6ª Lista de Exercícios: Integração Vetorial
Integrais de Superfície, Fluxo de um Campo Vetorial através de uma Superfície. Teorema da Divergência de Gauss

[1] Calcule of fluxo Φ do campo vetorial $\vec{F}$ através da superfície S orientada para for a, nos seguintes casos (Sugestão: faça o gráfico da superfície para ajudá-lo na escolha do vertor normal à S):

[a] $\vec{F} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + 2z\,\vec{k}$ S: $z = 1 - x^2 - y^2$ acima do plano xy R: 2π	[b] $\vec{F} = (x+y)\,\vec{i} + (y+z)\,\vec{j} + (x+z)\,\vec{k}$ S é a porção do plano $x+y+z=1$ no primeiro octante R: 1
[c] $\vec{F} = z^2\,\vec{k}$ S é o hemisfério superior dado por $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ R: $\dfrac{\pi}{2}$	[d] $\vec{F} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + 2z\,\vec{k}$ S é a porção do cone $z^2 = x^2 + y^2$ entre os planos $z=1$ e $z=2$ R: $-\dfrac{14\pi}{3}$

[2] Seja S a superfície do cubo limitado pelos planos $x=\pm 1$, $y=\pm 1$, $z=\pm 1$ orientada para for a. Determine o fluxo Φ para:

[a] $\vec{F} = x\,\vec{i}$ R: 8	[b] $\vec{F} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ R: 24	[c] $\vec{F} = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$ R: 0

[3] Seja $\vec{F} = r^k\,\vec{r}$, onde k é uma constante. Seja S uma esfera de raio a centrada na origem e orientada para for a por $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}}{r} = \dfrac{\vec{r}}{a}$. [a] Calcule $\oiint_S \vec{F} \bullet \vec{n}\, dS$ sem executar qualquer integração. R: $4\pi a^{k+3}$

[b] Para que valor de k a integral no item [a] fica independente do raio da esfera? Qual lei da Física é representada pelo campo $\vec{F}$?

[4] Use o Teorema da Divergência para provar que se $\vec{F} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ e V é o volume do sólido de área superficial S, então o fluxo de $\vec{F}$ através de S é dado por: $\Phi = \oiint_S \vec{F} \bullet \vec{n}\, dS = 3V$

[5] Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo Φ nos seguintes casos:

[a] $\vec{F} = 4x\,\vec{i} - 3y\,\vec{j} + 7z\,\vec{k}$; S é a superfície do cubo limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x=1$, $y=1$, $z=1$. R: 8
[b] $\vec{F} = 2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} + 2z\,\vec{k}$; S é a esfera $x^2+y^2+z^2=9$. R: 216π
[c] $\vec{F} = (x-z)\,\vec{i} + (y-x)\,\vec{j} + (z-y)\,\vec{k}$; S é a superfície do sólido limitado por $x^2+y^2=a^2$, $z=0$ e $z=1$. R: $3\pi a^2$
[d] $\vec{F} = x^3\,\vec{i} + y^3\,\vec{j} + z^3\,\vec{k}$; S é a superfície do sólido limitado por $x^2+y^2=4$, $z=0$ e $z=3$. R: 180π
[e] $\vec{F} = (x^2+y)\,\vec{i} + xy\,\vec{j} - (2xz+y)\,\vec{k}$; S é a superfície do tetraedo no 1° octante, limitado por $x+y+z=1$ e pelos planos coordenados. R: $\dfrac{1}{24}$
[f] $\vec{F} = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$; S é a superfície do sólido limitado por $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e $z=1$. R: $\dfrac{\pi}{2}$