MATEMÁTICA APLICADA II ~ ÁREA I ~ 3ª Lista de Exercícios

Campos Vetoriais, Gradiente, Divergente, Rotacional e Laplaciano

1) Faça um esboço dos campos vetoriais $\vec{F}$. Procure representar os vetores com as respectivas proporções: a) $\vec{F}(x,y)=2\,\vec{i}-\vec{j}$; b) $\vec{F}(x,y)=y\,\vec{i}-x\,\vec{j}$;

c) $\vec{F}(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\,\vec{i}+y\,\vec{j}\right)$ (Observe que cada vetor neste campo é um vetor unitário na direção de $\vec{r}$).

2) Calcule o $div\vec{F}$ e o $rot\vec{F}$ de:

a) $\vec{F}=x^2\,\vec{i}-2\,\vec{j}+yz\,\vec{k}$	b) $\vec{F}=e^{xy}\,\vec{i}-\cos y\,\vec{j}+\text{sen}^2 z\,\vec{k}$
R: a) $\vec{\nabla}\bullet\vec{F}=2x+y, \vec{\nabla}\times\vec{F}=z\,\vec{i}$	R: b) $\vec{\nabla}\bullet\vec{F}=y\,e^{xy}+\text{sen}\,y+\text{sen}\,2z,\quad \vec{\nabla}\times\vec{F}=-x\,e^{xy}$

3) Mostre que se $\vec{u}=a\,\vec{i}+b\,\vec{j}+c\,\vec{k}$, onde a, b e c são constantes, e $\vec{r}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$, então:
a) $div\left(\vec{u}\times\vec{r}\right)=0$; b) $rot\left(\vec{u}\times\vec{r}\right)=2\,\vec{u}$

4) Dado $f=2xz^4-x^2y$, calcule $\vec{\nabla}f$ e $\left|\vec{\nabla}f\right|$ no ponto $P(2,-2,1)$.
R: $\vec{\nabla}f=10\vec{i}-4\vec{j}+16\vec{k}$, $\left|\vec{\nabla}f\right|=2\sqrt{93}$.

5) Dado $\vec{F}=2x^2\,\vec{i}-3yz\,\vec{j}+xz^2\,\vec{k}$ e $f=2z-x^3y$, calcule $\vec{F}\bullet\vec{\nabla}f$ e $\vec{F}\times\vec{\nabla}f$ no ponto $P(1,-1,1)$.
R: $\vec{F}\bullet\vec{\nabla}f=5$, $\vec{F}\times\vec{\nabla}f=7\,\vec{i}-\vec{j}-11\,\vec{k}$

6) *Escreva para aprender* : Qual o significado que pode ser dado a $(\vec{F}\times\vec{\nabla})f$ e $(\vec{F}\bullet\vec{\nabla})\vec{G}$, sendo $\vec{F}$ e $\vec{G}$ campos vetoriais e f um campo escalar ?

7) Mostre que: $\left(\vec{F}\bullet\vec{\nabla}\right)\vec{r}=\vec{F}$, onde $\vec{F}=f(x,y,z)\,\vec{i}+g(x,y,z)\,\vec{j}+h(x,y,z)\,\vec{k}$.

8) Mostre que $\vec{\nabla}\bullet\vec{r}=3$, $\vec{\nabla}\times\vec{r}=\vec{0}$, e $\vec{\nabla}r=\dfrac{1}{r}\,\vec{r}=\hat{r}$, sendo $\vec{r}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

9) Dada a função escalar $f(r)$ onde $r=|\,\vec{r}\,|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, use a regra da cadeia para mostrar que $\vec{\nabla}f(r)=\dfrac{f'(r)}{r}\,\vec{r}=f'(r)\,\hat{r}$.

Aplique esta fórmula para mostrar que: $\vec{\nabla}r^n=n\,r^{n-2}\,\vec{r}$.

10) Use os resultados do exercício (9) para calcular $\vec{\nabla} f(r)$ para:

a) $f(r)=r^3$	b) $f(r)=\ln r$	c) $f(r)=r^2 e^{-r}$
R: a) $3 r \vec{r}$	R: b) $\dfrac{\vec{r}}{r^2}$	R: c) $(2-r)\, e^{-r} \vec{r}$

11) Use, nesta ordem, 1° a definição de laplaciano de uma função escalar , 2° o resultado do exercício 9 e 3° a tabela de fórmulas do operador $\vec{\nabla}$ para mostrar que:

$$\vec{\nabla}^2 f(r) = 2\frac{f'(r)}{r} + f''(r)$$

Utilize este resultado para mostrar :

a) $\vec{\nabla}^2 \ln r = \dfrac{1}{r^2}$	b) $\vec{\nabla}^2 r^n = n(n+1)\, r^{n-2}$
c) $\vec{\nabla}^2 \ln r^2 = \dfrac{2}{r^2}$	d) $\vec{\nabla}^2 \dfrac{1}{r} = 0$

12) Prove que:

$$\vec{\nabla}^2 (f\, g) = f\, \vec{\nabla}^2 g + 2\, \vec{\nabla} f \bullet \vec{\nabla} g + g\, \vec{\nabla}^2 f$$

13) *Escrever para aprender* : Como você faz a leitura das expressões abaixo ?

a) $\vec{F} \bullet \vec{\nabla} f$ b) $\vec{F} \bullet \vec{\nabla} \times \vec{G}$ c) $\vec{\nabla} \bullet (\vec{F} \times \vec{G})$ d) $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f$

e) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$ f) $(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \bullet \vec{G}$ g) $\vec{\nabla} \bullet (\vec{\nabla} \times \vec{F})$ h) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f)$

14) Use a Tabela do operador del para mostrar que :

a) $(\vec{F} \bullet \vec{\nabla})\vec{F} = \dfrac{1}{2}\nabla(\vec{F} \bullet \vec{F}) - \vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$

b) $\vec{\nabla} \bullet (\vec{F} \times \vec{r}) = \vec{r} \bullet (\vec{\nabla} \times \vec{F})$

15) *Escreva para aprender* : Como você lê a fórmula (10) da Tabela do operador del ?