b) Consideremos, agora  $x$  um imaginário puro, isto é,  $x = iwt$ .

Nossa função fica  $f(t) = e^{iwt}$

Antes de calcularmos sua parte par e sua parte ímpar, vamos deduzir a famosa fórmula de Euler (1707-1783).

Tomamos nossa tabela de Séries de Potências e selecionamos a série da função exponencial, ou seja

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad \text{onde substituímos } x \text{ por } iwt ,$$

$$e^{iwt} = 1 + \frac{(iwt)}{1!} + \frac{(iwt)^2}{2!} + \frac{(iwt)^3}{3!} + \frac{(iwt)^4}{4!} + \dots$$

Lembrando que  $i = \sqrt{-1}$ , vem que  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$ ,  $i^5 = i$ ,  $i^6 = -1$  e assim por diante.

Poderemos, então, reagrupar os termos da série acima da seguinte maneira:

$$e^{iwt} = \left[ 1 - \frac{(wt)^2}{2!} + \frac{(wt)^4}{4!} - \frac{(wt)^6}{6!} + \dots \right] + i \left[ (wt) - \frac{(wt)^3}{3!} + \frac{(wt)^5}{5!} - \dots \right]$$

Novamente consultando nossa tabela de Séries de Potências, identificamos a série de potências pares com a função co-seno e a série de potências ímpares com a função seno, ou seja chegamos à fórmula de Euler:

$$e^{iwt} = \cos wt + i \sin wt \quad (A)$$

Esta fórmula já está escrita como a soma de uma parte par e uma parte ímpar, ou seja identificamos

$$f_p(t) = \cos wt \quad \text{e} \quad f_i(t) = i \sin wt .$$

Voltando à expressão (A), trocamos  $t \rightarrow -t$  e lembrando que a função co-seno é par, isto é,  $\cos(-wt) = \cos wt$  e que a função seno é ímpar, isto é,  $\sin(-wt) = -\sin wt$ , chegamos a

$$e^{-iwt} = \cos wt - i \sin wt \quad (B)$$

Somando membro a membro as expressões (A) e (B), e dividindo por 2, encontramos

$$\cos wt = \frac{1}{2} [ e^{iwt} + e^{-iwt} ]$$

Da mesma forma, diminuindo membro a membro as expressões (A) e (B) e dividindo por  $2i$ , encontramos

$$\sin wt = \frac{1}{2i} [ e^{iwt} - e^{-iwt} ]$$

Para confirmar tudo que fizemos, usemos as definições de  $f_p$  e de  $f_i$  e chegaremos às identidades:

$$f_p(t) = \frac{1}{2} [ e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} ] \equiv \cos \omega t \quad e$$

$$f_i(t) = \frac{1}{2} [ e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} ] \equiv i \sin \omega t$$

Usando a notação própria das funções de variável complexa, podemos escrever  $\cos \omega t$  como a parte real de  $e^{i\omega t}$  e  $\sin \omega t$  como a parte imaginária de  $e^{i\omega t}$ , ou seja

$$\cos \omega t = \operatorname{Re}\{e^{i\omega t}\} \quad e \quad \sin \omega t = \operatorname{Im}\{e^{i\omega t}\} .$$

Desta forma, confirmamos também que a função  $e^{i\omega t}$  é uma função complexa de módulo 1, ou seja,

$$|e^{i\omega t}| = |\cos \omega t + i \sin \omega t| = \sqrt{(\cos \omega t + i \sin \omega t)(\cos \omega t - i \sin \omega t)} = \sqrt{\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t} \equiv 1 ,$$

ou simplesmente

$$|e^{i\omega t}| = \sqrt{e^{i\omega t} e^{-i\omega t}} \equiv 1.$$

Lembramos, também, que a função  $e^{i\omega t}$  é simétrica conjugada.

Usando a fórmula de Euler, é possível mostrar uma fantástica relação que os números  $e$ ,  $i$ ,  $\pi$  guardam entre si, através da identidade

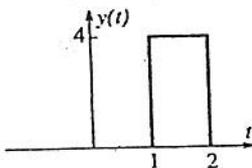
$$e^{i\pi} = -1$$

#Pense mais, aplique o logaritmo natural a ambos os lados desta expressão. Onde se chega?

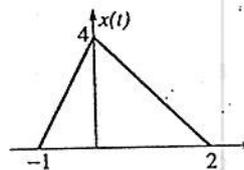
-----

Exercício 3 : Encontre as partes pares e ímpares dos sinais cujos gráficos são :

a)



b)



Exercício 4 : A função  $f(t) = (\sin t + 1)^2$  é par ?

Exercício 5: Encontre a parte par e a parte ímpar da função

$$f(t) = \frac{t+1}{t-1} .$$

Exercício 6 : Faça um esboço do gráfico da função  $f(t) = e^{-|t|}$  e diga se este apresenta alguma simetria.

Exercício 7: Dada a função  $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$  encontre a sua parte par e a sua parte ímpar . Certifique-se de seus resultados fazendo um esboço dos gráficos de  $f(t)$ ,  $f_p(t)$  e  $f_i(t)$ .

Exercício 8: Use a fórmula de Euler para traçar um paralelo entre as funções seno e co-seno trigonométricos e a definição de seno e co-seno hiperbólicos .

Exercício 9: Demonstre a identidade  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$  .

Exercício 10: Use a fórmula de Euler  $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$  para calcular

a)  $e^{i\pi/2}, e^{i\pi}, e^{i3\pi/2}, e^{2\pi i}$ ,

b)  $e^{-i\pi/2}, e^{-i\pi}, e^{-i3\pi/2}, e^{-2\pi i}$

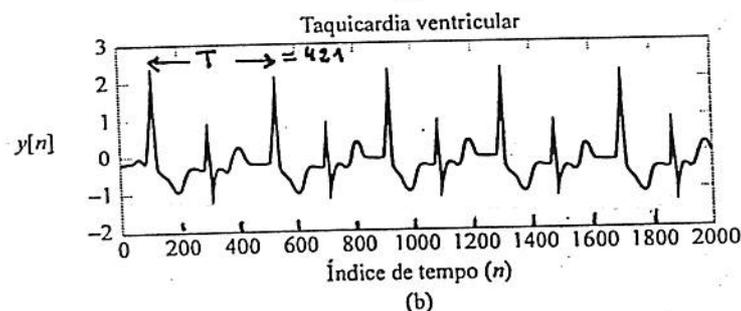
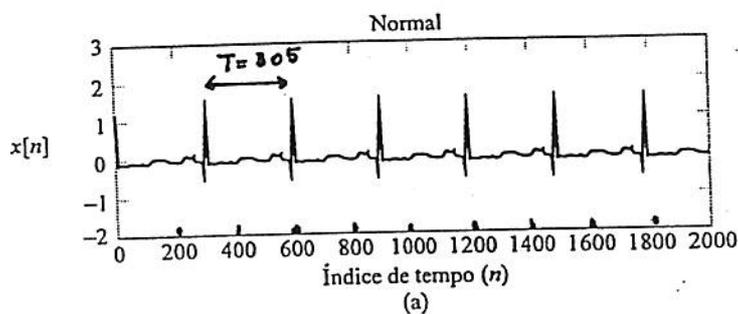
e para demonstrar a fórmula de De Moivre (1667-1754)

c)  $(\cos x + i \sin x)^n = (\cos nx + i \sin nx)$  , n um inteiro.

**Funções Periódicas:**

Por que o interesse por funções periódicas? Há muitas razões.

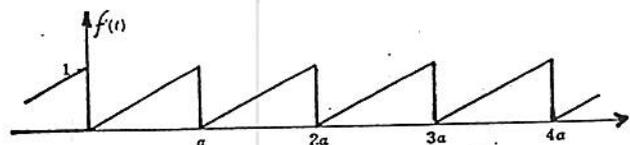
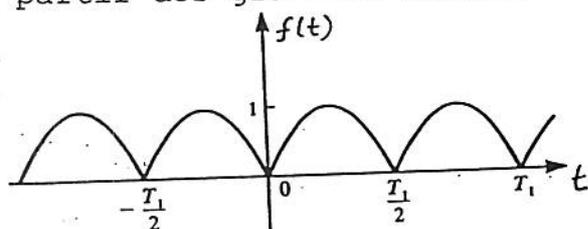
Podemos citar vários fenômenos que são periódicos. Alguns criados pela mão do homem, outros existentes na própria natureza. Os fenômenos periódicos mais simples são aqueles descritos em termos de movimentos harmônicos, isto é, podem ser representados por uma função seno ou co-seno, como o Oscilador Harmônico Simples(OHS). No outro extremo, estão os fenômenos que apresentam um comportamento periódico mais complexo, tais como o movimento das marés, os sons musicais e as batidas do coração. Vamos ilustrar apresentando os gráficos de duas funções periódicas: os eletrocardiogramas(ECG) correspondentes a batimentos cardíacos normais, em (a) e em (b), batimentos cardíacos com taquicardia ventricular.



Dentre as fontes geradoras de ondas periódicas criadas pelo homem, as mais importantes são as fontes de eletricidade. Estas fontes podem gerar ondas (sinais) senoidais ou não-senoidais. As fontes senoidais e seus efeitos nos circuitos elétricos constituem uma importante área de estudo, por vários motivos. Em primeiro lugar, a geração, transmissão e distribuição de energia elétrica são feitas na forma de tensões e correntes senoidais. Em segundo, a compreensão do funcionamento de circuitos alimentados por fontes senoidais torna possível prever o comportamento de circuitos com fontes não-senoidais. Em terceiro, a suposição de que o sistema está funcionando no regime senoidal quase sempre simplifica o projeto dos circuitos. Assim, um engenheiro ou um físico pode formular as especificações em termos de uma resposta senoidal e projetar o

sistema para que atenda a essas especificações. Se o sistema atender a essas especificações, o projetista sabe que o circuito responderá de forma satisfatória também a sinais não-senoidais.

Dentre as fontes geradoras de ondas não-senoidais, vamos aqui, citar duas delas: o retificador eletrônico simples e o gerador de varredura usado para controlar o feixe eletrônico dos osciloscópios. O primeiro, quando alimentado por uma tensão senoidal, produz uma senóide retificada (também conhecido por retificador de onda completa) que é também uma função periódica. Já o gerador de varredura produz uma onda periódica conhecida como dente de serra. Tanto a função seno retificado como a onda dente de serra são funções não-senoidais, como podemos ver a partir dos gráficos abaixo.



Do ponto de vista tecnológico, o interesse pelas funções periódicas também resulta da observação de que qualquer não-linearidade em um sistema submetido a uma excitação senoidal dá origem a uma resposta periódica não-senoidal. O retificador e o gerador de varredura mencionados acima são exemplos de sistemas não-lineares.

Funções periódicas não-senoidais aparecem também em problemas relacionados a vibrações mecânicas, escoamento de fluidos, transmissão de calor, etc. Como já mencionamos, foi justamente o estudo da transmissão de calor em uma barra metálica que levou Jean Baptiste Fourier a representar uma função periódica como uma série de funções senoidais. Esta representação é o ponto de partida para a análise da resposta dos sistemas submetidos a excitações periódicas.

#### Definição de função periódica.

Como há fenômenos que são oscilatórios sem serem periódicos, é importante, distinguir entre o caráter oscilatório de uma função e a existência ou não de uma periodicidade.

Vejamos a definição formal de uma função periódica.

Definição: Função periódica é qualquer função que se repete a intervalos regulares. Ou, matematicamente,  $f(t)$  é periódica se

$$f(t) = f(t + nT) \quad \text{onde } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

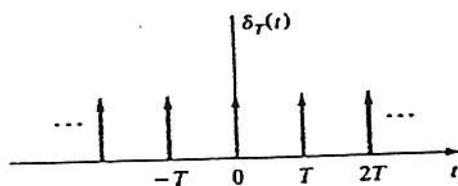
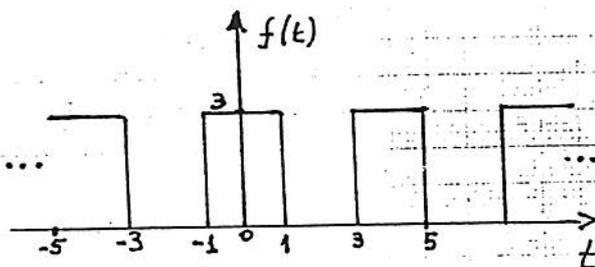
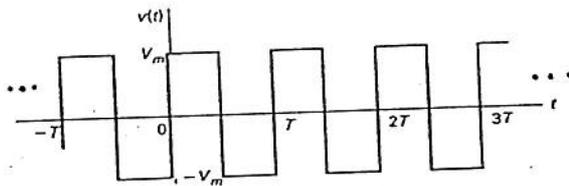
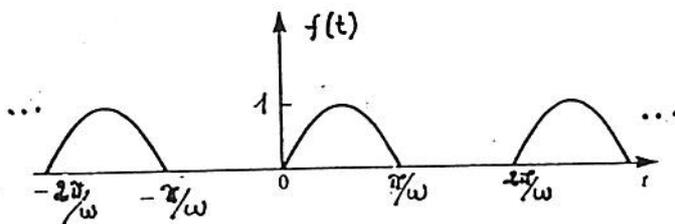
e  $T$  é uma constante chamada período.

Observação: A partir desta definição, conclui-se que toda função constante é periódica de período qualquer.

Forma analítica de uma função periódica:

Se a função é dada graficamente, não teremos dificuldades de identificar se é ou não periódica, isto é, 'vemos' facilmente qual é a sua amplitude e seu período. Contudo, muitas vezes temos dificuldade de expressá-la matematicamente. A afirmação matemática deverá conter duas informações: a forma da função dentro do período e o período da função.

Exemplo 11: Dê a forma analítica das funções periódicas cujos gráficos são:



Funções senoidais :

Vamos eleger como funções periódicas por excelência, as funções seno e co-seno. Estas funções possuem período  $T = \frac{2\pi}{w}$  onde  $w$  é a freqüência angular. Ou seja

$$\operatorname{sen}w\left(t + \frac{2\pi}{w}\right) = \operatorname{sen}wt \cos 2\pi + \operatorname{sen}2\pi \cos wt = \operatorname{sen}wt$$

$$\operatorname{cos}w\left(t + \frac{2\pi}{w}\right) = \operatorname{cos}wt \cos 2\pi - \operatorname{sen}wt \operatorname{sen}2\pi = \operatorname{cos}wt$$

Exemplo 12 . a) Qual o período da função  $\cos 2t$  ?

Este caso é simples. A freqüência é  $w=2$ . Logo, o período  $T$  será

$$\frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{2} = \pi .$$

b) Qual o período  $T$  da combinação  $f(t) = \operatorname{cos}w_1t + \operatorname{cos}w_2t$  ?

Este período comum deverá ser tal que  $w_1T = 2\pi n$  e  $w_2T = 2\pi m$ , onde  $n$  e  $m$  são inteiros.

Logo, a razão de suas freqüências deverá ser um número racional,

ou seja,  $\frac{w_1}{w_2} = \frac{n}{m}$ .

c) Qual o período de  $f(t) = \operatorname{cos}\frac{1}{3}t + \operatorname{cos}\frac{1}{4}t$  ?

$$\frac{1}{3}T = 2\pi n \quad \text{e} \quad \frac{1}{4}T = 2\pi m \quad \therefore \quad T = 6\pi n = 8\pi m$$

Fazendo  $n=4$  e  $m=3$ , obtemos o menor valor de  $T$ . Logo  $T=24\pi$ .

d) Qual o período de  $f(t) = \operatorname{cos}10t + \operatorname{cos}(10+\pi)t$  ? Neste caso, a razão  $\frac{w_1}{w_2} = \frac{10}{10+\pi}$  não é um número racional, isto é, é impossível encontrar um valor  $T$  que satisfaça  $f(t) = f(t+nT)$ . Logo,  $f(t)$  não é periódica.

e) Qual o período da função  $f(t) = (10\operatorname{cos}t)^2$  ?  
Precisamos usar a identidade trigonométrica

$$\operatorname{cos}^2t = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{cos}2t).$$

Assim, 
$$f(t) = 100 \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) = 50 + 50 \cos 2t$$

Como toda constante é um função periódica de período  $T$  qualquer e o período de  $\cos 2t$  é  $\pi$ , então concluímos que o período de  $f(t)$  é  $T = \pi$ .

RESUMO: A soma de sinais harmônicos (funções senoidais) é uma função periódica quando a razão de cada par de frequências individuais for uma fração racional (combinação comensurável). A frequência fundamental será o máximo divisor comum das frequências individuais, ou em termos de período fundamental, será o mínimo múltiplo comum dos períodos individuais.

Exercício 13:

Considere a função  $x(t) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}t\right) + 4 \cos\left(\frac{1}{2}t\right) + 4 \cos\left(\frac{1}{3}t - \frac{\pi}{5}\right)$

a) Quais são as frequências das componentes de  $x(t)$  ?

b) Qual é a frequência fundamental de  $x(t)$  ?

c) Quais são os períodos das componentes de  $x(t)$  ?

d) Qual o período fundamental de  $x(t)$  ?

Propriedade das integrais de funções periódicas:

Como veremos mais adiante, os coeficientes de Fourier são integrais calculadas dentro do período  $T$  da função. Assim, se a função tiver paridade definida, é interessante expressar os limites de integração de forma simétrica, desde  $-T/2$  até  $T/2$ . Caso o integrando não apresente paridade, então a escolha dos limites de integração poderá ser de zero a  $T$ .

A possibilidade de calcular a integral de uma ou outra maneira estará garantida pela seguinte propriedade:

Se  $f(t)$  é periódica de período  $T$ , então

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

Demonstração:

Parte-se de 
$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

Na 1ª integral do lado direito, faz-se a conveniente substituição de variável  $t = \tau - T$ .

Lembrando que  $f(t) = f(t - T)$ , temos

$$\int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) dt = \int_{\frac{T}{2}}^T f(t) dt$$

Substituindo na expressão acima temos,

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T f(t) dt = \int_0^T f(t) dt \quad \text{c.q.d.}$$

Roteiro de estudo da 1ª aula:

- 1) Quem foi Joseph Fourier ? Qual foi sua contribuição à Matemática Aplicada ?
- 2) Que vem a ser representação de uma função, no contexto da Análise de Fourier?
- 3) Defina sinais & sistemas .
- 4) Como se descreve matematicamente um sinal ? E como se classificam ?
- 5) O que se entende, neste contexto, por sistemas ? Quando um sistema é dito linear ? E linearmente invariante no tempo ?
- 6) Qual a diferença entre um sinal analógico e um sinal de tempo discreto ?
- 7) Qual a diferença entre um sinal de tempo discreto e um sinal digital ? Ou em outras palavras, quais são as três etapas de um processo de conversão analógico-digital?
- 8) Como se define matematicamente os sinais discretos ?
- 9) O que se estuda atualmente no tópico da Matemática chamado Análise de Fourier ?
- 10) Quais funções são mais usadas para descrever sinais determinísticos ?
- 11) Quando é que uma função  $f(t)$  é dita par ? E ímpar ? Cite exemplos.
- 12) Como se comportam os gráficos de funções que possuem paridade definida ? Dê exemplos de gráficos com simetria e anti-simetria frente à reflexão vertical.
- 13) Qual a condição que deve ser satisfeita por uma função  $f(t)$  para que se possa estudar sua paridade ?
- 14) Faz sentido falar de funções pares e ímpares quando se trata de funções complexas ?
- 15) Como se comporta o produto entre funções com paridade definida ? Você poderia demonstrar as suas afirmações ?
- 16) Como se comportam as integrais destas funções dentro de limites de integração simétricos? ( Você pode responder graficamente a esta questão usando a interpretação geométrica da integral ).
- 17) O que se pode dizer da função que não é par nem ímpar ? Como podemos representá-la ?
- 18) Quais são as componentes par e ímpar de uma função exponencial  $f(x)=e^x$  , sendo  $x$  uma variável real? Ou de outro modo, que vem a ser co-seno hiperbólico de  $x$  e seno hiperbólico de  $x$  ? Você concorda com esta nomenclatura ?
- 19) Siga o caminho de Euler para demonstrar a sua famosa fórmula  $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ . Você concorda em chamar esta função de exponencial ?

- 20) Você considera razoável na teoria de variáveis complexas a existência de logaritmos de números negativos ? E seno de ângulos imaginários ? Persiga esta curiosidade matemática. Use a fórmula de Euler e veja onde se chega.
- 21) Por que o estudo de funções periódicas é importante ?
- 22) Qual a definição formal de uma função periódica ? Que parâmetros usamos para caracterizá-las ?
- 23) Quais são as funções periódicas por excelência ?
- 24) Qual é a condição que deve ser satisfeita para que uma combinação linear de sinais senoidais continue periódica ? Como se calcula o período e a frequência de uma combinação senoidal?
- 25) Dê a interpretação geométrica associada à propriedade das funções periódicas contida na identidade  $\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$ .
- 26) Você certamente respondeu às perguntas acima tendo em mente funções determinísticas de variável contínua aqui definidas pela função  $f(t)$ . Quais destas perguntas caberiam no caso de funções determinísticas de variável discreta, isto é, funções definidas pela seqüência  $f(t_n) = \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ ?

**ANÁLISE DE FOURIER: 2ª aula**REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES PERIÓDICAS: SÉRIES DE FOURIER

O primeiro aspecto a destacar, é que é possível representar praticamente todas as funções periódicas de interesse na forma de Séries de Fourier. Matematicamente, as condições que uma função  $f(t)$  deve satisfazer para que seja possível representá-la por uma Série de Fourier são dadas pelas chamadas condições de Dirichlet.

Estas condições são as seguintes:

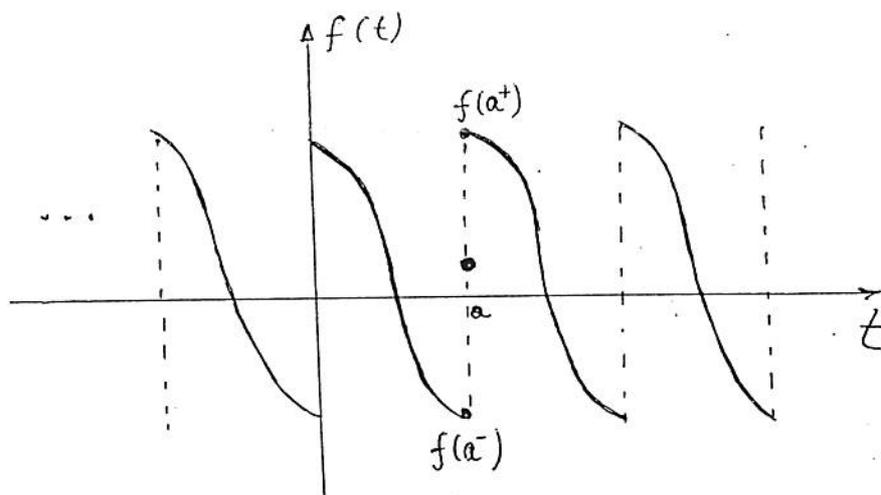
- a) a função deve ser periódica;
- b) a função deve ser unívoca e contínua, exceto em um número finito de descontinuidades ordinárias dentro do período  $T$ ;
- c) a função deve ter um número finito de máximos e mínimos dentro do período  $T$ ;

d) a integral  $\int_0^T |f(t)| dt$  deve convergir;

e) nos pontos  $t=a$  de descontinuidade ordinária o valor da função

é dado por 
$$f(a) = \frac{1}{2} [f(a^+) + f(a^-)]$$

O gráfico abaixo ilustra esta última condição.



Em geral, todo sinal periódico gerado por uma fonte real satisfaz as condições de Dirichlet. Estas condições são suficientes, ou seja se  $f(t)$  satisfaz essas condições, então poderá ser representada por uma Série de Fourier. Por outro lado, as condições necessárias para que  $f(t)$  possa ser representada por uma Série de Fourier ainda não são conhecidas.

Uma importante vantagem da Série de Fourier é que ela pode representar funções contendo descontinuidades, enquanto as séries de Maclaurin e Taylor exigem que as funções sejam contínuas.

### SÉRIES DE FOURIER: AS TRÊS VERSÕES.

Apresentaremos a seguir as três versões da Série de Fourier. A primeira é a Trigonométrica, já conhecida e estudada na disciplina de Equações Diferenciais. A segunda é a Harmônica, muito utilizada junto com o conceito de fasores e a terceira é a chamada Série de Fourier Complexa. Esta é a versão que possibilitará a introdução do conceito de espectro de uma função. Como estas três versões estão inter-relacionadas através de seus coeficientes, faremos uma revisão das duas primeiras e após mostraremos como se chega à Série Complexa.

#### 1) Série de Fourier Trigonométrica.

Dada uma função periódica  $f(t)$  de período  $T$ , então:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos w_n t + b_n \sen w_n t) \quad , \quad \text{onde}$$

$w_n = \frac{2\pi}{T} n$  com  $n=1, 2, 3, 4, \dots$  são os múltiplos da frequência

fundamental  $w_0 = \frac{2\pi}{T}$ . Esses múltiplos inteiros de  $w_0$ , isto é,  $2w_0$ ,  $3w_0$ ,  $4w_0$  etc, são denominados frequências harmônicas de  $f(t)$ .

Os coeficientes  $a_0, a_n, b_n$  são os coeficientes de Fourier, e são dados por

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \quad \text{ou} \quad \frac{a_0}{2} = \overline{f(t)} = \text{valor médio de } f(t),$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos w_n t dt \quad , \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sen w_n t dt \quad , \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Observação: Os coeficientes de Fourier são calculados através de integrais definidas dentro do período  $T$ . Se o integrando for uma função com paridade definida, então escolhemos os limites de integração simétricos afim de usar as convenientes propriedades. Caso o integrando não seja nem par nem ímpar, então é mais conveniente realizar a integração de 0 a  $T$ .

## II) Série de Fourier Harmônica.

Muitas vezes, nas aplicações, é mais conveniente usar uma forma alternativa para a Série de Fourier. Esta forma combina os termos em seno e co-seno com a mesma frequência em um único termo, em geral co-seno. Isto torna possível, por exemplo, usar o método dos fasores, e representar cada harmônico por um fasor.

Assim, a Série de Fourier Harmônica é:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n t - \theta_n)] \quad , \quad \text{onde}$$

$\omega_n$  são as frequências harmônicas,  $A_n$  as amplitudes e  $\theta_n$  os ângulos de fase.

Vamos verificar que a versão Harmônica é idêntica à versão Trigonométrica.

Determinaremos os novos coeficientes  $A_0$  e  $A_n$  em termos dos coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  da Série de Fourier Trigonométrica.

Nosso ponto de partida é expressar o  $\cos(\omega_n t - \theta_n)$  como o co-seno da diferença entre dois ângulos.

A Série Harmônica fica, então:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n [\cos \omega_n t \cos \theta_n + \sin \omega_n t \sin \theta_n]$$

Comparando termo a termo esta série com a Série de Fourier Trigonométrica, vemos que

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \quad , \quad A_n \cos \theta_n = a_n \quad \text{e} \quad A_n \sin \theta_n = b_n$$

Elevando ao quadrado as duas últimas igualdades, temos

$$(A_n \cos \theta_n)^2 = a_n^2 \quad \text{e} \quad (A_n \sin \theta_n)^2 = b_n^2$$

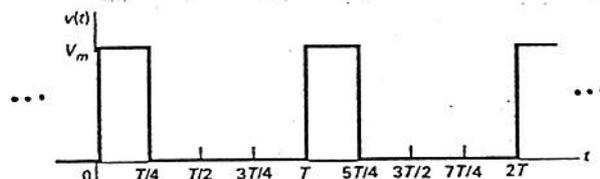
Somando uma com a outra, e usando a identidade trigonométrica  $\sin^2 \theta_n + \cos^2 \theta_n = 1$ , obtemos

$$A_n^2 = a_n^2 + b_n^2 \quad \text{ou} \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad , \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Da mesma forma dividindo  $A_n \sin \theta_n = b_n$  por  $A_n \cos \theta_n = a_n$ , encontramos

$$\tan \theta_n = \frac{b_n}{a_n} \quad \therefore \quad \theta_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n} .$$

Exemplo 1 . Uma certa tensão periódica é representada graficamente por



Escreva os cinco primeiros termos da representação de  $v(t)$  em série de Fourier Harmônica.

### III) Série de Fourier Complexa.

Esta é a forma mais concisa de expressar a Série de Fourier,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t}, \quad \text{onde} \quad C_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n)$$

Demonstração:

Parte-se da Série Trigonométrica, onde se substitui-

$$\operatorname{sen}\omega_n t = \frac{1}{2i} (e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}) \quad \text{e} \quad \operatorname{cos}\omega_n t = \frac{1}{2} (e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}), \quad \text{isto é}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n}{2} (e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}) + \frac{b_n}{2i} (e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}) \right] \quad \text{ou ainda}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{i\omega_n t} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-i\omega_n t} \right]$$

Analisaremos nesta última expressão, a troca de  $n \rightarrow -n$ :

$$\omega_n = \omega_0 n \quad \rightarrow \quad \omega_{-n} = -\omega_n$$

$$e^{i\omega_n t} \quad \rightarrow \quad e^{i\omega_{-n} t} = e^{-i\omega_n t}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \omega_n t dt \quad \rightarrow \quad a_{-n} = a_n$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \omega_n t dt \quad \rightarrow \quad b_{-n} = -b_n$$

$$C_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \quad \rightarrow \quad C_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n)$$

Assim, 
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{i\omega_{-n} t}$$

Reescrevemos o último termo, substituindo o índice  $n \rightarrow -n$ , isto é

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-i\omega_n t} = \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n e^{i\omega_n t}$$

A Série de Fourier fica, então

$$f(t) = \frac{a_0}{2} e^0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n e^{i\omega_n t}$$

Lembrando que  $\frac{a_0}{2} = C_0$ , vemos que este termo poderá ser incorporado ao 1º somatório, cujo índice  $n$  variará então de 0 a  $\infty$ .

No 2º somatório, o índice  $n$  varia de  $-1$  a  $-\infty$ , mas isto é a mesma coisa que  $n$  variar de  $-\infty$  a  $-1$ .

Assim, a Série de Fourier acima fica

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n e^{i\omega_n t}$$

Finalmente, juntando os dois somatórios, temos:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t}$$

Esta versão da Série de Fourier está completamente 'simetrizada' com relação ao índice  $n$ .

Os coeficientes  $C_n$  são calculados a partir de:

$$C_n = \frac{1}{2} (a_n - i b_n) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos w_n t dt - i \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} w_n t dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) [\cos w_n t - i \operatorname{sen} w_n t] dt .$$

Logo

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i w_n t} dt .$$

#### POTÊNCIA MÉDIA DE UMA FUNÇÃO PERIÓDICA

A potência média de uma função periódica  $f(t)$  com período  $T$  é definida por

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt$$

Se a função  $f(t)$  for uma tensão ou uma corrente, então a definição matemática acima representa a potência média liberada por  $f(t)$  a um resistor de  $1\Omega$ .

Associado à definição de potência média está o conceito de valor RMS de uma função periódica. A sigla RMS vem do inglês e significa valor quadrático médio (root mean square, em inglês),

isto é :

$$f_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2 dt}$$

Teorema de Parseval

O teorema de Parseval afirma que se  $f(t)$  é uma função real e periódica de período  $T$ , então

$$\bar{P} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = \frac{1}{4} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n^2 + b_n^2) = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$$

Demonstração :

Parte-se de 
$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t} \right] f(t) dt$$

Lembrando que  $e^{i\omega_n t} = e^{-i\omega_{-n} t}$ , temos

$$\bar{P} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_{-n} t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n C_n^* \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \quad \text{onde}$$

se usou a definição de  $C_n$  e o fato de que  $C_{-n} = C_n^*$ .

Por outro lado, a relação entre os coeficientes das três versões das Séries de Fourier é facilmente verificada a partir das definições de  $C_n$  e  $A_n$ , isto é :

$$C_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad , \quad C_0 = \frac{a_0}{2} = A_0$$

Faça a demonstração da segunda e terceira igualdades do Teorema de Parseval.

Exemplo 2. A tensão periódica do Exemplo 1 é aplicada aos terminais de um resistor de  $15\Omega$ . O valor de  $V_m$  é 60V e o de  $T$  é 5ms.

- Use o teorema de Parseval para calcular as potências médias associadas aos 5 termos determinados no item a) do Exemplo 1.
- Calcule a potência média total a partir de sua definição.
- Que porcentagem da potência total é fornecida pelos 5 primeiros termos da Série?
- Compare o valor RMS exato de  $v(t)$  com o valor aproximado, considerando apenas os 5 primeiros termos da Série de Fourier.

**Roteiro de estudo da 2ª aula :**

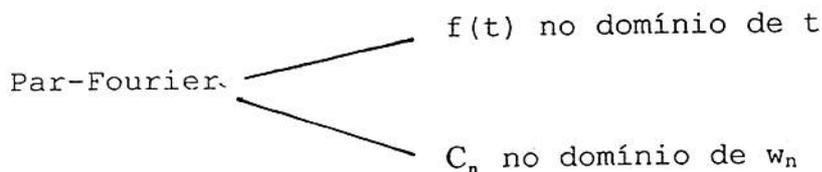
- 1) Quais são as condições suficientes para que uma dada função possa ser representada em Série de Fourier ?
- 2) Estas condições são satisfeitas pelas funções matemáticas usadas para descrever os sinais ?
- 3) Qual a vantagem da Série de Fourier quando comparada às séries de potências ?
- 4) Quais são as três versões da Série de Fourier e como estão relacionadas? Observe que cada uma delas tem uma característica própria . Identifique-a. Qual o significado do termo constante em qualquer das versões ?
- 5) Como varia o índice  $n$  nas três versões da Série de Fourier ?
- 6) Demonstre a Série de Fourier Harmônica a partir da Série de Fourier Trigonométrica. Qual a vantagem desta versão quando comparada com a primeira ?
- 7) Reproduza os passos que levam a Série de Fourier Complexa. Onde, nesta dedução, você identifica a preocupação com a simetrização ? Qual a grande vantagem de trabalhar com ela?
- 8) Na dedução da Série de Fourier Complexa definiu-se  $C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$  onde  $a_n$  e  $b_n$  são os coeficientes da Série de Fourier trigonométrica . Mostre que: a)  $C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$  ; b)  $C_{-n} = C_n^*$  ; c)  $a_n = 2\text{Re}\{C_n\}$  e  $b_n = -2\text{Im}\{C_n\}$  . Isto é, você demonstrou que  $C_n$  é simétrico conjugado frente à reflexão  $n \rightarrow -n$ .
- 9) Mostre que os coeficientes  $C_n$  de uma função par são reais e de uma função ímpar são imaginários puros. Mostre também que se a função não possui paridade, então os coeficientes  $C_n$  são complexos.
- 10) Como é definida a potência média de um sinal periódico  $f(t)$ ?
- 11) Como se define o valor rms de uma função periódica  $f(t)$  ? Se  $f(t)$  representa uma voltagem , qual o significado de seu valor rms ?
- 12) Demostre o Teorema de Parseval para as três versões da Série de Fourier .

**ANÁLISE DE FOURIER: 3ª aula**

Vimos na 2ª aula a Série de Fourier Complexa. Junto com seus coeficientes  $C_n$  ela forma o chamado Par-Fourier. Este Par é constituído pela função  $f(t)$  e seus coeficientes  $C_n$ . Isto é

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t} \\ C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i w_n t} dt \end{array} \right. , \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Assumimos desde o início que a variável  $t$  é o tempo, e  $w$  é a frequência angular. Assim, o Par-Fourier caracteriza uma transformação do domínio de tempo para o domínio de frequência. Esta é uma nova leitura para a Série de Fourier de uma função periódica. Resumindo :



Os coeficientes  $C_n$  são números complexos da forma:

$$C_n = \text{Re}\{C_n\} + i \text{Im}\{C_n\} , \quad \text{onde } \text{Re}\{C_n\} = \frac{1}{2} a_n \quad \text{e} \quad \text{Im}\{C_n\} = -\frac{1}{2} b_n ,$$

pois na passagem da forma trigonométrica para forma a complexa da Série de Fourier foi necessário definir

$$C_n = \frac{1}{2} (a_n - i b_n)$$

Seu módulo, poderá ser representado graficamente e será calculado, usando a definição de módulo de um número complexo :

$$|C_n| = \sqrt{C_n C_n^*} = \sqrt{\text{Re}\{C_n\}^2 + \text{Im}\{C_n\}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} , \quad \text{onde}$$

o asterisco indica o complexo conjugado. Usando a representação polar de um número complexo, podemos escrever ainda

$$C_n = |C_n| e^{i \phi_n} = |C_n| [\cos \phi_n + i \text{sen} \phi_n] ,$$

Comparando com a definição  $C_n = \frac{1}{2} (a_n - i b_n)$  obtemos

$$\phi_n = \tan^{-1} \left( \frac{-b_n}{a_n} \right) = \tan^{-1} \frac{\text{Im}\{C_n\}}{\text{Re}\{C_n\}}$$

$|C_n|$  é a amplitude e  $\phi_n$  o ângulo de fase, ambos no domínio de frequência .

### ESPECTROS DE FREQUENCIA

É possível descrever a função periódica  $f(t)$  em termos de suas amplitudes  $|C_n|$  e de seus ângulos de fase  $\phi_n$  no domínio de frequência.

O gráfico das amplitudes dos termos da Série de Fourier Complexa em função das frequências  $\omega_n$  é chamado de **espectro de amplitude** da função periódica  $f(t)$ .

O gráfico dos ângulos de fase em função das frequências é chamado de **espectro de fase**.

Antes de nos aprofundarmos no estudo dos espectros, vamos apresentar alguns aspectos da história da ciência que nos remetem à origem da expressão *espectro*.

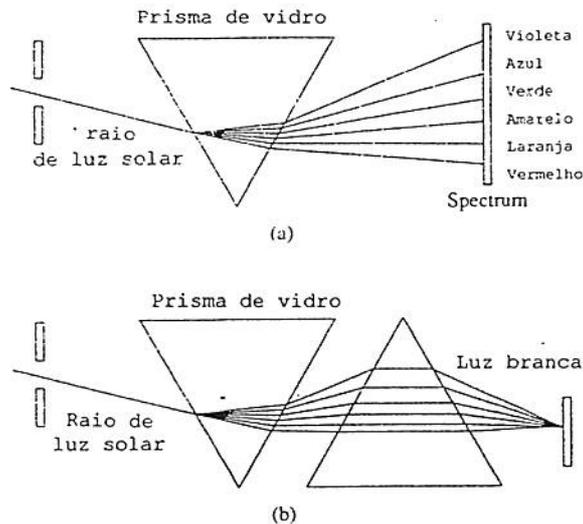
#### Histórico:

É bem conhecido que um prisma pode ser usado para decompor a luz solar (luz branca) nas cores do arco-íris. Em 1672, Isaac Newton submeteu um artigo à Royal Society, onde usou pela primeira vez o termo latino *spectrum* para descrever as faixas contínuas de cores produzidas pelo prisma. Para entender este fenômeno, Newton colocou um outro prisma de cabeça para baixo com relação ao primeiro e mostrou que as cores se combinavam de volta, recompondo a luz branca. Inserindo um anteparo com uma fenda entre os dois prismas e bloqueando uma ou mais cores na trajetória para o segundo prisma, ele mostrou que a mistura não mais reconstituía a luz branca .

Mais tarde, Joseph Fraunhofer (1787-1826), fazendo medidas da luz emitida pelo sol e pelas estrelas, descobriu que o espectro da luz observada consistia de linhas com cores distintas. Posteriormente, Gustav Kirchoff e Robert Bunsen descobriram que cada elemento químico, quando aquecido até incandescer irradiava suas próprias cores. Como consequência, cada elemento químico pode ser identificado por sua própria *linha espectral*.

Da Física, sabemos que cada cor corresponde a uma frequência específica do espectro de luz visível. Portanto a análise (separação) da luz em suas cores é uma forma de proceder ao que se chama de análise de frequência, ou *análise espectral*. No caso de um sinal representado por sua Série de Fourier esta análise envolve a decomposição do sinal em suas componentes senoidais. O papel do prisma é desempenhado pelos recursos que a

Análise de Fourier nos coloca à disposição. A recombinação das componentes senoidais para reconstruir o sinal original é basicamente a síntese de Fourier, papel desempenhado pelo prisma invertido. Abaixo, ilustramos a análise(a) e a síntese(b) da luz branca usando prismas de vidro.



# Vejamos agora o que diz o dicionário Aurélio sobre o significado da palavra espectro.

*Espectro.* [Do latim *spectru*] S.m. 1.fantasma. 2.Figura imaterial, real ou imaginária, que povoa o pensamento; sombra, fantasma: Sentia-se vigiado pelo espectro dos antepassados. 3.Aparência vã de uma coisa: Corre, desde moço atrás do espectro da glória. 4.Aquilo que constitui ameaça: o espectro da fome. 5.Pessoa esquelética ou esquelética: Quem é este espectro que entrou na sala? 6.Fis.Função que caracteriza a distribuição de energia numa onda, ou num feixe de partículas, e que exprime esta distribuição em termos de variáveis apropriadas (comprimento de onda, frequência, etc.). Espectro de bandas. Aquele em que a energia é distribuída em intervalos mais ou menos estreitos de comprimento de onda. É o espectro emitido, por ex., pelos gases moleculares quando excitados. Espectro de linhas ou de raias. Aquele em que só existe energia para comprimentos de onda muito bem determinados. Espectro eletromagnético. A distribuição das radiações eletromagnéticas em função do comprimento de onda, desde os raios gama, de menor comprimento, até as longas ondas de rádio. Espectro solar. O espectro visível que se pode obter pela decomposição da luz solar ao incidir sobre uma das faces de um prisma triangular transparente (ou outro meio de refração ou de difração, atravessando-o e projetando-o sobre um anteparo branco). Espectro visível. Campo do espectro eletromagnético que abrange uma pequena faixa capaz de ser captada pela vista humana. 7.Espectro antibiótico. Med. Número de germes sobre o qual atua o antibiótico, dizendo-se deste, conforme seja tal número, que é de curto ou de largo espectro.

Voltemos a análise de nossos gráficos de  $|C_n|$  versus  $w_n$  e  $\varphi_n$  versus  $w_n$ .

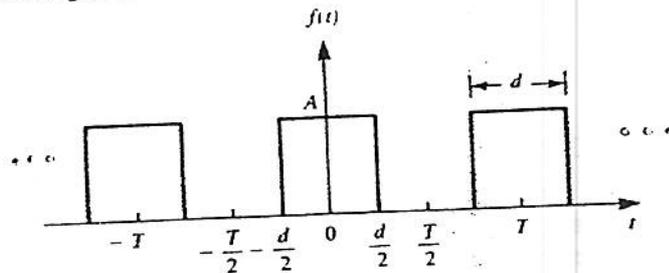
(Observar que a frequência angular  $w_n$  é uma variável discreta, pois vale  $w_n = \frac{2\pi}{T}n$ , com  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ )

Estes gráficos serão, de fato, gráficos de pontos, pois o eixo horizontal contém as frequências discretas. Para fins de melhor visualização, substitui-se os pontos por linhas baixadas dos valores de  $|C_n|$  aos correspondentes valores de  $w_n$  nos espectros de amplitude e dos valores de  $\varphi_n$  nos espectros de fase. Em vista disto, muitas vezes estes gráficos são chamados de espectros de linhas ou de raias.

Resumindo: Os espectros das **funções periódicas** são **espectros discretos**.

Exemplo 1.

Encontre o espectro de amplitudes da função representada pelo trem de pulsos retangulares de altura  $A$  e duração  $d$ , dado graficamente por



Solução: A função periódica  $f(t)$  é expressa por

$$f(t) = \begin{cases} A, & -d/2 < t < d/2 \\ 0, & -T/2 < t < -d/2, \quad d/2 < t < T/2 \end{cases} \quad f(t) = f(t+T)$$

Calculamos os coeficientes  $C_n$  a partir de

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i w_n t} dt$$

1º passo: Estudo da paridade do integrando.

Como  $f(t)$  possui um gráfico simétrico, então  $f(t)$  é par e como  $e^{-i w_n t} = \cos w_n t - i \sin w_n t$ , então  $f(t) \cos w_n t$  é par e  $f(t) \sin w_n t$  é ímpar. Logo, o integrando possui uma parte par e uma parte ímpar. Como os limites de integração são simétricos, 'sobreviverá' apenas a parte par e vale

$$C_n = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos w_n t \, dt$$

2º passo : Forma analítica de  $f(t)$ .

Agora vamos substituir  $f(t)$  pela sua forma analítica. Podemos usar a expressão da função definida por partes, ou diretamente do gráfico do trem de pulsos dado.

Assim :

$$C_n = \frac{2}{T} A \int_0^{\frac{d}{2}} \cos w_n t \, dt = \frac{2A}{T} \left[ \frac{\text{sen} w_n t}{w_n} \right]_0^{\frac{d}{2}} = \frac{2A}{T} \left[ \frac{\text{sen}(w_n d/2)}{w_n} \right] = \frac{2A}{T} \frac{d}{2} \frac{\text{sen}(w_n d/2)}{(w_n d/2)}$$

Finalmente  $C_n = \frac{Ad}{T} \frac{\text{sen}(w_n d/2)}{(w_n d/2)}$  e  $C_0 = \frac{Ad}{T} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi d}{T} n\right)}{\left(\frac{\pi d}{T} n\right)} = \frac{Ad}{T}$ .

Observações:

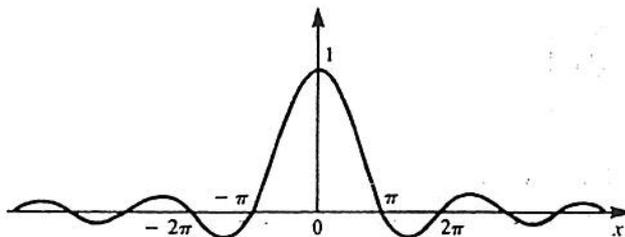
a) O coeficiente  $C_0$  dá o valor médio da função.

b) Os coeficientes  $C_n$ , com  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$  representam uma função de variável discreta  $x_n = w_n d/2$ , da forma  $\frac{\text{sen}(x_n)}{x_n}$ .

A função de variável contínua  $x$  associada a esta de variável discreta  $x_n$  já é conhecida do Cálculo I. Lá, ela foi estudada como exemplo de função que apresenta uma descontinuidade removível em  $x=0$ . Você deve se lembrar da aplicação de regra de

L'Hôpital para o limite fundamental:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x}{x} = 1$ .

Mostramos abaixo o seu gráfico.



Os coeficientes  $C_n$  são reais, podendo ser positivos ou negativos. Já o espectro de amplitude, sendo o gráfico de  $|C_n|$  versus  $\omega_n$  com  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , é formado por linhas espectrais positivas.

Vamos construir os espectros de amplitude, para o trem de pulsos considerando dois casos:

$$1^\circ \text{ caso) } d = \frac{1}{20} \text{ s} \quad , \quad T = \frac{1}{4} \text{ s} .$$

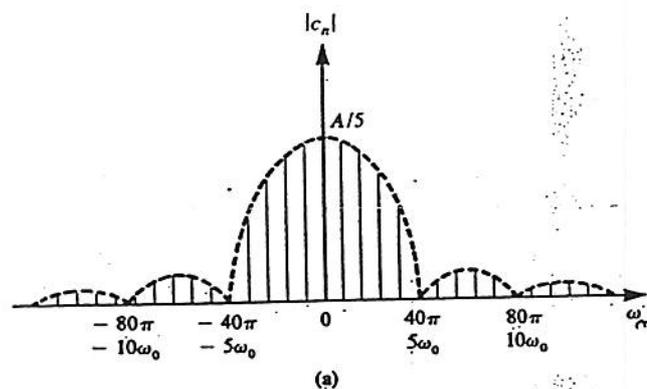
Lembrando que  $C_n = \frac{Ad}{T} \frac{\text{sen}(n\pi d/T)}{(n\pi d/T)}$ , então neste caso,

$$\frac{d}{T} = \frac{1/20}{1/4} = \frac{1}{5} \quad \text{e} \quad \omega_n = \frac{2\pi}{1/4} n = 8\pi n \quad , \quad \text{sendo } \omega_0 = 8\pi .$$

Façamos agora o gráfico de  $|C_n|$  versus a frequência discreta  $\omega_n$ , com  $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , lembrando que nossas linhas espectrais seguirão a forma da função  $\left| \frac{\text{sen}x}{x} \right|$ . Esta será a envoltória do espectro discreto. Ela apenas auxilia o traçado das linhas espectrais, evitando o cálculo de cada um dos pontos  $\dots |C_{-3}|, |C_{-2}|, |C_{-1}|, |C_0|, |C_1|, |C_2|, \dots$ . Esta envoltória aparece tracejada no gráfico, pois ela não representa o espectro da função periódica.

Os nós de  $|C_n| = \frac{A}{5} \left| \frac{\text{sen}(\pi n/5)}{(\pi n/5)} \right|$  ocorrerão em  $n = \pm 5, \pm 10, \pm 15, \dots$ , correspondendo ao quinto, décimo, décimo quinto harmônicos (e os demais múltiplos de 5).

Vejam como fica o gráfico que representa o espectro de amplitude do trem de pulsos.

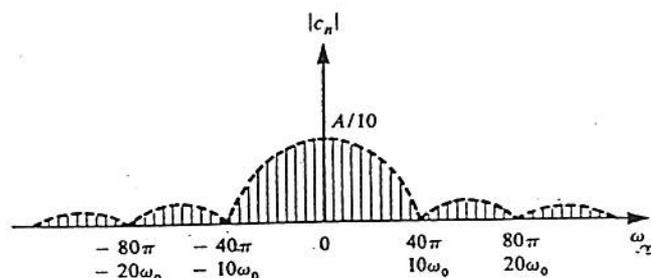


$$2^\circ \text{ caso) } d = \frac{1}{20} \text{ s} \quad \text{e} \quad T = \frac{1}{2} \text{ s} .$$

$$\text{Neste caso, } \frac{d}{T} = \frac{1/20}{1/2} = \frac{1}{10} \quad , \quad \omega_n = \frac{2\pi}{1/2} n = 4\pi n \quad \text{e}$$

os nós de  $|C_n|$  ocorrerão em  $n = \pm 10, \pm 20, \pm 40, \dots$ .

O espectro para este trem de pulsos com período o dobro do anterior é mostrado no gráfico abaixo.



Compare os dois casos e observe que duplicando o período, duplicamos o número de linhas espectrais dentro de cada lobo.

Voltaremos a este exemplo na aula seguinte, pois o trem de pulsos constitui uma excelente forma de demonstrar a transição da Série de Fourier de uma função periódica para a Integral de Fourier de uma função aperiódica, com a conseqüente transição nos espectros. Esta transição periódica/aperiódica é realizada no limite  $T \rightarrow \infty$ , quando então o trem de pulsos se reduz a um único pulso central.

### Espectro de fase

Vejamos agora como fica o espectro de fase do trem de pulsos anterior. Nosso ponto de partida é

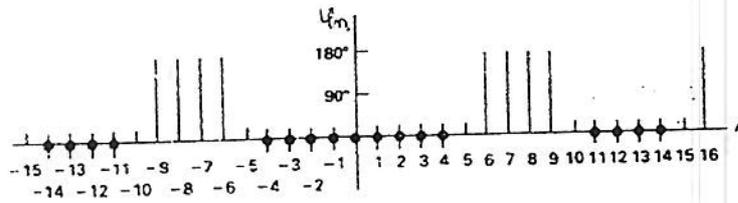
$$\phi_n = \tan^{-1} \frac{\text{Im}\{C_n\}}{\text{Re}\{C_n\}}$$

Como, neste exemplo,  $C_n$  é sempre um número real, então

$\text{Re}\{C_n\} = C_n$  e  $\text{Im}\{C_n\} = 0$ . Conseqüentemente o ângulo de fase  $\phi_n$  será  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ , dependendo do sinal de  $C_n$ .

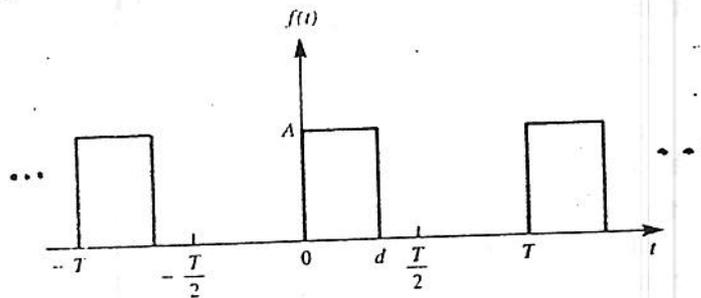
Assim, para os dados do 1º caso do trem de pulsos,  $\phi_n$  será zero para  $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ , indefinido para  $n=\pm 5$ , pois  $C_{\pm 5} = 0$ , e  $180^\circ$  para  $n=\pm 6, \pm 7, \pm 8, \pm 9$  e indefinido para  $n=\pm 10$ . O padrão se

repete para os valores maiores de  $n$ . O gráfico a seguir mostra este espectro de fase .



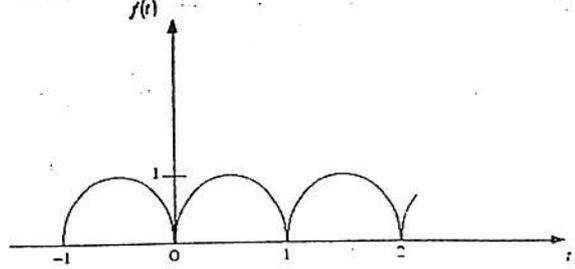
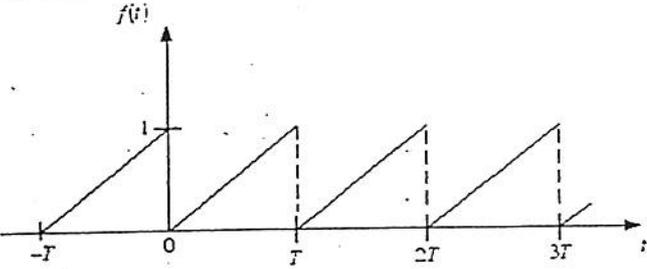
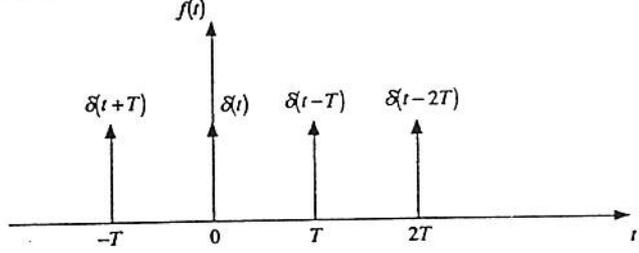
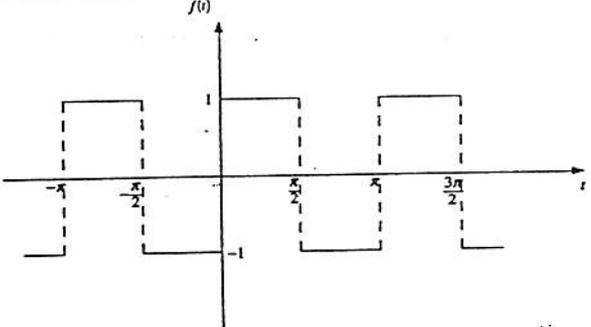
O que acontece com os espectros de amplitude e de fase quando a função  $f(t)$  é deslocada no eixo dos tempos ? A resposta a esta pergunta será dada no exercício abaixo.

Exercício 2. Calcule os espectros de amplitude e de fase para o trem de pulsos do exemplo 1 deslocado para a direita, conforme é mostrado na figura abaixo.



Exercício 3 :

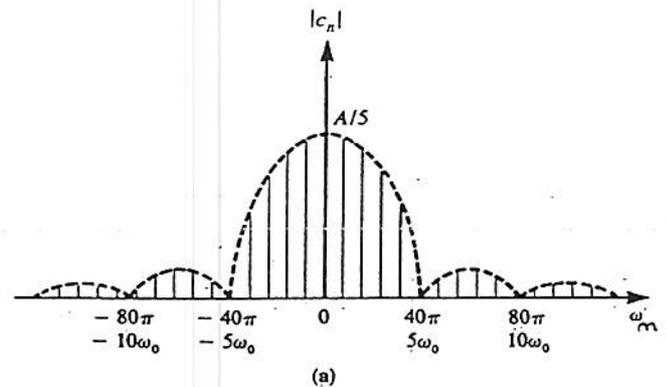
Calcule o espectro de amplitude, contemplando pelo menos 5 linhas espectrais não nulas para cada uma das funções abaixo:

<p>[i] Função seno retificado:</p> $f(t) = \text{sen } \pi t, 0 < t < 1$ $f(t+1) = f(t)$	
<p>[ii] Função dente de serra:</p> $f(t) = \frac{1}{T} t, 0 < t < T$ $f(t+T) = f(t)$	
<p>[iii] Trem de impulsos:</p> $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$	
<p>[iv] Onda quadrada:</p> $f(t) = \begin{cases} -1, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$ $f(t+T) = f(t), T = \pi$	

Respostas: [i]  $C_n = \frac{-2}{\pi} \frac{1}{4n^2 - 1}$  ; [ii]  $C_n = \frac{i}{2\pi n}$  ,  $C_0 = \frac{1}{2}$  ; [iii]  $C_n = \frac{1}{T}$   
 ;  $C_{n+4} = \frac{-i}{\pi} \frac{2}{2n+1}$

## Roteiro de estudo da 3ª aula :

- 1) Que vem a ser o Par-Fourier ? Explique.
- 2) Como é definido o gráfico chamado espectro de amplitude de uma função periódica  $f(t)$  ? Na sua opinião, este é um conceito matemático ou físico ?
- 3) Como se define o gráfico chamado espectro de fase de uma função periódica ?
- 4) Como se comporta a variável independente nos espectros de amplitude e de fase das funções periódicas ? E como ficam os gráficos?
- 5) Reproduza todos os passos do cálculo do espectro de amplitudes do trem de pulsos. O que acontece no espectro quando duplicamos o período do trem de pulsos? O que você pode prever para o comportamento do espectro se continuarmos a aumentar o período indefinidamente ?
- 6) Qual a diferença entre as linhas espectrais de um espectro de amplitude e um espectro de fase ?
- 7) Analise os dois espectros de amplitude do trem de pulsos do exemplo 1, (1º e 2º casos), à luz do teorema de Parseval e estime qual deles tem a maior potência média.
- 8) a) Por que o espectro ao lado é dito discreto ?  
 b) Que são linhas espectrais?  
 c) Quanto vale o espaçamento entre as linhas espectrais?  
 d) Como se determina o número de linhas espectrais dentro de cada lobo da envoltória?  
 e) Quantas harmônicas estão incluídas em cada lobo da envoltória?



**ANÁLISE DE FOURIER: 4ª AULA**

A TRANSIÇÃO PARA O CONTINUUM E A INTEGRAL DE FOURIER

Vimos, na aula anterior, que as funções periódicas podem ser representadas pelo Par-Fourier :

$$\left\{ \begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t} \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i w_n t} dt, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2)$$

Ou numa única expressão:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-i w_n \tau} d\tau \right] e^{i w_n t} \quad (3)$$

Observe que, ao substituir os coeficientes  $C_n$  por sua integral, trocamos a variável de integração 'muda' para  $\tau$ , afim de não confundir com a variável externa  $t$  da função  $f(t)$ .

Procederemos agora a chamada transição para o *continuum*. Este é o processo em que a nossa função deixa de ser periódica, isto, é estudaremos o limite em que seu período  $T$  tende ao infinito.

Resumimos abaixo as transformações esperadas no limite :

$T \rightarrow \infty$	
Função periódica	Função aperiódica
Nº de linhas espectrais	$n \rightarrow \infty$
Espaçamento entre as linhas espectrais	$w_0 = \Delta w \rightarrow dw$
Variável discreta $w_n = w_0 n$	$w_n \rightarrow w$
Série de Fourier	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dw$
Coeficiente de Fourier	$C_n T \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i w t} dt$

Vamos agora, proceder à transição analítica na relação (3), substituindo as conclusões do quadro acima e lembrando que pela definição de período  $T = 2\pi / w_0$ , podemos no limite  $T \rightarrow \infty$  substituir

$$\frac{1}{T} = \frac{w_0}{2\pi} \longrightarrow \frac{dw}{2\pi} :$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dw \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] e^{i\omega t} \quad (4)$$

Define-se a integral entre colchetes como o novo coeficiente de Fourier  $F(\omega)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = F(\omega)$$

E o novo Par-Fourier do *continuum*, representativo das funções aperiódicas fica:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \end{array} \right. \quad (6)$$

Observe que, quando separadas a  $f(t)$  de seu coeficiente  $F(\omega)$ , podemos voltar a usar a  $t$  como a variável de integração em lugar da variável  $\tau$ , usada na relação (4).

A relação (5) é chamada de Integral de Fourier e substitui a Série de Fourier das funções periódicas.

A relação (6) que define o coeficiente de Fourier é chamada Transformada de Fourier.

Convém destacar que  $F(\omega)$  é realmente uma Transformada no mesmo sentido que a Transformada de Laplace. Isto é:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \longrightarrow F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Inclusive se tomarmos  $f(t)$  causal e a frequência  $s = i\omega$ , as duas expressões coincidem. Há autores que classificam a Transformada de Laplace unilateral como um caso particular da Transformada de Fourier. Contudo, se consideramos funções não causais e  $s$  uma variável complexa, então a Transformada de Laplace fica mais geral que a Transformada de Fourier.

Após, estas considerações, que serão retomadas mais adiante, voltemos ao Par-Fourier do *continuum*.

Como vimos, este par é constituído pela Integral de Fourier que representa  $f(t)$  no domínio de tempo  $t$  e pela Transformada de Fourier  $F(\omega)$  que representa a função  $f(t)$  no domínio de frequência  $\omega$ , em estreita analogia com a Série de Fourier e seus coeficientes  $C_n$ .

Da mesma forma, define-se **espectro de amplitude e espectro de fase** da função  $f(t)$ .

Para funções periódicas definimos espectro de amplitude da função  $f(t)$  como o gráfico de  $|C_n|$  versus  $\omega_n$ , onde  $\omega_n$  são as

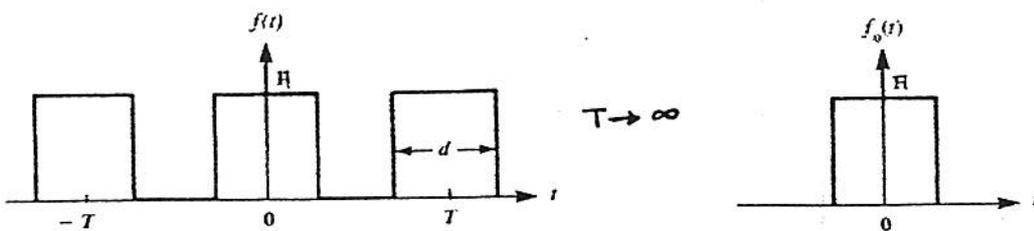
freqüências discretas. Da mesma forma, para funções aperiódicas o espectro de amplitude de  $f(t)$  é definido como o gráfico de  $|F(w)|$  versus  $w$ .

Como no *continuum* as variáveis são contínuas, isto é,  $-\infty < w < \infty$ , o espectro das funções aperiódicas não será um espectro de pontos ou linhas como os vistos na 3ª aula para as funções periódicas. Será a representação gráfica de funções do *continuum* de freqüências.

Com estas considerações, concluímos a chamada transição do discreto para o *continuum*. Vamos ilustrar esta transição com o trem de pulsos no limite  $T \rightarrow \infty$ .

Exemplo 1. Represente o pulso de largura  $d$  e amplitude  $A$  por sua Integral de Fourier e faça o gráfico de seu espectro de amplitude.

Este pulso é o limite para o período  $T$  tendendo ao infinito da função periódica (trem de pulsos), ou graficamente:



Trem de pulsos.

Um único pulso.

A fim de representar o pulso por sua Integral de Fourier, precisamos, inicialmente, calcular  $F(w)$ .

Assim ,

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt = A \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{-iwt} dt$$

Estamos diante de uma integral com limites de integração simétricos. No integrando temos uma função especial que é dada pela fórmula de Euler, isto é,  $e^{-iwt} = \cos wt - i \sin wt$ . Usando as propriedades de integrais com limites simétricos de funções pares e ímpares, concluímos

$$F(w) = 2A \int_0^{\frac{d}{2}} \cos wt dt = 2A \frac{\sin wt}{w} \Big|_0^{\frac{d}{2}} = 2A \frac{\sin(wd/2)}{w}$$

Ou ainda,

$$F(w) = Ad \frac{\sin(wd/2)}{(wd/2)} \quad (7)$$

Novamente, estamos diante da função  $\frac{\text{sen}x}{x}$ , com  $x = wd/2$ , sendo  $x$  definida em todo o conjunto dos reais.

Vamos agora representar o pulso  $f(t)$  por sua integral de Fourier, isto é :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwt} dw = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(wd/2)}{w} e^{iwt} dw$$

Novamente, estamos diante de limites de integração simétricos: precisamos estudar a paridade do integrando. Desta vez, a paridade terá que ser testada no domínio de  $w$ . A função  $\text{sen}x/x$  é par (reveja o seu gráfico). Portanto, apenas o integrando par prevalecerá, isto é

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(wd/2)}{w} \cos wt dw$$

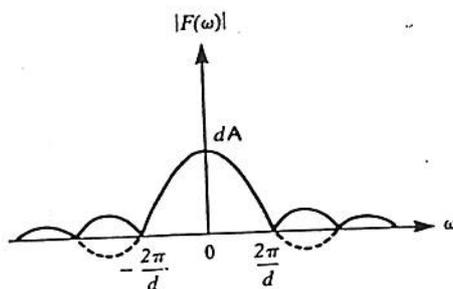
Esta é a forma final da Integral de Fourier para o pulso de largura  $d$  e amplitude  $A$ .

Vamos, agora construir seu espectro de amplitude, isto é, o gráfico  $|F(w)|$  versus  $w$ . Como  $F(w)$  já foi calculada, então

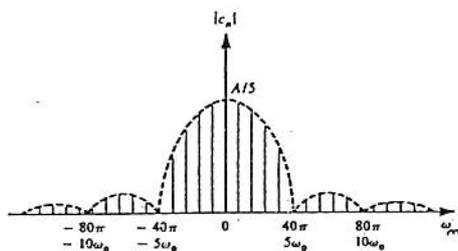
$$|F(w)| = Ad \left| \frac{\text{sen}(wd/2)}{(wd/2)} \right|$$

Esta função possui nós em  $wd/2 = \pi n$  ou  $w = \frac{2\pi}{d}n$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$  e sua

forma é a mesma do gráfico de  $\left| \frac{\text{sen}x}{x} \right|$ ,

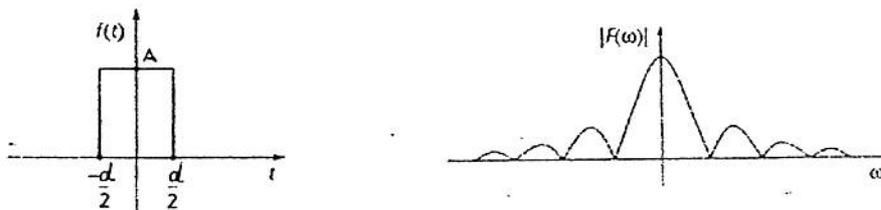


Vemos que este é um espectro contínuo, em contraposição ao espectro discreto do trem de pulsos,  $|C_n| = \frac{Ad}{T} \left| \frac{\text{sen}(w_n d/2)}{(w_n d/2)} \right|$ , cujo gráfico é da forma



Estes dois gráficos, quando comparados, evidenciam o que estamos chamando de transição do discreto para o continuum.

É usual, também, apresentar o Par-Fourier do pulso de largura  $d$  por seus gráficos:



### Teste da Representação de Fourier

Vamos, a seguir, mostrar que a representação de Fourier é consistente, isto é, a Integral de Fourier é uma outra maneira de definir a função.

Assim, o pulso de largura  $d$  e amplitude  $A$ , é definido analiticamente por

$$f(t) = \begin{cases} A, & |t| < d/2 \\ 0, & |t| > d/2 \end{cases}$$

Contudo, mostramos que sua Integral de Fourier é

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(wd/2)}{w} \cos wt \, dw$$

O que se espera de uma teoria consistente? Espera-se que realizando a integração acima obtenha-se a função pulso na forma de uma função definida por partes como a primeira. Contudo, a Integral de Fourier é uma integral imprópria com um polo em  $w = 0$ . Este tipo de integração é feito usando o Teorema dos Resíduos da teoria de variáveis complexas. Como este assunto não está contemplado na nossa disciplina, usaremos uma mini-tabela de integrais definidas.

Identificamos na nossa tabela, a fórmula n°5 :

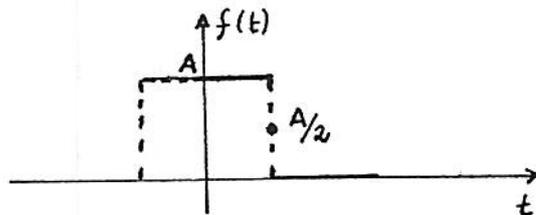
$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(mx) \cos(nx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , 0 < n < m \\ \frac{\pi}{4} & , n = m \\ 0 & , n > m \end{cases}$$

No nosso caso,  $x = w$ ,  $m = d/2$ ,  $n = t$  ( $t > 0$ ).

Ou seja,

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} \begin{cases} \pi/2 & , 0 < t < d/2 \\ \pi/4 & , t = d/2 \\ 0 & , t > d/2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad f(t) = \begin{cases} A & , 0 < t < d/2 \\ A/2 & , t = d/2 \\ 0 & , t > d/2 \end{cases}$$

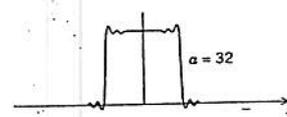
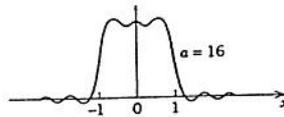
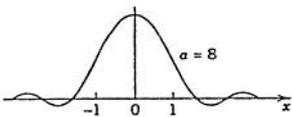
Esta última forma reproduz o lado direito ( $t > 0$ ) da função pulso e ainda garante a condição de Dirichlet para  $t = d/2$ . Como a função pulso foi definida de forma par, isto é,  $f(t) = f(-t)$ , então por reflexão vertical obtemos o gráfico completo.



Vamos agora calcular a Integral de Fourier numericamente. Para simplificar, consideramos  $A=1$  e  $d/2 = 1$ .

Seja 
$$I = \int_0^a \frac{\text{sen}w}{w} \cos(wt) dw$$

Apresentamos abaixo a integração numérica para  $a=8$ ,  $a=16$  e  $a=32$ .



Observe o aparecimento de oscilações próximas das descontinuidades ordinárias de  $f(t)$ . É de se esperar que estas oscilações desapareçam para valores maiores de  $a$ . Contudo, isto não acontece. Aumentando o limite superior da integração, as oscilações se deslocam para valores próximos de  $t = \pm 1$ , mas estarão sempre presentes. Seu mínimo valor é cerca de 9% da descontinuidade ordinária.

Este comportamento estranho é conhecido como "fenômeno de Gibbs".

Exercícios :

- 1) Partindo do Par-Fourier para as funções periódicas, faça a transição para o continuum e chegue à chamada identidade de Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] e^{i\omega t} d\omega$$

- 2) Mostre que a identidade acima poderá ainda ser expressa por :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau d\omega$$

- 3) Mostre que se  $f(t)$  for real então, a igualdade acima se reduz a:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos\omega(t-\tau) d\tau d\omega$$

- 4) Parta da igualdade acima para demonstrar que

a) Se  $f(t)$  for par, então

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\omega t \int_0^{\infty} f(\tau) \cos\omega\tau d\tau d\omega$$

b) Se  $f(t)$  for ímpar, então

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin\omega t \int_0^{\infty} f(\tau) \sin\omega\tau d\tau d\omega$$

Roteiro de estudo da 4ª aula :

- 1) Quais são os argumentos iniciais usados para se proceder a transição para o *continuum* ? Você pode partir do trem de pulsos para apresentar seus argumentos.
- 2) Como se dá a transição analiticamente ?
- 3) Como aparece o Par-Fourier para funções aperiódicas?
- 4) Que vem a ser a Integral de Fourier e a Transformada de Fourier ?
- 5) Trace um paralelo com o Par-Fourier para funções periódicas.
- 6) Como se define o espectro de amplitude de uma função aperiódica? Como se comporta o gráfico que descreve este espectro? Qual a diferença com relação ao espectro de funções periódicas?
- 7) Reproduza os passos que levam ao Par-Fourier para o pulso de altura  $A$  e duração  $d$  . Saiba expressá-lo analítica e graficamente.
- 8) Mostre como se comporta o espectro de amplitude deste pulso. Compare sua forma analítica e gráfica com a do trem de pulsos.
- 9) Teste a representação de Fourier para o pulso de altura  $A$  e duração  $d$ . Identifique o aparecimento do valor de Dirichlet.
- 10) Você saberia dizer o que são as Oscilações de Gibbs ?  
(Se tem curiosidade e que saber mais consulte [www.en.wikipedia.org](http://www.en.wikipedia.org))

## Algumas Integrais Definidas

Fonte :Dwight , H.B., Tables of Integrals and other Mathematical Data.

$1. \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos mx \, dx = \frac{a}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$	$2. \int_0^{\infty} e^{-ax} \operatorname{sen} mx \, dx = \frac{m}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$
$3. \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	$4. \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} mx}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{\pi}{2} e^{-ma} \quad (a \geq 0, m > 0)$
$5. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} mx \cos nx}{x} \, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n < m \\ \frac{\pi}{4}, & n = m \\ 0, & n > m \end{cases} \quad (m > 0, n > 0)$	$6. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} mx}{x} \, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m < 0 \end{cases}$
$7. \int_0^{\infty} e^{-r^2 x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \quad (r > 0)$	$8. \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos mx \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$
$9. \int_0^{\infty} x e^{-ax} \operatorname{sen} mx \, dx = \frac{2am}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	$10. \int_0^{\infty} e^{-ax} \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx = \frac{m(a^2 + m^2 - n^2)}{[a^2 + (m-n)^2][a^2 + (m+n)^2]} \quad (a > 0)$
$11. \int_0^{\infty} x e^{-ax} \cos mx \, dx = \frac{a^2 - m^2}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	$12. \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^4 + 4a^4} \, dx = \frac{\pi}{8a^3} e^{-ma} (\operatorname{sen} ma + \cos ma)$
$13. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 mx}{x^2} \, dx =  m  \frac{\pi}{2}$	$14. \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} \, dz$
$15. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 ax \operatorname{sen} mx}{x} \, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0 < m < 2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0 < 2a = m) \\ 0, & (0 < 2a < m) \end{cases}$	$16. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx}{x^2} \, dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0 < m \leq n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0 < n \leq m) \end{cases}$
$17. \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax} \operatorname{sen} mx \, dx = \frac{2m(3a^2 - m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$	$18. \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax} \cos mx \, dx = \frac{2a(a^2 - 3m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$
$19. \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{(a^2 + x^2)^2} \, dx = \frac{\pi}{4a^3} (1 + ma) e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	$20. \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} mx}{(a^2 + x^2)^2} \, dx = \frac{\pi m}{4a} e^{-ma} \quad (a > 0, m > 0)$
$21. \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos mx}{(a^2 + x^2)^2} \, dx = \frac{\pi}{4a} (1 - ma) e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	$22. \int_0^{\infty} x e^{-a^2 x^2} \operatorname{sen} mx \, dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$

## Análise de Fourier: 5ª aula

Analogia entre Séries e Integrais de Fourier.

Série de Fourier Trigonométrica:  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos w_n t + b_n \operatorname{sen} w_n t)$

Série de Fourier Complexa:  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t}$

Integral de Fourier:  $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{i w t} dw$

Integral de Fourier Trigonométrica:  $f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(w) \cos w t + B(w) \operatorname{sen} w t] dw$

Integral de Fourier Trigonométrica: uma 2ª versão para a Integral de Fourier.

Seja  $f(t)$  uma função real.

Parte-se da definição  $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i w t} dt$  e substitui-se

$e^{-i w t}$  pela fórmula de Euler. Obtém-se, então

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos w t dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} w t dt$$

Analogamente à definição dos coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  da Série de Fourier Trigonométrica, definimos  $A(w)$  e  $B(w)$ :

$$A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos w t dt \quad \text{e} \quad B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} w t dt$$

De tal forma que  $F(w) = A(w) - iB(w)$  fica análogo à

$$C_n = \frac{1}{2} (a_n - i b_n).$$

Vamos agora analisar a paridade de  $A(w)$  e  $B(w)$  com relação à variável  $w$ .

$$A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos w t dt \quad \longrightarrow \quad A(-w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(-w t) dt$$

Como  $\cos(-w t) = \cos(w t)$ , então  $A(w)$  é par.

Procedendo da mesma forma para  $B(w)$ , temos

$$B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} w t dt \quad \longrightarrow \quad B(-w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen}(-w t) dt$$

Como  $\text{sen}(-wt) = -\text{sen}(wt)$ , então  $B(w)$  é ímpar.

A Integral de Fourier  $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwt} dw$  fica então,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(w) - iB(w)] [\cos wt + i \text{sen} wt] dw$$

Como os integrandos  $A(w)\cos wt$  e  $B(w)\text{sen} wt$  são funções pares em  $w$ , e  $A(w)\text{sen} wt$  e  $B(w)\cos wt$  são ímpares em  $w$ , então pelas propriedades de simetria temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(w) \cos wt \, dw = 2 \int_0^{\infty} A(w) \cos wt \, dw$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(w) \text{sen} wt \, dw = 2 \int_0^{\infty} B(w) \text{sen} wt \, dw$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(w) \text{sen} wt \, dw = \int_{-\infty}^{\infty} B(w) \cos wt \, dw = 0$$

Substituindo estes resultados na expressão para  $f(t)$ , chegamos à Integral de Fourier na forma trigonométrica:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(w) \cos wt + B(w) \text{sen} wt] dw$$

Esta versão da Integral de Fourier é o análogo no continuum da Série de Fourier Trigonométrica no discreto

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos w_n t + b_n \text{sen} w_n t)$$

### Representação de funções

Passaremos agora ao estudo de quatro funções muito importantes, construindo seus espectros e representando-as por suas Integrais de Fourier. Estas funções são:

- I) Exponencial Decrescente
- II) Fenda de largura  $d$
- III) Curva de Gauss
- IV) Delta de Dirac

I) Exponencial Decrescente:

Sua representação analítica é

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & , t > 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases} \quad a > 0$$

Sua representação por Integral de Fourier, inicia com o cálculo

de sua Transformada de Fourier  $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt :$

$$F(w) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-iwt} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} [\cos wt - i \sin wt] dt = \int_0^{\infty} e^{-at} \cos wt dt - i \int_0^{\infty} e^{-at} \sin wt dt$$

Usando a nossa mini-tabela de integrais definidas, identificamos a 1ª integral com a TAB(1) e a 2ª com a TAB(2), sendo  $m = w$ . Assim

$$F(w) = \frac{a}{w^2 + a^2} - i \frac{w}{w^2 + a^2}$$

Comparando com  $F(w) = A(w) - iB(w)$ , concluímos que

$$A(w) = \frac{a}{w^2 + a^2} \quad \text{e} \quad B(w) = \frac{w}{w^2 + a^2}$$

Confirmamos o fato de que  $A(w)$  é par e  $B(w)$  é ímpar.

O **espectro de amplitude** da exponencial decrescente é o gráfico de  $|F(w)|$  versus  $w$ . Calculemos o módulo de  $F(w)$  :

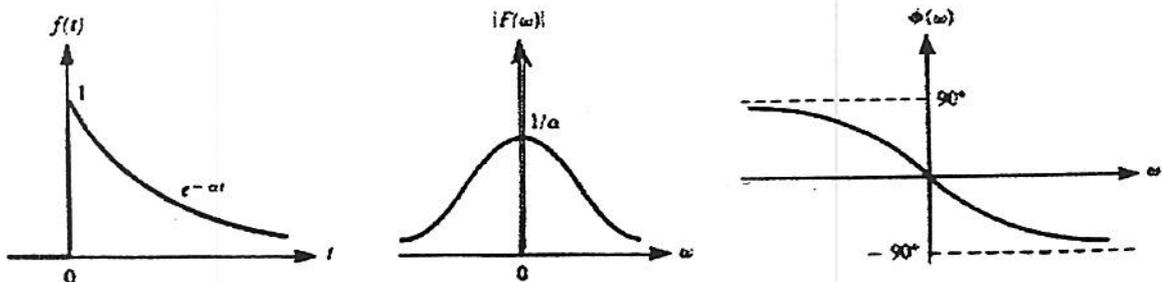
$$|F(w)| = \sqrt{F(w)F^*(w)} = \frac{1}{w^2 + a^2} \sqrt{(a - iw)(a + iw)} = \frac{\sqrt{a^2 + w^2}}{w^2 + a^2} = \frac{1}{\sqrt{w^2 + a^2}}$$

O **espectro de fase**  $\phi(w)$  é definido como

$$\phi(w) = \tan^{-1} \frac{\text{Im}\{F(w)\}}{\text{Re}\{F(w)\}} = \tan^{-1} \left( \frac{-B(w)}{A(w)} \right)$$

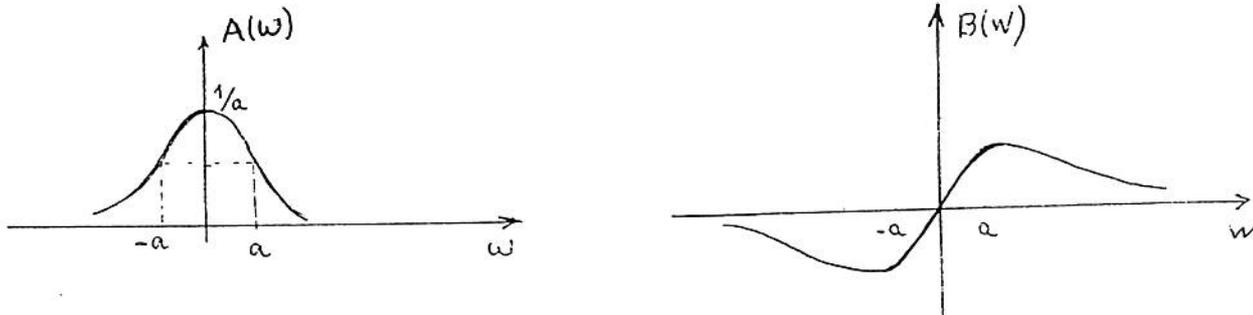
Neste exemplo  $\phi(w) = -\tan^{-1}(w/a)$

Apresentamos, abaixo, as curvas representativas da função  $f(t) = e^{-at}$ ,  $t > 0$ , de seus espectros de magnitude e de fase.



A parte real  $A(w) = \frac{a}{w^2 + a^2}$  e a parte imaginária

$B(w) = \frac{w}{w^2 + a^2}$  possuem os seguintes gráficos:



Finalmente vamos representar a nossa exponencial decrescente por sua Integral de Fourier:

$$e^{-at} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a - iw}{w^2 + a^2} e^{iwt} dw \quad \text{ou na forma trigonométrica}$$

$$e^{-at} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{a}{w^2 + a^2} \cos wt \, dw + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{w}{w^2 + a^2} \operatorname{sen} wt \, dw$$

#### TESTES DA REPRESENTAÇÃO POR INTEGRAL DE FOURIER.

Vamos, a seguir testar a representação com relação às condições de Dirichlet, no ponto de descontinuidade ordinária  $t=0$ . Sabemos que neste ponto, devemos ter:

$$f(0) = \frac{1}{2} [f(0^+) + f(0^-)] = \frac{1}{2} [1 + 0] = \frac{1}{2}$$

Vamos conferir com a Integral de Fourier Trigonométrica em  $t=0$ , isto é

$$f(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{a}{w^2 + a^2} \cos 0 \, dw + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{w}{w^2 + a^2} \operatorname{sen} 0 \, dw = \frac{1}{\pi} a \int_0^{\infty} \frac{1}{w^2 + a^2} \, dw$$

Esta última integral está na nossa tabela de integrais definidas, TAB(3), com  $m=0$ , e assim  $f(0) = \frac{1}{\pi} a \frac{\pi}{2a} \equiv \frac{1}{2}$ .

O segundo teste que faremos com a representação de Fourier é mostrar que se realizarmos a integração, de fato, encontraremos  $f(t) = e^{-at}$ ,  $t > 0$ . Assim, partindo de

$$e^{-at} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{a}{w^2 + a^2} \cos wt \, dw + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{w}{w^2 + a^2} \operatorname{sen} wt \, dw \quad e$$

usando Tab(3) e TAB(4), com  $m=t$ , encontramos

$$e^{-at} = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2a} a e^{-at} + \frac{\pi}{2} e^{-at} \right] \equiv e^{-at} \quad , t > 0 .$$

## II) Fenda de largura $d$ .

Até aqui trabalhamos com o par de variáveis  $t$  e  $w$ . Aproveitaremos este exemplo para introduzir um outro par de variáveis:  $x$  e  $k$ . Por  $x$  estamos querendo dizer a variável espacial unidimensional e por  $k$  o vetor de onda, neste caso também unidimensional. Esta expressão vetor de onda vem da

Física Ótica e é definido por  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , sendo  $\lambda$  o comprimento de onda da radiação.

Assim, se nosso problema está definido no espaço em vez de no tempo, então, em todas as fórmulas deduzidas anteriormente devemos substituir  $t$  por  $x$  e  $w$  por  $k$ . Assim o Par-Fourier nas variáveis  $x$  e  $k$  fica:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \quad e \quad F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Com o nome de fenda de largura  $d$  estamos querendo dizer o mesmo que o pulso de duração  $d$ , apenas que o primeiro está definido no domínio do espaço e o segundo no domínio do tempo. Assim, a forma analítica da fenda de largura  $d$  e altura unitária é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , |x| < d/2 \\ 0 & , |x| > d/2 \end{cases}$$

Vamos calcular, inicialmente,  $F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$ . Como a  $f(x)$  é par, usaremos a propriedade de simetria para escrever

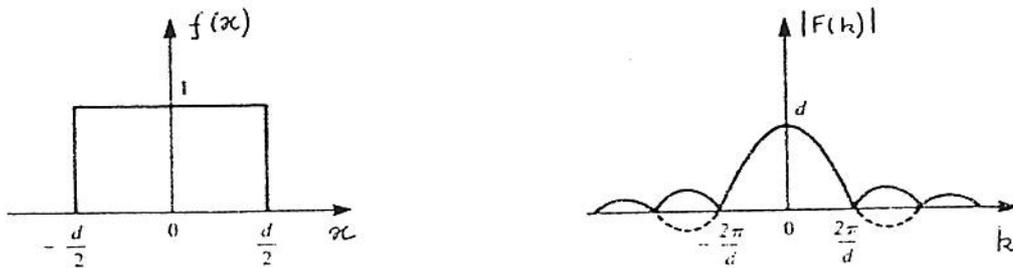
$$F(k) = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} f(x) \cos kx \, dx = 2 \int_0^{\frac{d}{2}} \cos kx \, dx = 2 \frac{\operatorname{sen}(kd/2)}{k}$$

E o espectro será o gráfico de  $|F(k)|$  versus  $k$ , isto é,

$$|F(k)| = d \left| \frac{\operatorname{sen}(kd/2)}{(kd/2)} \right|$$

e portanto um espectro contínuo, em contraposição ao espectro discreto das funções periódicas.

Reproduzimos abaixo a fenda de largura  $d$  e altura 1, e seu respectivo espectro .



Vamos, agora expressar a sua Integral de Fourier. Partimos de

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(kd/2)}{k} e^{ikx} dk$$

Lembrando que a função  $\frac{\text{sen}(kd/2)}{k}$  é par na variável  $k$ , tomamos a parte par de  $e^{ikx}$ , isto é,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(kd/2)}{k} \cos kx dk$$

Esta é a forma final da Integral de Fourier para a fenda. Todos os testes desta representação já foram feitos na aula anterior quando estudamos o pulso de duração  $d$ .

Nos dois exemplos seguintes continuaremos com funções definidas no domínio de  $x$ .

### III) A curva de Gauss ( ou distribuição gaussiana) :

Uma função importante que aparece em muitas áreas da física e das engenharias, tanto como uma forma precisa ou como uma aproximação, é a distribuição gaussiana ou normal. Sua Transformada de Fourier é importante porque quando interpretada estatisticamente, ela representa uma forma de expressar o *princípio da incerteza*.

Esta função é definida de tal modo que  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ , isto é, diz-se que a função está normalizada. Chamando de  $N$  esta constante de normalização, definimos a curva de Gauss por

$$f(x) = N e^{-\alpha x^2}, \text{ sendo } \alpha > 0 \text{ e } N > 0$$

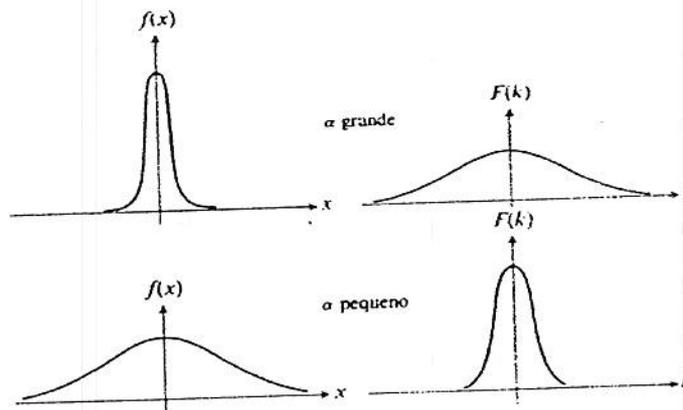
Esta é uma função par e portanto usaremos as convenientes propriedades de simetria para calcular sua Transformada de Fourier  $F(k)$ , ou seja

$$F(k) = N \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = 2N \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos kx dx$$

Esta é a TAB(8), com  $a^2 = \alpha$  e  $m = k$ . Logo

$$F(k) = N \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-k^2/4\alpha}$$

De onde se conclui que a Transformada de Fourier de uma gaussiana é uma gaussiana. Seus gráficos são mostrados a seguir. Observe, que se  $f(x)$  é muito pontiaguda, isto é,  $\alpha$  grande, então  $F(k)$  fica achatada e vice-versa.



Nas aplicações à Mecânica Quântica, esta característica está relacionada ao *princípio da incerteza* de Heisenberg.

De maneira análoga, se a distribuição gaussiana fosse definida no domínio de tempo, então, também valeria o *princípio da incerteza*, no sentido que quanto mais estreito no tempo for, por exemplo, um sinal elétrico tanto mais estará 'espalhado' no domínio de frequência.

#### IV) A Delta de Dirac (ou função impulso)

Muito do que conhecemos da delta de Dirac veio através de suas propriedades e isto nos induz a concluir que ela não é uma função usual. Inclusive, sua definição formal até agora não foi dada. O que vimos foi uma definição simbólica, dada por

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty, & t=a \\ 0, & t \neq a \end{cases} \quad \text{no domínio de } t$$

$$\delta(x-a) = \begin{cases} \infty, & x=a \\ 0, & x \neq a \end{cases} \quad \text{no domínio de } x$$

É chegado o momento de usar a Integral de Fourier para representar analiticamente a delta de Dirac.

Vamos inicialmente calcular a sua Transformada de Fourier  $F(w)$  para  $\delta(t-a)$  ou  $F(k)$  para  $\delta(x-a)$ .

Para tanto usaremos a propriedade de filtragem, ou seja

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-a) dt = f(a) \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

Observe que é a mesma propriedade usada na área II, onde as funções eram por hipótese causais. Como agora nossas funções são não causais estendemos o limite inferior de integração para  $-\infty$ .

Assim 
$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) e^{-ikx} dx = e^{-ika}$$

Da mesma forma 
$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) e^{-iwt} dt = e^{-iwa}$$

E finalmente 
$$\delta(x-a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ika} e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-a)} dk, \text{ isto é}$$

$$\delta(x-a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-a)} dk \quad \text{e}$$

$$\delta(t-a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iw(t-a)} dw$$

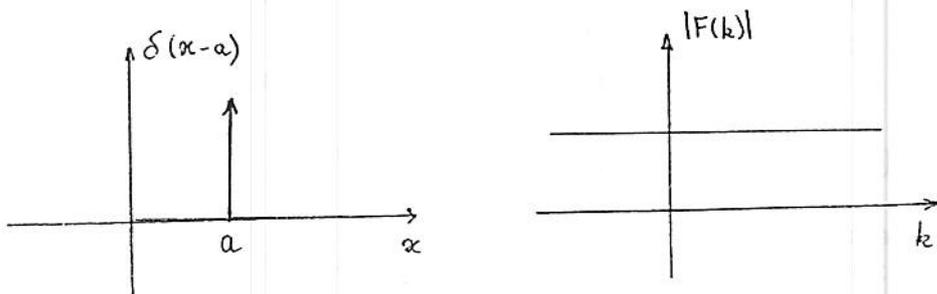
Temos agora uma forma analítica para a delta de Dirac, seja no domínio de  $t$ , seja no domínio de  $x$  ou nos domínios recíprocos,  $w$  ou  $k$ . Contudo estas integrais, diferentemente das outras representações estudadas aqui, não podem ser realizadas, apenas podemos interpretá-las como um processo que converge para a delta de Dirac.

Outro aspecto que pode gerar dúvidas é com relação à presença da exponencial complexa no integrando. Sabemos que esta função é dada pela fórmula de Euler e portanto possui parte real e parte imaginária. Contudo, como a parte real é par e a parte imaginária é ímpar e os limites de integração são simétricos, 'sobreviverá' apenas a integral da parte par. Logo, a delta de Dirac é real, como aliás já sabíamos e a representação de Fourier mais uma vez mostrou coerência.

Vamos ver como fica o **espectro de amplitude** da delta.

Como  $F(k) = e^{-ika}$ , então  $|F(k)| = 1$ .

Apresentamos a seguir os gráficos da delta de Dirac com seu espectro de amplitude.



Você deve estar achando curioso o resultado para o espectro da delta, mas à luz do *princípio da incerteza* a explicação é a seguinte : uma completa certeza em um certo domínio leva a uma total incerteza no domínio recíproco.

Outras representações para a delta de Dirac.

Apenas, para ilustrar, apresentamos a seguir outras representações para a delta de Dirac, fora do contexto da Análise de Fourier. Como conhecemos as funções usadas nestas representações, deixamos a cargo do aluno, como um exercício de abstração, realizar mentalmente, os processos de limite que convergem para a delta de Dirac, em cada caso.

$$a) \delta(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-ax^2} \quad (\text{limite de um gaussiana})$$

$$b) \delta(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{2} e^{-a|x|} \quad (\text{limite de uma exponencial par})$$

$$c) \delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{x^2 + a^2} \quad (\text{limite de uma lorentziana})$$

$$d) \delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} a \frac{\text{sen}(ax)}{(ax)} \quad (\text{limite da função } \text{senc}(x) = \frac{\text{sen}x}{x} )$$

#### Apêndice da 5ª aula : ângulo de fase

Dedução das fórmulas usadas para cálculo de ângulos de fase :

$$a) \text{ no discreto} \quad \varphi_n = \tan^{-1}(-b_n/a_n)$$

$$b) \text{ no continuum} \quad \varphi(\omega) = \tan^{-1}(-B(\omega)/A(\omega))$$

a) No discreto:  $C_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n)$  (definição)

$$C_n = |C_n| e^{i\varphi_n} \quad (\text{forma polar de um complexo})$$

Lembrando que  $|C_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ , então

$$\frac{C_n}{|C_n|} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} - i \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \cos \varphi_n + i \operatorname{sen} \varphi_n$$

Desta última igualdade vem que

$$\cos \varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \varphi_n = \frac{-b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$$

Dividindo  $\operatorname{sen} \varphi_n$  por  $\cos \varphi_n$  encontramos :

$$\tan \varphi_n = \frac{-b_n}{a_n} \quad \text{ou} \quad \varphi_n = \tan^{-1} \left( \frac{-b_n}{a_n} \right) \equiv \tan^{-1} \left( \frac{\operatorname{Im}\{C_n\}}{\operatorname{Re}\{C_n\}} \right)$$

b) No contínuo:  $F(w) = A(w) - iB(w)$  (definição)

$$F(w) = |F(w)| e^{i\varphi} \quad (\text{forma polar de um complexo})$$

Como  $|F(w)| = \sqrt{A(w)^2 + B(w)^2}$ , e procedendo de forma análoga ao item a), temos

$$\frac{F(w)}{|F(w)|} = \frac{A(w)}{\sqrt{A(w)^2 + B(w)^2}} - i \frac{B(w)}{\sqrt{A(w)^2 + B(w)^2}} = \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi$$

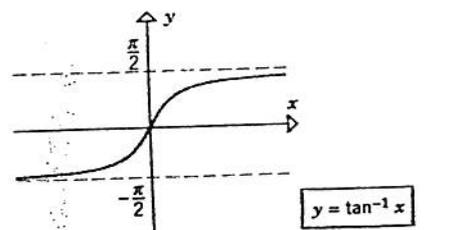
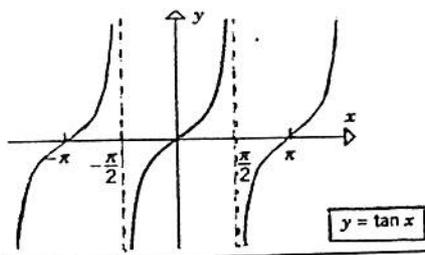
Desta última igualdade vem que  $\cos \varphi = \frac{A(w)}{\sqrt{A(w)^2 + B(w)^2}}$  e

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{-B(w)}{\sqrt{A(w)^2 + B(w)^2}}$$

Dividindo  $\operatorname{sen} \varphi$  por  $\cos \varphi$ , obtemos, finalmente

$$\tan \varphi = \frac{-B(w)}{A(w)} \quad \text{ou} \quad \varphi = \tan^{-1} \left( \frac{-B(w)}{A(w)} \right)$$

Vamos aproveitar para ver a paridade da função trigonométrica inversa  $y = \tan^{-1} x$ . Consulte a tabela Série de Potências, ou dos gráficos abaixo. Podemos afirmar que  $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$ ?



Roteiro de estudo da 5ª aula:

1) Obtenha a forma trigonométrica da Integral de Fourier. Estabeleça as analogias entre as fórmulas que definem os coeficientes de Fourier ( $C_n$ ) e as que definem Transformadas de Fourier ( $F(w)$ ).

2) Estude a paridade das funções  $A(w)$ ,  $B(w)$  e  $F(w)$ . Compare com a paridade de  $a_n$ ,  $b_n$  e  $C_n$ . Lembre-se que no *continuum* a variável  $w$  é contínua e no discreto a variável  $w_n$  é discreta.

3) Saiba representar por Integral de Fourier a) a exponencial decrescente (domínio tempo-frequência); b) a fenda de largura  $d$  (domínio espaço-vetor de onda); c) curva de Gauss e d) delta de Dirac (domínio tempo-frequência, domínio espaço-vetor de onda).

4) Saiba calcular os espectros de magnitude destas funções, isto é, chegue aos gráficos de  $|F(w)| \times w$ .

5) Qual é o domínio de definição da chamada fenda de largura  $d$ ? Como se chama a função análoga no domínio de tempo?

6) Você deve ter demonstrado que a Transformada de Fourier da Gaussiana é uma Gaussiana. Que relação há com o *princípio da incerteza* de Heisenberg?

7) Convença-se, a partir de sua representação por Integral de Fourier, de que a função impulso ou delta de Dirac é real.

8) Como fica o *princípio da incerteza* para a delta de Dirac?

9) Faça os gráficos das curvas (Gaussiana, exponencial par, Lorentziana, seno cardinal) que, em processos limites, levam à delta de Dirac.

10) Como se define espectro de fase para as funções aperiódicas. Trace um paralelo com as funções periódicas. (Leia o apêndice).

Exercícios:

1) Mostre que: a) se  $f(t)$  é par,  $F(w)$  é real;

b) se  $f(t)$  é ímpar,  $F(w)$  é imaginário puro;

c) se  $f(t)$  não é par nem ímpar, então  $F(w)$  é

complexo.

2) Mostre que  $F^*(w) = F(-w)$ . (Está lembrado que  $C_n^* = C_{-n}$ ?)

3) Mostre que a delta de Dirac ou função impulso poderá ainda ser representada pela seguinte Integral de Fourier:

$$\delta(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos wt \, dw$$

Você acha razoável, então, representá-la por qualquer uma das formas:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwt} \, dw \quad \text{e} \quad \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} \, dw \quad ?$$

## Análise de Fourier: 6ª aula

A Transformada de Fourier.

Vimos na aula passada que  $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt$  ou

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

são os coeficientes da Integral de Fourier de  $f(t)$  ou  $f(x)$ .

Pois bem, olharemos para  $F(w)$  (ou  $F(k)$ ) como uma TRANSFORMADA de uma função  $f(t)$  (ou  $f(x)$ ), como foi feito com a Transformada de Laplace.

Assim como  $\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

também  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt = \mathfrak{F}\{f(t)\} = F(w)$  ou

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \mathfrak{F}\{f(x)\} = F(k)$$

Observe que a notação usada para designar a operação Transformada de Fourier de uma certa função  $f(t)$  é  $\mathfrak{F}\{f(t)\}$  e a Transformada Inversa é designada por

$\mathfrak{F}^{-1}\{F(w)\}$ . A Transformada Inversa, como já vimos na área II, recupera a função original, com a diferença que, a função original agora é representada pela Integral de Fourier, isto é:

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F(w)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwt} dw = f(t) \quad \text{ou}$$

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F(k)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk = f(x)$$

Antes de deduzirmos as propriedades da Transformada de Fourier, vamos apresentar os conceitos de Transformada de Fourier Co-seno e Transformada de Fourier Seno.

Estes conceitos são úteis quando estamos trabalhando com funções causais, isto é, funções que se anulam para  $t < 0$ . Para estas funções, em algumas situações, é conveniente, definir prolongamento par e ímpar, e em termos deles, representar a  $f(t)$  causal. Vejamos estas definições matemáticas.

DEFINIÇÕES:

Transformada de Fourier Co-seno:

$$\mathfrak{F}_c\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cos wt \, dt \equiv F_c(w)$$

Transformada de Fourier Seno :

$$\mathfrak{F}_s\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \operatorname{sen} wt \, dt \equiv F_s(w)$$

Em termos destas Transformadas de Fourier define-se, para  $t > 0$ ,

Prolongamento Par - 
$$f_p(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(w) \cos wt \, dw$$

Prolongamento Impar - 
$$f_i(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(w) \operatorname{sen} wt \, dw$$

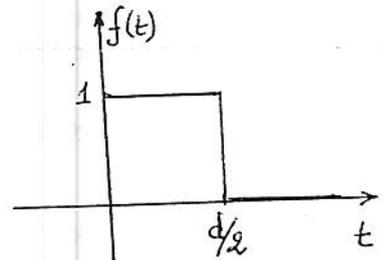
De tal modo que a função  $f(t)$  que não é nem par nem impar, poderá ser escrita em termos de sua Integral de Fourier como

$$f(t) = f_p(t) + f_i(t) = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\infty} F_c(w) \cos wt \, dw + \int_0^{\infty} F_s(w) \operatorname{sen} wt \, dw \right]$$

Esta é apenas uma maneira, já simplificada, de representar funções causais por Integral de Fourier, deixando explícitas a sua parte par e sua parte impar, que recebem também o nome de Prolongamento Par e Prolongamento Impar.

Exemplo 1. Achar o Prolongamento Par e Impar para função pulso unitário definido para  $t > 0$  por:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < d/2 \\ 0, & t > d/2 \end{cases} \quad \text{ou graficamente}$$

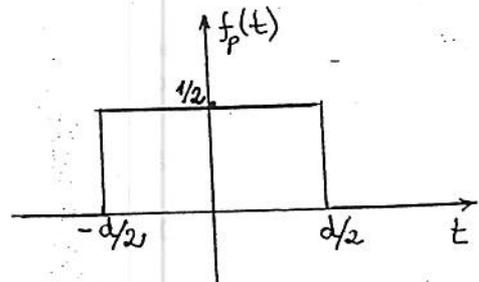


$$F_c(w) = \int_0^{\infty} f(t) \cos wt \, dt = \int_0^{d/2} \cos wt \, dt = \frac{\operatorname{sen}(wd/2)}{w}$$

$$f_p(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(w) \cos wt \, dw, \text{ logo}$$

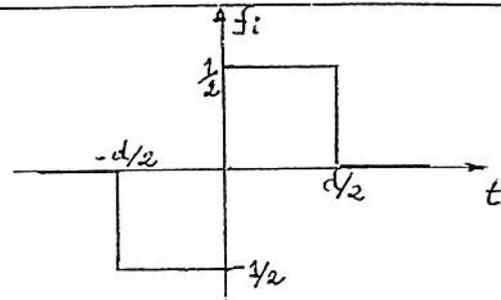
$$f_p(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(wd/2)}{w} \cos wt \, dw \quad \text{ou}$$

$$F_s(w) = \int_0^{\infty} f(t) \operatorname{sen} wt \, dt = \int_0^{d/2} \operatorname{sen} wt \, dt = \left. \frac{-\cos wt}{w} \right|_0^{d/2} = \frac{1 - \cos(wd/2)}{w}$$



$$f_i(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(w) \operatorname{sen}wt \, dw, \text{ logo}$$

$$f_i(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(wd/2)}{w} \operatorname{sen}wt \, dw \quad \text{ou}$$



Exercício 2 . Use a tabela de integrais definidas para mostrar que a Integrais de Fourier para  $f_p(t)$  e  $f_i(t)$  reproduzem as funções dos gráficos acima .

### PROPRIEDADES DAS TRANSFORMADAS DE FOURIER

Assim, como no estudo das Transformadas de Laplace, as propriedades das Transformadas de Fourier são usadas para facilitar os cálculos, e também para testar algumas simetrias dos sistema físicos. Há algumas novas propriedades, não contempladas na área II, e outras muito semelhantes às das Transformadas de Laplace.

1ª) Linearidade ou Superposição : Se  $\mathfrak{F}\{f(t)\} = F(w)$  e  $\mathfrak{F}\{g(t)\} = G(w)$ , então

$$\mathfrak{F}\{af(t) + bg(t)\} = aF(w) + bG(w)$$

A demonstração desta propriedade segue simplesmente da linearidade das integrais que definem o Par-Fourier.

2ª) Transformada da derivada: Se  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ , então

$$\mathfrak{F}\{f'(t)\} = iwF(w)$$

Demonstração: Parte-se da definição  $\mathfrak{F}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-iwt} dt$  e integra-se por partes, sendo  $u = e^{-iwt}$  e  $dv = f'(t)dt$ , isto é

$$\mathfrak{F}\{f'(t)\} = e^{-iwt} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-i)w \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt \equiv iwF(w), \quad \text{c.q.d.}$$

Procedendo da mesma forma para o cálculo da  $\mathfrak{F}\{f''(t)\}$ , encontramos

$$\mathfrak{F}\{f''(t)\} = (iw)^2 F(w)$$

E por indução matemática se chega a forma geral

$$\mathfrak{F}\{f^{(n)}(t)\} = (iw)^n F(w)$$

3ª) Deslocamento no eixo  $w$ : Se  $\mathfrak{F}\{f(t)\} = F(w)$ , então

$$\mathfrak{F}\{e^{at} f(t)\} = F(w+ia)$$

onde  $a$  é uma constante real ou complexa.

Demonstração: Parte-se da definição de  $\mathfrak{F}\{e^{at} f(t)\}$ , isto é

$$\mathfrak{F}\{e^{at} f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{at} e^{-iwt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(w+ia)t} dt \equiv F(w+ia), \quad \text{c.q.d.}$$

4ª) Deslocamento no eixo  $t$ : Se  $\mathfrak{F}\{f(t)\} = F(w)$ , então

$$\mathfrak{F}\{f(t-a)\} = e^{-iaw} F(w)$$

Demonstração: Parte-se de  $\mathfrak{F}\{f(t-a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a) e^{-iwt} dt$  e substitui-se

$t-a = \tau$  e  $dt = d\tau$ , isto é

$$\mathfrak{F}\{f(t-a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i w(\tau+a)} d\tau = e^{-iwa} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i w\tau} d\tau \equiv e^{-iwa} F(w), \quad \text{c.q.d.}$$

Observe que o espectro de amplitude não é afetado pelo deslocamento no tempo, apenas o espectro de fase varia de  $-wa$ .

Esta mesma conclusão já havíamos tirado no estudo do espectro discreto do trem de pulsos deslocado.

5ª) Transformada da integral: Se  $\mathfrak{F}\{f(t)\}=F(w)$  e  $F(0)=0$ , então

$$\mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{iw} F(w)$$

Demonstração: Seja  $g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ , então  $f(t) = g'(t)$ . Aplica-se a Transformada de Fourier nesta última igualdade, isto é  $\mathfrak{F}\{f(t)\} = \mathfrak{F}\{g'(t)\}$  ou

$$F(w) = \mathfrak{F}\{g'(t)\}$$

Usa-se a 2ª propriedade para calcular  $\mathfrak{F}\{g'(t)\}$ , isto é

$$\mathfrak{F}\{g'(t)\} = iw \mathfrak{F}\{g(t)\}$$

Então 
$$F(w) = iw \mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\}$$

Finalmente 
$$\mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{iw} F(w) \quad , \quad \text{c.q.d.}$$

6ª) Teorema da Modulação: Se  $\mathfrak{F}\{f(t)\} = F(w)$ , então

$$\mathfrak{F}\{f(t) \cos w_0 t\} = \frac{1}{2} F(w - w_0) + \frac{1}{2} F(w + w_0)$$

Demonstração: Parte-se de  $\mathfrak{F}\{f(t) \cos w_0 t\}$ , onde se usa a fórmula de Euler para  $\cos w_0 t$  e após a 3ª propriedade, isto é

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{f(t) \cos w_0 t\} &= \frac{1}{2} \mathfrak{F}\{f(t) e^{iw_0 t}\} + \frac{1}{2} \mathfrak{F}\{f(t) e^{-iw_0 t}\} = \\ &= \frac{1}{2} F(w - w_0) + \frac{1}{2} F(w + w_0) \quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

7ª) Teorema da Convolução

a) Convolução no tempo:

Se  $F_1(w) = \mathfrak{F}\{f_1(t)\}$  e  $F_2(w) = \mathfrak{F}\{f_2(t)\}$ , então

$$\mathfrak{F}\{f_1 * f_2\} = F_1(w) F_2(w)$$

Ou seja, a Transformada da convolução de duas funções é o produto de suas Transformadas.

Demonstração: Parte-se da definição de Transformada de Fourier de  $\mathfrak{F}\{f_1 * f_2\}$ , isto é

$$\mathfrak{F}\{f_1 * f_2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t) * f_2(t)] e^{-i\omega t} dt$$

Usamos agora a definição de convolução de duas funções não causais, isto é

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

A Transformada da convolução de duas funções fica, então

$$\mathfrak{F}\{f_1 * f_2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-i\omega t} dt$$

Vamos reverter a ordem de integração, integrando inicialmente em  $t$  e após em  $\tau$ , ou seja

$$\mathfrak{F}\{f_1 * f_2\} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-i\omega t} dt \right]$$

Observe como estamos indicando que a 1ª integral a ser realizada é a que está entre colchetes. O resultado desta integração será uma função de  $\tau$  que fará parte do integrando da 2ª integração.

Assim, indicando por  $I$  a integral entre colchetes e fazendo uma conveniente substituição de variável, isto é, substituindo  $t - \tau = T$  e  $dt = dT$ , temos

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(T) e^{-i\omega(T + \tau)} dT = e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(T) e^{-i\omega T} dT \equiv e^{-i\omega\tau} F_2(\omega)$$

Substituindo este resultado na Transformada da convolução, temos

$$\mathfrak{F}\{f_1 * f_2\} = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] F_2(\omega) \equiv F_1(\omega) F_2(\omega) \quad \text{c.q.d.}$$

b) Convolução na frequência: Se  $F_1(\omega) = \mathfrak{F}\{f_1(t)\}$  e  $F_2(\omega) = \mathfrak{F}\{f_2(t)\}$ , então

$$F_1(\omega) * F_2(\omega) = 2\pi \mathfrak{F}\{f_1(t) f_2(t)\}$$

Ou, de outra forma

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F_1(\omega) * F_2(\omega)\} = 2\pi f_1(t) f_2(t)$$

Esta propriedade afirma que calcular uma convolução no domínio de frequência corresponde a determinar a Transformada de Fourier do produto de duas funções no domínio do tempo.

Demonstração: Partimos da definição de Inversa, isto é

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F_1(w) * F_2(w)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(w) * F_2(w) e^{iwt} dw$$

Substituindo a convolução  $F_1(w) * F_2(w)$  pela sua definição e após revertendo a ordem de integração, temos

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F_1 * F_2\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F_1(v) F_2(w-v) dv \right] e^{iwt} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv F_1(v) \int_{-\infty}^{\infty} F_2(w-v) e^{iwt} dw$$

Observe que estamos procedendo da mesma forma que na demonstração anterior. Indicaremos a 2ª integral por I e nela faremos a substituição de variável  $w-v = \mu \therefore dw = d\mu$ , ou seja

$$I = e^{ivt} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\mu) e^{i\mu t} d\mu \equiv e^{ivt} [2\pi f_2(t)]$$

Substituindo este resultado, temos

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F_1(w) * F_2(w)\} = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F_1(v) e^{ivt} dv \right] f_2(t) \equiv 2\pi f_1(t) f_2(t) \quad , \text{ logo}$$

$$F_1(w) * F_2(w) = 2\pi \mathfrak{F}\{f_1(t) f_2(t)\} \quad \text{c.q.d.}$$

8ª) Conjugação : Se  $f(t)$  é uma função real então

$$F^*(w) = F(-w)$$

Demonstração : Parte-se de  $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt$  e faz-se a operação de conjugação, isto é

$$F^*(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [e^{-iwt}]^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iwt} dt \equiv F(-w) \quad \text{c.q.d.}$$

Observação : Esta propriedade também é válida para os coeficientes  $C_n$  da Série de Fourier Complexa. Você deve estar lembrado que precisamos demonstrar que  $C_n^* = C_{-n}$ .

9ª) Inversão Temporal : A troca  $t \rightarrow -t$  no domínio do tempo corresponde a troca  $w \rightarrow -w$  no domínio de frequência, isto é

$$\mathfrak{F}\{f(-t)\} = F(-w)$$

Demonstração : Parte-se de  $\mathfrak{F}\{f(-t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) e^{-iwt} dt$  e faz-se a substituição de variável  $t = -\tau \therefore dt = -d\tau$ , isto é

$$\mathfrak{F}\{f(-t)\} = - \int_{\infty}^{-\infty} f(\tau) e^{i w \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i w \tau} d\tau = F(-w) \quad \text{c.q.d.}$$

10ª) Simetria ou Dualidade : Se  $f(t)$  e  $F(w)$  formam um Par-Fourier, então

$$f(-w) = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{F}\{F(t)\}$$

Demonstração: Parte-se de  $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwt} dw$  e troca-se simultaneamente  $t \rightleftharpoons w$ , isto é

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{iwt} dt$$

Finalmente, troca-se  $w \rightarrow -w$ , chegando a

$$f(-w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-iwt} dt \quad \text{ou}$$

$$f(-w) = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{F}\{F(t)\} \quad \text{c.q.d.}$$

Observação : Esta propriedade mostra que as formas analíticas das funções designadas por  $f$  e  $F$  são intercambiáveis de acordo com a relação acima.

11ª) Mudança de escala : Se  $f(t)$  e  $F(w)$  formam um Par-Fourier, então uma mudança de escala no tempo, indicada por  $a$ , altera este par para  $f(at)$  e  $\frac{1}{|a|} F(w/a)$ .

Demonstração: Parte-se da definição de Transformada de Fourier de uma função  $f(at)$ , isto é

$$\mathfrak{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-iwt} dt$$

Seja  $at = \tau \therefore dt = \frac{1}{a} d\tau$ , com  $a > 0$ , temos

$$\mathfrak{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i(w/a)\tau} d\tau \equiv \frac{1}{a} F\left(\frac{w}{a}\right)$$

Com  $a < 0$ , temos

$$\mathfrak{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} f(\tau) e^{-i(w/a)\tau} d\tau = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i(w/a)\tau} d\tau = \frac{1}{|a|} F(w/a)$$

Conseqüentemente, combinando os dois resultados, obtemos

$$\mathfrak{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F(w/a)$$

Observações: a) Como o tempo e a freqüência são grandezas recíprocas, quando uma delas é dilatada num domínio a outra é comprimida no domínio recíproco e vice-versa.

b) A propriedade de Mudança de Escala pode ser usada para provar a Inversão Temporal.

12ª) Teorema de Parseval: Se  $f(t)$  e  $F(w)$  formam um par Fourier, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw$$

Demonstração: Vamos demonstrar para uma função  $f(t)$  real. Assim, podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwt} dw \right] dt, \text{ ou seja}$$

substituímos uma das funções por sua Integral de Fourier. A seguir, revertemos a ordem de integração, integrando 1º em  $t$  e após em  $w$ , isto é

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dw F(w) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iwt} dt \right]$$

A integral entre colchetes é  $F^*(w)$ , logo

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dw F(w) F^*(w) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw \quad \text{c.q.d.}$$

Observação : Vimos, que para funções periódicas, a potência em um sinal é associada com a soma das potências das frequências discretas. Este mesmo conceito pode ser estendido para funções não periódicas. Assim, se  $f(t)$  for, por exemplo, a tensão produzida por uma fonte e medida através de uma resistência de  $1\Omega$ , então  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$  é igual à energia total liberada pela fonte. O teorema de Parseval afirma que a energia associada ao sinal  $f(t)$  é dada por  $1/2\pi$  vezes a área sob a curva  $|F(w)|^2$ . Por este motivo, esta quantidade é chamada de densidade de energia espectral.

Roteiro de estudo da 6ª aula:

- 1) Justifique a razão pela qual  $F(w) = \mathfrak{F}\{f(t)\}$  é chamada de Transformada de Fourier .
- 2) Que vem a ser a Transformada Inversa ? Qual a sua notação ?
- 3) Como são definidas as Transformadas de Fourier Co-seno e Seno? E que são o Prolongamento Par e Impar de uma função ? Exemplifique com a função pulso unitário causal.
- 4) Quais as propriedades da Transformada de Fourier que existem também na Transformada de Laplace ? Suas demonstrações são generalizações do que você já viu ? E quais são as propriedades novas ? Saiba demonstrá-las.
- 5) Dado o par Fourier  $f(t) \Leftrightarrow F(w)$ , qual é o par para  $f(-t)$  ?
- 6) Qual é a propriedade que trata da relação entre  $f(w)$  e  $F(t)$ ?
- 7) Qual é a propriedade que trata da relação entre as variáveis nos respectivos domínios? Use esta propriedade para provar a propriedade da Inversão Temporal.
- 8) Trace um paralelo entre o teorema de Parseval para funções periódicas e não-periódicas. Quais os conceitos físicos associados ?

Lista de exercícios:

- 1) Encontre a Transformada de Fourier  $F(k)$  de :  
 $f(x) = e^{-a|x|}$  ,  $a > 0$  . R:  $2a / (k^2 + a^2)$  .
- 2) Encontre a Transformada de Fourier  $F(w)$  de :  
 $f(t) = e^{-a|t|}$  ,  $a > 0$  . R:  $2a / (w^2 + a^2)$  .
- 3) Encontre a Transformada de Fourier  $F(w)$  de:  
 $f(t) = \delta(t - t_0)$  .
- 4) Encontre a Transformada de Fourier  $F(k)$  de :  
 $f(x) = \delta(x - x_0)$  .
- 5) Calcule :  $\mathfrak{F}\{xe^{-a|x|}\}$  ,  $a > 0$  . R:  $-4aki / (k^2 + a^2)^2$
- 6) Dada a função  $f(x) = e^{-x}$  ,  $x > 0$  :
  - a) Calcule suas Transformadas de Fourier Seno e Co-seno.
  - b) Represente o Prolongamento Par  $f_p(x)$  e o Prolongamento Impar  $f_i(x)$  da função acima .
  - c) Faça os gráficos destes Prolongamentos.
  - d) Represente  $f(x) = e^{-x}$  ,  $x > 0$ , por sua Integral de Fourier e compare com a resposta do item b).

$$R: a) \frac{k}{k^2 + 1}; \frac{1}{k^2 + 1}. \quad b) f_p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2 + 1} dk ; f_i(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k \sin(kx)}{k^2 + 1} dk ;$$

$$d) f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2 + 1} dk + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k \sin(kx)}{k^2 + 1} dk .$$

## Análise de Fourier : 7ª aula

Propriedades das Transformadas de Fourier : continuação .

Apresentaremos, alguns exemplos de uso das propriedades da Transformada de Fourier.

Exemplo 1 . Verifique o teorema de Parseval para a função  $f(t) = e^{-a|t|}$ ,  $a > 0$ .

Para verificar o teorema de Parseval (12ª propriedade)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw$$

precisamos, inicialmente, calcular  $F(w)$ . Assim,

$$F(w) = \mathfrak{F}\{e^{-a|t|}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-iwt} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-at} \cos wt dt = \frac{2a}{w^2 + a^2}, \text{ onde}$$

se usou a TAB(1).

Calculamos, agora, separadamente, cada uma das integrais do teorema de Parseval.

Iniciaremos pela integral no tempo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|t|} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = 2 \frac{e^{-2at}}{(-2a)} = \frac{1}{a}$$

Devemos mostrar que é igual a integral na frequência,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2a)^2}{(w^2 + a^2)^2} dw = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{(2a)^2}{(w^2 + a^2)^2} dw = \frac{1}{\pi} (2a)^2 \frac{\pi}{4a^3} = \frac{1}{a}$$

Usamos a TAB(19) com  $m=0$  para calcular a integral definida.

Exemplo 2 . Verifique a propriedade de simetria (ou dualidade) para o seguinte Par-Fourier :

$$\begin{cases} f(t) = e^{-a|t|} \\ F(w) = \frac{2a}{w^2 + a^2} \end{cases}$$

A propriedade de simetria afirma :  $\mathfrak{F}\{F(t)\} = 2\pi f(-w)$

Neste nosso exemplo, a forma analítica da função original é uma exponencial decrescente par e a forma analítica da sua Transformada de Fourier é aquela curva conhecida por lorentziana. Trocar  $t \leftrightarrow w$  dentro do par, equivale a trocar as

formas analíticas entre si. Isto é, o que era a função no domínio de  $t$  virou a função no domínio de  $w$  e vice-versa,

$$\begin{cases} f(w) = e^{-a|w|} \\ F(t) = \frac{2a}{t^2 + a^2} \end{cases}$$

Precisamos calcular a Transformada de Fourier  $\mathcal{F}\{F(t)\}$  e mostrar que é igual a  $2\pi f(-w)$ .

Assim,

$$\mathcal{F}\{F(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-iwt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{t^2 + a^2} e^{-iwt} dt$$

Estudando a paridade do integrando, concluímos

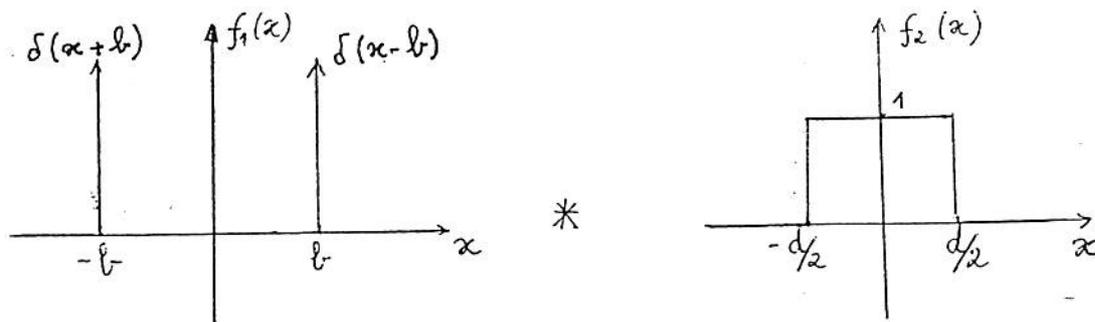
$$\mathcal{F}\{F(t)\} = 2 \int_0^{\infty} \frac{2a}{t^2 + a^2} \cos wt dt = 4a \frac{\pi}{2a} e^{-a|w|} = 2\pi e^{-a|w|} \equiv 2\pi f(-w),$$

onde se usou a TAB(3), com  $m=w \geq 0$ .

Exemplo 3 . a) Encontre o produto convolutivo de duas funções  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$ , sendo  $f_1(x) = \delta(x+b) + \delta(x-b)$  e  $f_2(x)$  a função fenda de largura  $d$  e altura unitária.

b) Use o teorema da convolução para calcular a Transformada de Fourier deste produto.

Graficamente o problema é :



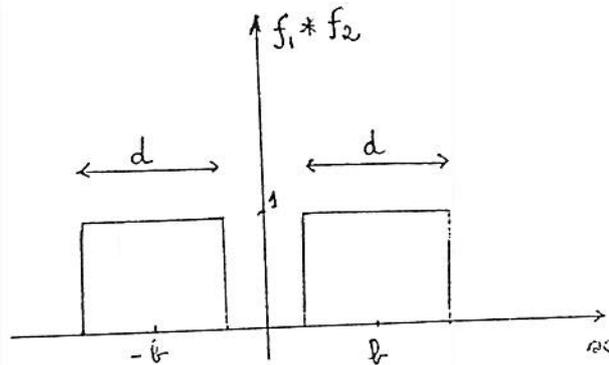
Analiticamente, temos,

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\mu+b) + \delta(\mu-b)] f_2(x-\mu) d\mu$$

Usando a propriedade de filtragem da delta de Dirac, temos

$$f_1(x) * f_2(x) = f_2(x+b) + f_2(x-b)$$

Mostramos abaixo o gráfico que representa resultado deste produto convolutivo.



b) Calculemos, agora, a Transformada de Fourier deste produto convolutivo, usando o teorema da convolução adaptado ao par de variáveis  $x$  e  $k$ , ou seja

$$\mathcal{F}\{f_1 * f_2\} = F_1(k)F_2(k) \quad \text{onde}$$

$$F_1(k) = \mathcal{F}\{f_1(x)\} = \mathcal{F}\{\delta(x+b)\} + \mathcal{F}\{\delta(x-b)\} \quad \text{e}$$

$$F_2(k) = \mathcal{F}\{f_2(x)\} = \mathcal{F}\{\text{fenda de largura } d\}$$

Estas duas Transformadas já foram calculadas na 5ª aula e valem

$$F_1(k) = e^{ikb} + e^{-ikb} = 2\cos(kb)$$

$$F_2(k) = \frac{2}{k} \text{sen}(kd/2)$$

Cujo produto é a resposta procurada, isto é,

$$\mathcal{F}\{f_1 * f_2\} = F_1(k)F_2(k) = \frac{4}{k} \text{sen}(kd/2) \cos(kb)$$

Para entender um pouco mais este resultado convém usar a relação trigonométrica

$$2\text{sen}\alpha \cos\beta = \text{sen}(\alpha+\beta) + \text{sen}(\alpha-\beta)$$

afim de escrever

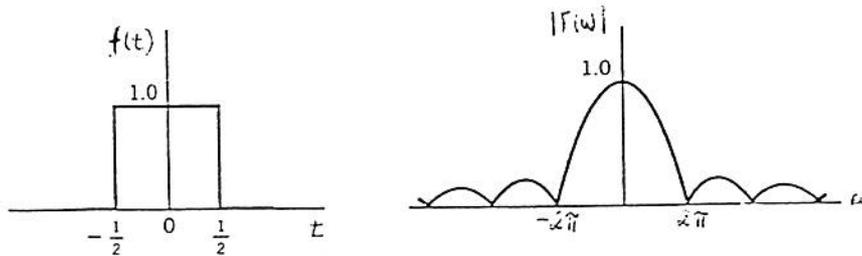
$$\mathcal{F}\{f_1 * f_2\} = 2 \frac{\text{sen}k(d/2+b)}{k} + 2 \frac{\text{sen}k(d/2-b)}{k}$$

Ou seja a transformada da convolução é a soma da transformada da fenda deslocada para a esquerda, isto é  $\mathcal{F}\{f_2(x+b)\}$ , com a transformada da fenda deslocada para a direita, isto é,

$$\mathcal{F}\{f_2(x-b)\}.$$

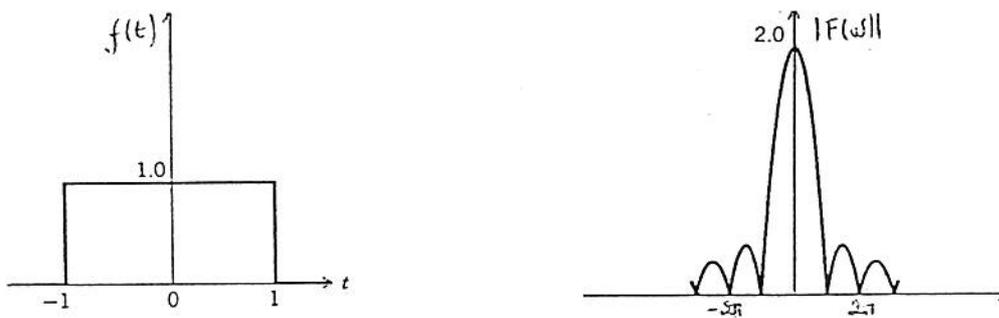
Exemplo 4. Dado o Par-Fourier formado pelo pulso retangular de altura e duração unitários e sua Transformada de Fourier  $F(w) = \frac{\text{sen}(w/2)}{(w/2)}$ , represente graficamente este par, considerando as seguintes mudanças de escala a)  $t \rightarrow t/2$  e b)  $t \rightarrow 2t$ .

Inicialmente o Par-Fourier é representado graficamente por



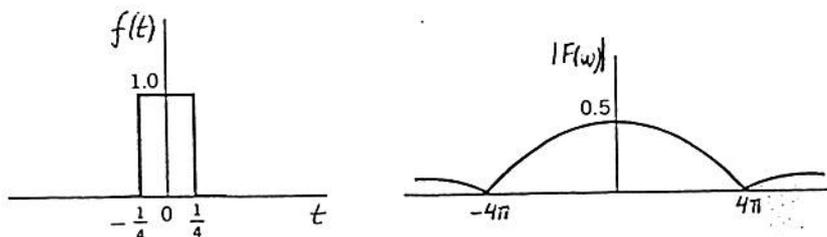
a) Mudando a escala de  $t$  para  $t/2$ , a 11ª propriedade fica

$$\mathcal{F}\{f(t/2)\} = 2F(2w) = 2 \frac{\text{sen}w}{w}, \text{ cujos gráficos ficam,}$$



b) Mudando agora  $t \rightarrow 2t$ , temos

$$\mathcal{F}\{f(2t)\} = \frac{1}{2} F(w/2) = \frac{1}{2} \frac{\text{sen}(w/4)}{(w/4)}, \text{ cujos gráficos ficam,}$$



Exemplo 5. Use a propriedade da modulação para calcular  $\mathcal{F}\{f(t)\cos(w_0 t)\}$ , onde  $f(t)$  é o pulso unitário de largura  $d$ . Pela propriedade de modulação (6ª propriedade), temos

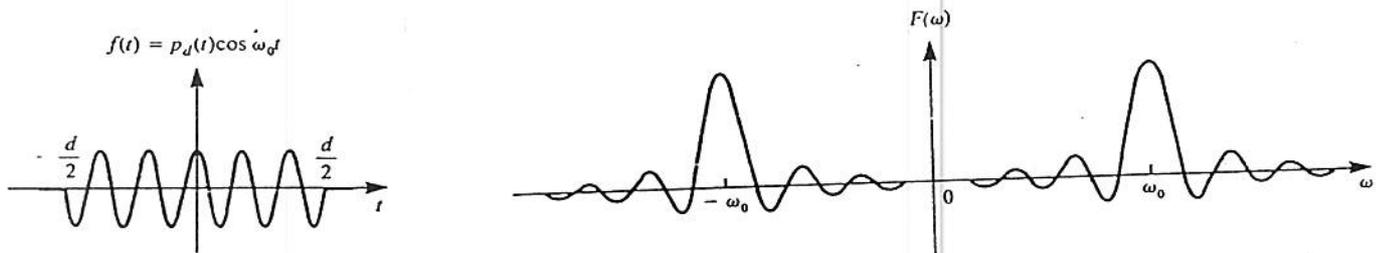
$$\mathfrak{F}\{f(t)\cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega - \omega_0)$$

onde  $F(\omega)$  é a transformada do pulso unitário de largura  $d$ , dada por

$F(\omega) = d \frac{\text{sen}(\omega d/2)}{(\omega d/2)}$ . Assim, a chamada 'transformada da função coseno de duração finita', fica

$$\mathfrak{F}\{f(t)\cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2}d \frac{\text{sen}[(\omega + \omega_0)d/2]}{[(\omega + \omega_0)d/2]} + \frac{1}{2}d \frac{\text{sen}[(\omega - \omega_0)d/2]}{[(\omega - \omega_0)d/2]}$$

Apresentamos, a seguir, os gráficos do coseno de duração finita e de sua transformada.



Exemplo 6. Use a propriedade da dualidade para escrever o Par-Fourier simétrico a

$$\begin{cases} \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \\ F(\omega) = 1 \end{cases}$$

O par simétrico é obtido fazendo a troca  $t \leftrightarrow \omega$ , isto é

$$\begin{cases} \delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt \\ F(t) = 1 \end{cases}$$

Exemplo 7. Lembrando que  $\delta(\omega) = \delta(-\omega)$ , expresse a propriedade da dualidade para este novo par.

$$\boxed{\mathfrak{F}\{1\} = 2\pi\delta(\omega)}$$

Esta última expressão está mostrando um resultado curioso: a Transformada de Fourier de uma função constante, no caso a unidade, dá origem a uma delta de Dirac.

Já vimos que toda função constante é periódica (1ª aula). Este será, pois, o ponto de partida para proceder a transição do contínuo para o discreto: qual será a Transformada de Fourier de uma função periódica?

Transição do contínuo para o discreto

Vamos começar calculando a Transformada de Fourier de uma função senoidal. Partindo da propriedade de modulação, façamos  $f(t)=1$ , e com isso estaremos calculando

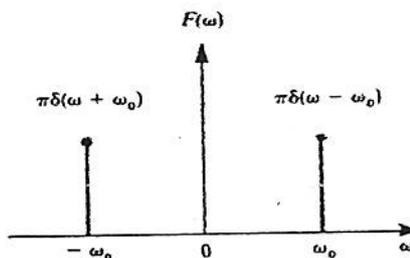
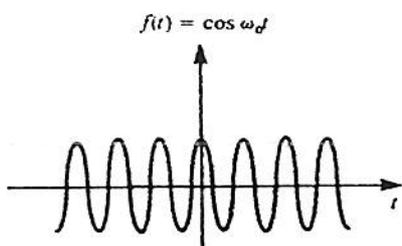
$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega - \omega_0), \quad \text{onde } F(\omega) \text{ é a}$$

transformada da unidade, isto é,  $F(\omega) = \mathcal{F}\{1\}$ .

Mas, pela dualidade  $\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(\omega)$ , logo

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Isto é, calculamos a transformada de uma função periódica e encontramos duas linhas espectrais localizadas em  $-\omega_0$  e  $\omega_0$ . Mostramos, abaixo, seus gráficos.



Vejamos, agora, como se comporta a Transformada de Fourier de uma função periódica mais geral representada por uma Série de Fourier Complexa;

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t} \right] e^{-i\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - \omega_n)t} dt \right]$$

A expressão entre colchetes, já vimos, expressa a dualidade da delta de Dirac e vale  $2\pi\delta(\omega - \omega_n)$ , ou seja

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - \omega_n)$$

$\downarrow$   $\downarrow$   
 função periódica  $\leftrightarrow$  espectro discreto

**Conclusão:** A Transformada de Fourier de uma função periódica reproduz a sucessão de linhas espectrais equidistantes, localizadas nas frequências harmônicas  $w=w_n$ , reproduzindo o resultado conhecido do estudo de representação de funções por Séries de Fourier. Esta transição como se observa é mediada pela delta de Dirac, que é a grande responsável pela coerência da teoria.

Convém lembrar como a delta foi introduzida na área II: a derivada de todas as funções que apresentam descontinuidade por salto (como a função de Heaviside), calculada no ponto de descontinuidade. Foi justamente a existência deste tipo de descontinuidade (as lacunas) nas funções representadas por Fourier, que gerou toda uma controvérsia, posteriormente resolvida por Dirichlet. A honra de Fourier, como matemático, foi resgatada e com ele uma ferramenta de múltiplas aplicações até os dias de hoje.

Exemplo 8. Encontre a Transformada de Fourier do trem de impulsos periódico, definido por

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Na lista de exercícios da 3ª aula, você deve ter calculado a Série de Fourier Complexa da função periódica de período T  $\delta_T(t)$  (também chamada de pente de impulsos) e encontramos o

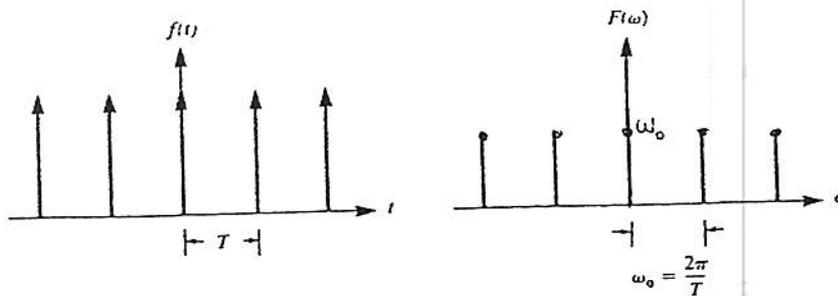
resultado 
$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i w_n t}$$

Calculando a Transformada de Fourier desta função, temos

$$\mathfrak{F}\{\delta_T(t)\} = \frac{1}{T} \mathfrak{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i w_n t}\right\}$$

Já vimos que  $\mathfrak{F}\{e^{i w_n t}\} = 2\pi \delta(w - w_n)$ , logo

$$\mathfrak{F}\{\delta_T(t)\} = \frac{1}{T} 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(w - w_n) = w_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(w - w_n)$$



Roteiro de Estudo da 7ª aula:

- 1) Refaça todos os exemplos desta aula.
- 2) Qual é a propriedade que acena com a possibilidade de se calcular a Transformada de Fourier de uma função periódica? Qual é o Par-Fourier envolvido?
- 3) Como se usa a propriedade de modulação para calcular  $\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\}$ ? Qual o resultado obtido? É um resultado coerente com a teoria?
- 4) Como se generaliza a transição do continuum para o discreto?

Lista de exercícios:

1) Verifique a propriedade de simetria para os seguintes pares-Fourier:

<p>[a] <math>f(t) = e^{-a t }</math></p> $F(\omega) = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$	<p>[b] <math>f(t) = \begin{cases} 1, &amp;  t  &lt; \frac{1}{2} \\ 0, &amp;  t  &gt; \frac{1}{2} \end{cases}</math></p> $F(\omega) = \frac{2}{\omega} \operatorname{sen} \frac{a}{2}$	<p>[c] <math>f(t) = N e^{-a^2 t^2}</math></p> $F(\omega) = N \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$
--	---	---

2) Sendo  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ , ache a Transformada de Fourier de  $f(t) \operatorname{sen} \omega_0 t$ .

$$R: \frac{1}{2i} [F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)]$$

3) Mostre que  $\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t}\} = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$ .

Use este resultado para calcular  $\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\}$  e  $\mathcal{F}\{\operatorname{sen} \omega_0 t\}$ .

4) Verifique o Teorema de Parseval para os quatro exemplos de aula.

**Análise de Fourier: 8ª aula**O Método da Transformada de Fourier para solução de equações diferenciais.

Vamos aplicar a Transformada de Fourier como um método para resolver equações diferenciais, usando um procedimento análogo ao desenvolvido na Área II. A diferença aqui é que estaremos lidando com *sistemas físicos infinitos*. Entenda-se por *sistemas infinitos* aqueles onde uma das dimensões do sistema é muito maior que as demais. Por exemplo, uma barra, um cano, uma corda ou uma viga serão considerados *infinitos* se uma das suas dimensões, por exemplo, seu comprimento, for muito maior que o diâmetro de sua seção transversal.

O problema de valor inicial de um sistema físico com esta característica poderá ser resolvido pelo método da Transformada de Fourier, sendo que a transformação se dará na variável de dimensão *infinita*, que nos casos que estudaremos será o comprimento.

Assim, ao mesmo tempo, que este é um problema ideal, é também um problema clássico, cujo resultado balizará o estudo de situações físicas mais realísticas.

Apresentaremos o método através de quatro exemplos:

- 1º) A corda infinita: a equação da onda unidimensional.
- 2º) Difusão de uma massa em um meio líquido: equação da difusão.
- 3º) Deflexões em uma viga: equação da viga.
- 4º) A condução do calor em uma barra: equação do calor.

Cada um destes problemas terá suas próprias características. Com isto estamos querendo dizer que, que após transformarmos o problema do domínio  $x$  para o domínio recíproco  $k$ , cada um terá seu próprio encaminhamento. Diferentemente do método da Transformada de Laplace não usaremos uma tabela para calcular a Transformada de Fourier, nem tampouco para calcular a sua Inversa. Usaremos, para nos auxiliar, a tabela de integrais definidas e algumas propriedades, como veremos, a seguir.

Exemplo 1. Determinar o deslocamento  $y(x,t)$  de uma corda infinita ( $-\infty < x < \infty$ ), com velocidade inicial zero, sendo seu deslocamento inicial uma função genérica de  $x$ , dada por  $y(x,0)=f(x)$ .

Solução: Seja  $c^2$  a constante característica da corda, isto é, a razão entre a tensão e sua densidade linear. Formulamos matematicamente o problema, ( a equação da onda e suas condições iniciais) e aplicamos a transformação, isto é

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \\ y(x,0) = f(x) \\ \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\mathfrak{F}_x} \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{F}_x \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right\} = \frac{1}{c^2} \mathfrak{F}_x \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right\} \\ \mathfrak{F}_x \{ y(x,0) \} = F(k) \\ \mathfrak{F}_x \left\{ \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} \right\} = 0 \end{array} \right.$$

Observe que estamos aplicando a transformação na variável  $x$ , deixando o tempo  $t$  como uma variável independente. Esta operação está sendo indicada por  $\mathfrak{F}_x$ .

Usaremos a notação  $\mathfrak{F}_x \{ y(x,t) \} = Y(k,t)$

Da mesma forma, a transformada  $\mathfrak{F}_x \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right\}$  fica

$$\mathfrak{F}_x \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} e^{-ikx} dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} y(x,t) e^{-ikx} dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2} Y(k,t)$$

Usamos agora a 2ª propriedade, para expressar a transformada da derivada,

$$\mathfrak{F}_x \left\{ \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right\} = (ik)^2 Y(k,t) = -k^2 Y(k,t)$$

A equação da onda no domínio  $k$  fica, então

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} Y(k,t) + c^2 k^2 Y(k,t) = 0$$

Estamos diante de uma equação diferencial em  $t$ , cuja solução é obtida pelo método das raízes

características, visto na disciplina de Equações Diferenciais. Isto é,

$$Y(k,t) = C_1(k)e^{ickt} + C_2(k)e^{-ickt}, \text{ onde as constantes}$$

arbitrárias são, neste caso, funções do parâmetro  $k$ . Para determiná-las, usaremos as condições iniciais no domínio  $k$ , isto é

$$Y(k,0) = F(k) \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial Y(k,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

Consequentemente,

$$C_1(k) + C_2(k) = F(k)$$

$$(ick)C_1(k) - (ick)C_2(k) = 0 \quad \therefore \quad C_1(k) = C_2(k) = \frac{1}{2}F(k)$$

Logo,

$$Y(k,t) = \frac{1}{2}F(k)e^{ickt} + \frac{1}{2}F(k)e^{-ickt}$$

A solução procurada  $y(x,t)$  é obtida calculando a Inversa,  $\mathfrak{F}^{-1}\{Y(k,t)\}$ , isto é,

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\mathfrak{F}^{-1}\{F(k)e^{ickt}\} + \frac{1}{2}\mathfrak{F}^{-1}\{F(k)e^{-ickt}\}$$

Usaremos, agora, para cada um dos termos, a 4ª propriedade (deslocamento no eixo  $x$ ), adaptada para os domínios  $x, k$ :

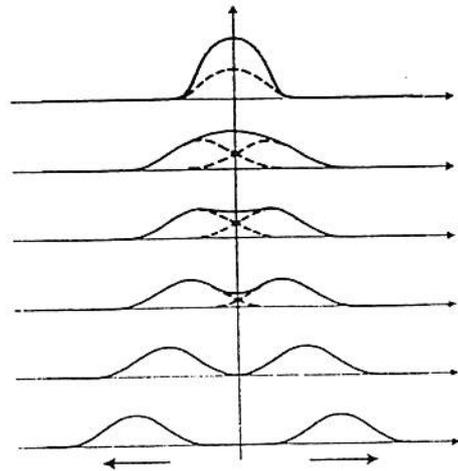
$$\mathfrak{F}^{-1}\{e^{-iak} F(k)\} = f(x-a)$$

No nosso caso,  $a = -ct$  para o 1º termo e  $a = ct$  para o 2º termo.

A solução fica, finalmente

$$y(x,t) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2}f(x-ct)$$

Assim, a evolução no tempo de um certo deslocamento inicial da corda se dará na forma de uma superposição de duas ondas viajando em sentidos opostos com uma velocidade  $c$ . Esta forma de expressar a solução é conhecida como fórmula D'Alembert e está representada graficamente abaixo.



Exemplo 2. Um cano muito longo e de pequeno diâmetro está cheio de água. No instante  $t=0$ , uma certa quantidade  $M$  de sal é introduzida no cano em um ponto  $x=x_0$  (distante de ambos os extremos do cano). Ache a concentração  $\rho(x,t)$  de sal em um instante posterior  $t$ .

Vamos considerar um cano infinito, isto é, um cano muito longo e de diâmetro suficientemente pequeno afim de que possamos considerar desprezíveis as variações de concentração de sal sobre a seção reta do cano. Então, a concentração  $\rho(x,t)$  de sal será tratada como uma função apenas do comprimento do cano,  $x$ , e do tempo  $t$ . A equação que rege a difusão em uma dimensão é

$$D \frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}, \quad \text{onde } D \text{ é a}$$

constante de difusão, característica do meio solvente e do soluto.

As condições iniciais contidas no enunciado do problema são:  $\rho(x,0)$  é nula em todos os pontos do cano, exceto sobre a seção reta definida em  $x=x_0$  onde é introduzida uma certa concentração de sal.

Vamos agora formular matematicamente estas condições, fazendo uso da delta de Dirac,

$$\rho(x,0) = \frac{M}{A} \delta(x-x_0)$$

onde  $A$  é a área seção transversal.

As condições no limite  $x \rightarrow \pm\infty$  podem ser formuladas por

meio da afirmativa

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \rho(x, t) = \rho(\pm\infty, t) = 0, \quad \text{para todo } t,$$

que reflete a lei de conservação da massa  $M$ .

Aplicando a Transformada de Fourier a este problema, temos

$$\begin{cases} D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \rho(x, 0) = \frac{M}{A} \delta(x - x_0) \end{cases} \xrightarrow{\mathfrak{F}_x} \begin{cases} D \mathfrak{F}_x \left\{ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right\} = \mathfrak{F}_x \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\} \\ \mathfrak{F}_x \{ \rho(x, 0) \} = \frac{M}{A} \mathfrak{F}_x \{ \delta(x - x_0) \} \end{cases}$$

$$\text{Substituindo } \mathfrak{F}\{\delta(x - x_0)\} = e^{-ikx_0}, \quad \mathfrak{F}_x \left\{ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right\} = -k^2 R(k, t),$$

$$\text{onde } R(k, t) \equiv \mathfrak{F}_x \{ \rho(x, t) \}, \quad \text{e } \mathfrak{F}_x \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{F}_x \{ \rho(x, t) \} = \frac{\partial}{\partial t} R(k, t).$$

Esta última igualdade é válida porque estamos considerando que as variáveis  $x$  e  $t$  são independentes.

Nosso problema no domínio  $k$  fica, então

$$\frac{\partial}{\partial t} R(k, t) = -D k^2 R(k, t)$$

$$R(k, 0) = \frac{M}{A} e^{-ikx_0}$$

Usamos a integração logarítmica para resolver este problema, isto é,

$$\int_0^t \frac{dR(k, t)}{R(k, t)} = -Dk^2 \int_0^t dt \quad \text{ou} \quad \ln \frac{R(k, t)}{R(k, 0)} = -Dk^2 t, \quad \text{donde}$$

$$R(k, t) = R(k, 0) e^{-Dk^2 t} = \frac{M}{A} e^{-ikx_0} e^{-Dk^2 t}$$

Precisamos, agora, encontrar a solução  $\rho(x, t)$ . Pelo método da transformada esta é a etapa da inversão, isto é,

$$\rho(x, t) = \mathfrak{F}^{-1} \{ R(k, t) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(k, t) e^{ikx} dk$$

Substituindo, nesta integral, a função  $R(k, t)$ , que é uma gaussiana em  $k$ , temos

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{M}{A} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx_0} e^{-D t k^2} e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \frac{M}{A} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-D t k^2} e^{ik(x-x_0)} dk$$

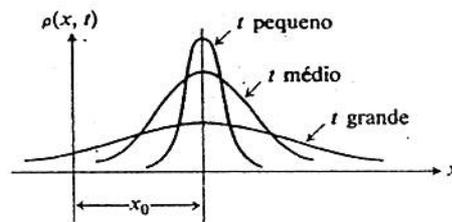
Analisando a paridade do integrando com relação à variável  $k$ , concluímos

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{M}{A} 2 \int_0^{\infty} e^{-D t k^2} \cos k(x-x_0) dk = \frac{M}{\pi A} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{Dt}} e^{-(x-x_0)^2/4Dt}$$

onde se usou a TAB(8) com  $a = \sqrt{Dt}$  e  $m = (x-x_0)$ .

Assim, 
$$\rho(x, t) = \frac{M}{A} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{4Dt}} e^{-(x-x_0)^2/4Dt}$$

Era de esperar que tivéssemos como solução uma gaussiana em  $x$ , pois já foi demonstrado que a transformada de uma gaussiana é uma curva gaussiana. Veja gráfico abaixo.



Teste a solução no limite  $x \rightarrow \pm\infty$  e veja se reproduz o esperado fisicamente, que é a conservação de massa.

Outro teste interessante que poderemos fazer é verificar se no limite  $t \rightarrow 0$  a solução nos remete à delta de Dirac, isto é

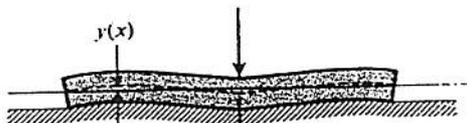
$$\lim_{t \rightarrow 0} \rho(x, t) = \frac{M}{A} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-(x-x_0)^2/4Dt}}{\sqrt{4Dt}}$$

Neste momento, convém lembrar que existem outras representações para a delta de Dirac além de sua integral de Fourier. Se você consultar o final da 5ª aula, certamente identificará

$$\delta(x-x_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-(x-x_0)^2/4Dt}}{\sqrt{4Dt}} \quad \text{e portanto}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \rho(x, t) = \frac{M}{A} \delta(x-x_0) \quad \text{c.q.d.}$$

Exemplo 3 . Considere uma viga muito longa repousando sobre um suporte elástico, o que significa que o suporte é capaz de exercer uma força de reação por unidade de comprimento proporcional ao deslocamento  $y(x)$ . Suponha que esta viga é carregada por uma força concentrada em  $x=0$ , isto é a carga  $q(x) = P \delta(x)$ .



A equação da viga é  $EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x) - C y(x)$ , onde  $C$  é uma constante,  $E$  é o módulo de Young e  $I$  o momento de inércia da viga.

Transformando a equação acima, temos

$$EI \mathfrak{F} \left\{ \frac{d^4 y}{dx^4} \right\} = \mathfrak{F} \{ q(x) \} - C \mathfrak{F} \{ y(x) \}$$

Aplicando a 2ª propriedade para a transformada da derivada de 4ª ordem e usando a notação  $\mathfrak{F} \{ y(x) \} = Y(k)$  e ainda lembrando que  $\mathfrak{F} \{ \delta(x) \} = 1$ , temos

$$(EI) (ik)^4 Y(k) = P - CY(k) \quad \text{ou}$$

$$(k^4 + \frac{C}{EI}) Y(k) = \frac{P}{EI} \quad \text{ou} \quad Y(k) = \frac{P}{EI} \frac{1}{k^4 + C/EI}$$

Esta é uma equação subsidiária algébrica, e a solução é a Inversa

$$\mathfrak{F}^{-1} \{ Y(k) \} = y(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{P}{EI} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^4 + C/EI} e^{ikx} dk$$

Analisando a paridade do integrando e usando a nossa tabela de integrais definidas, identificamos a TAB(12), com  $4a^4 = \frac{C}{EI}$  e  $m=x$ . Ou seja,

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{P}{EI} 2 \left[ \frac{\pi}{8a^3} e^{-ax} (\text{sen} ax + \text{cos} ax) \right], \quad x > 0 \quad \text{ou ainda}$$

$$y(x) = \frac{P}{EI} \frac{1}{8a^3} \sqrt{2} e^{-ax} \text{sen}(ax + \pi/4), \quad x > 0 \quad \text{e} \quad a = (C/4EI)^{1/4}$$

Solução característica de movimento oscilatório amortecido.

## Análise de Fourier: 9ª aula

Método da Transformada de Fourier para solução de equações diferenciais — conclusão.

Exemplo 4. Condução de calor em uma barra infinita.

Ache a distribuição de temperatura  $u(x,t)$  em uma barra infinita sujeita a uma distribuição inicial de temperatura  $u(x,0)=f(x)$ .

Solução : A equação do calor e a condição inicial nos levam ao seguinte problema,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

A constante  $\frac{1}{c^2} = \frac{\sigma\rho}{\kappa}$ , onde  $\sigma$  é o calor específico,  $\rho$  é a densidade e  $\kappa$  a condutividade térmica da barra.

Aplicando a Transformada de Fourier na variável  $x$ , o problema passa para o domínio  $k$ ,

$$\begin{cases} \mathfrak{F}_x \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) \right\} = \frac{1}{c^2} \mathfrak{F}_x \left\{ \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) \right\} \\ \mathfrak{F}_x \{ u(x,0) \} = F(k) \end{cases}$$

Usando a 2ª propriedade e a notação  $\mathfrak{F}_x \{ u(x,t) \} = U(k,t)$  e lembrando que as variáveis  $x$  e  $t$  são independentes, o problema no domínio  $k$  se reduz a

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} U(k,t) = -c^2 k^2 U(k,t) \\ U(k,0) = F(k) \end{cases}$$

Usando a integração logarítmica, temos

$$\int_0^t \frac{dU}{U} = -c^2 k^2 \int_0^t dt \quad \therefore \quad \ln \frac{U(k,t)}{U(k,0)} = -c^2 k^2 t \quad \text{ou} \quad U(k,t) = U(k,0) e^{-c^2 k^2 t}$$

Substituindo a condição inicial  $U(k,0) = F(k)$  e fazendo a transformação inversa, chegamos a

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1} \{U(k,t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(k,t) e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-c^2 k^2 t} e^{ikx} dk$$

Lembrando que  $F(k)$  é a Transformada da distribuição inicial  $f(x)$ , isto é  $F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$ , então

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu) e^{-ik\mu} d\mu \right] e^{-c^2 k^2 t} e^{ikx} dk, \quad \text{onde a}$$

variável interna (muda)  $x$  foi substituída por  $\mu$  afim de evitar confundi-la com a variável externa  $x$ , que é o comprimento da barra.

Novamente, estamos diante de um integração dupla. Vamos reverter a ordem de integração, realizando inicialmente a integral em  $k$ , deixando por último a integral em  $\mu$ , a qual só poderá ser realizada se a distribuição inicial de temperatura  $f(x)$  for um função conhecida. Assim,

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu f(\mu) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2 t k^2} e^{i k(x-\mu)} dk \right]$$

Indicaremos por  $I$  a integral entre colchetes, isto é

$$I = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2 t k^2} e^{i k(x-\mu)} dk \right]$$

Analisando a paridade do integrando com relação a  $k$  e usando a conveniente propriedade de simetria, temos

$$I = 2 \int_0^{\infty} e^{-c^2 t k^2} \cos k(x-\mu) dk = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{t}} e^{-(x-\mu)^2 / 4c^2 t}$$

Nesta última integral, usou-se a TAB(8) com  $x=k$ ,  $a^2=c^2t$  e  $m=x-\mu$ .

Finalmente, a solução geral que dá a distribuição de temperatura para qualquer distribuição inicial  $f(x)$ :

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-x}^{\infty} f(\mu) e^{-(x-\mu)^2/4c^2t} d\mu$$

Vamos estudar um caso particular. Suponha que a distribuição inicial de temperatura  $f(x)$  seja dada por

$$f(x) = \begin{cases} T_0, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

Substituindo na solução  $u(x,t)$  temos,

$$u(x,t) = \frac{T_0}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^1 e^{-(x-\mu)^2/4c^2t} d\mu$$

Esta integral, após uma conveniente substituição de variável nos leva a uma integral conhecida que é chamada de função erro ou função probabilidade.

Façamos, então a substituição  $\frac{(\mu-x)}{2c\sqrt{t}} = z \quad \therefore d\mu = 2c\sqrt{t} dz$ .

Assim, quando  $\mu = -1$ ,  $z = \frac{-1-x}{2c\sqrt{t}} \equiv z_1$  e quando  $\mu = 1$ ,

$$z = \frac{1-x}{2c\sqrt{t}} \equiv z_2.$$

Conseqüentemente,  $u(x,t) = \frac{T_0}{2c\sqrt{\pi t}} 2c\sqrt{t} \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2} dz$

A integral  $\int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2} dz$  não é uma função elementar, isto é, não dá um fórmula. Esta integral é expressa em termos de uma série chamada função erro e indicada por  $\text{erf}(x)$ . Sua definição é

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$$

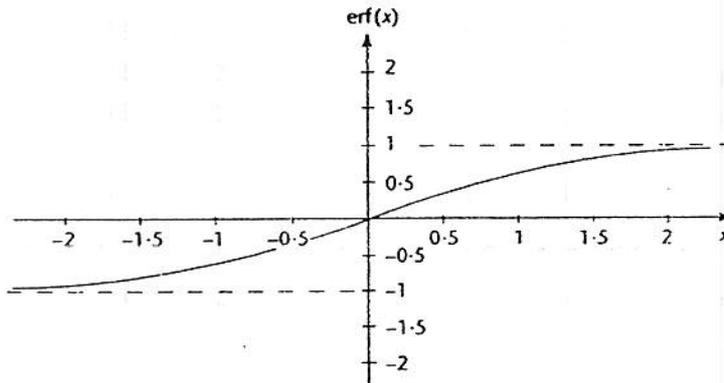
ou seja a função erro é a integral da curva gaussiana. O cálculo da função erro começa , substituindo a gaussiana por sua série de potências ,

$$e^{-z^2} = 1 - z^2 + \frac{z^4}{2!} - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^8}{4!} + \dots$$

e a seguir integra-se termo a termo a série, isto é

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \left[ 1 - z^2 + \frac{z^4}{2!} - \frac{z^6}{3!} + \dots \right] dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots \right]$$

E o resultado da integração é uma nova série de potências e como tal seu valor é calculado numericamente. Como a série é de potências ímpares, a função erro é ímpar e seu gráfico é mostrado abaixo.



Vamos analisar alguns limites interessantes.

O primeiro é o limite para  $x \rightarrow \infty$ . Neste caso a função erro coincide com a norma da gaussiana e corresponde à TAB(7). Vejamos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

Outro limite interessante é quando  $x=0$ . Neste caso tanto a integral como a série se anulam. Portanto,  $\operatorname{erf}(x)=0$ . Para os demais valores , a função terá que ser calculada numericamente. Há tabelas de função erro para vários valores da variável  $x$ .

Para ilustrar, tomemos  $x=1$  e  $x=4$ . Encontraremos  $\text{erf}(1) \approx 0.842$  e  $\text{erf}(4) = 1.0$ .

Para se chegar a estes valores é necessário considerar cerca de 90 termos na série que representa a função.

Depois deste parênteses para apresentar a função erro ou probabilidade, voltemos ao problema da condução do calor na barra infinita.

Nosso ponto final foi a solução para a distribuição de temperatura  $u(x,t)$ , dada por

$$u(x,t) = \frac{T_0}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2} dz$$

Pois bem, agora, conhecendo a função erro, podemos afirmar que

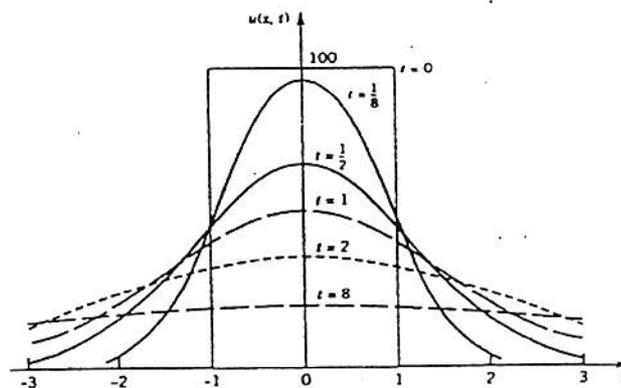
$$\int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2} dz = \int_{z_1}^0 e^{-z^2} dz + \int_0^{z_2} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [\text{erf}(z_2) - \text{erf}(z_1)].$$

Consequentemente, chegamos ao resultado final

$$u(x,t) = \frac{T_0}{2} [\text{erf}(z_2) - \text{erf}(z_1)]$$

Mostramos no gráfico abaixo, para  $T_0 = 100^\circ\text{C}$  e  $c^2 = 1\text{cm}^2/\text{s}$ , a distribuição de temperatura  $u(x,t)$  para

$t=0, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 1, 2$  e  $8\text{s}$ .



## Roteiro de Estudo da 8ª e 9ª aula:

O Método da Transformada de Fourier na solução de Problemas de Valor Inicial (sistemas infinitos).

- 1) A Equação da Onda Unidimensional : Dá-se um deslocamento inicial  $y(x,0) = f(x)$  a uma corda infinita, liberando-a em seguida. (a) Determine o deslocamento  $y(x,t)$  em um instante posterior .(b) Escreva a solução d'Alembert supondo que  $f(x) = \cos(k_0x)$ .
- 2) A Equação da Difusão Unidimensional: Estude a difusão de uma quantidade de sal num cano muito longo cheio de água. Parta do seguinte enunciado matemático:

$$\begin{cases} D \frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} \\ \rho(x,0) = \frac{M}{A} \delta(x-x_0) \end{cases}$$

- a) Explique o significado da condição inicial.
- b) Aplique o método da Transformada de Fourier e chegue à equação subsidiária:

$$\frac{\partial}{\partial t} R(k,t) + Dk^2 R(k,t) = 0, \text{ onde } R(k,t) = \mathcal{F}_x \{ \rho(x,t) \}.$$

- c) Ache a solução desta equação sujeita à condição inicial  $R(k,0) = \mathcal{F}_x \{ \rho(x,0) \}$ .
- d) Calcule a Transformada Inversa de  $R(k,t)$ , isto é, encontre a solução  $\rho(x,t)$ .

- 3) Reproduza a solução do problema da viga muito longa repousando em um suporte elástico e sujeita a uma carga impulsiva. Compare a solução, isto é, as deflexões da viga, com as oscilações do oscilador harmônico amortecido estudado na área II.
- 4) A função erro,  $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$ , é muito importante na Física e nas várias áreas da Engenharia.

Para se familiarizar com esta função não elementar, expanda o integrando em série de Taylor e após faça a integração termo a termo. Mostre que função  $erf(x)$  é ímpar. Mostre também que  $erf(0) = 0$  e que

$$\int_a^b e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [erf(b) - erf(a)].$$

- 4) Encontre a distribuição de temperatura  $u(x,t)$  numa barra metálica infinita sujeita a uma distribuição

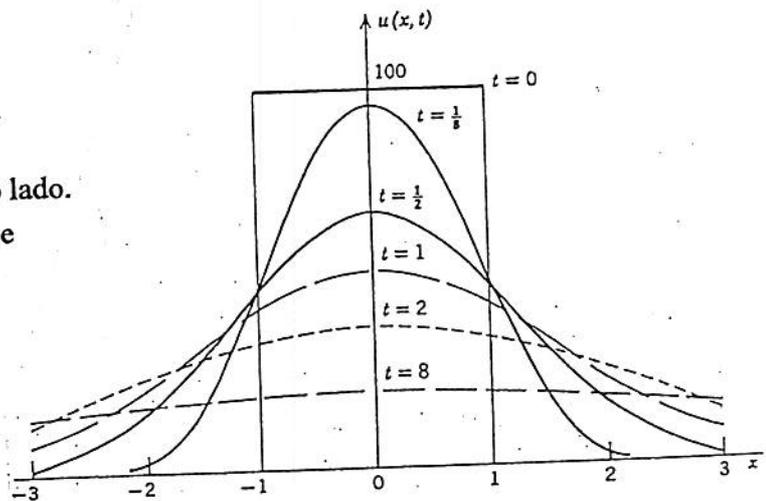
$$\text{inicial : } u(x,0) = \begin{cases} T_0 & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases}$$

- a) Expresse sua resposta em termos da função erro.
- c) Vimos que a distribuição de temperatura para  $T_0 = 100^\circ C$  e  $c^2 = 1 \text{ cm}^2 / s$  é dada pelo gráfico ao lado. Faça o gráfico da temperatura para  $x = 0.5, x = 1.0$  e  $x = 1.5$  como função de  $t$ .

O resultado é o esperado fisicamente?

- d) Se  $u(x,t) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ , mostre que

$$u(x,t) = \int_{\frac{-x}{2c\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2} dz.$$



- d) Mostre que para  $x = 0$  a solução acima é independente de  $t$ . É um resultado com base física?