Lista 2*

MAT01168 – Matemática Aplicada II – 2015/1

Exercício 1. Use a transformada da derivada para demonstrar que $\mathcal{L}\{t\cos(\omega t)\}$. A partir desta, prove que

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(\omega t) - \omega t\cos(\omega t)\} = \frac{2\omega^3}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

Exercício 2. Use o método da transformada de Laplace para resolver os seguintes problemas de valor inicial:

(a) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^{-t}, \\ y(0) = -1, y'(0) = 1. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' + 2y = 2\cos(t), \\ y(0) = 3, y'(0) = 4. \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y'' + 7y' + 12y = 21e^{3t}, \\ y(0) = 3,5 \text{ e } y'(0) = -10. \end{cases}$

Exercício 3. Utilize o Teorema de Deslocamento no Eixo s para encontrar a transformada de Laplace de:

(a) t^2e^{3t}

(b) $e^{-2t}\operatorname{sen} 4t$

(c) $e^{4t}\cosh(5t)$

(d) $e^{-2t}\big(3\cos(6t) - 5\operatorname{sen}(6t)\big)$

Exercício 4. Encontre a transformada inversa das funções $F(s)$ abaixo:

(a) $\dfrac{n\pi}{(s+2)^2 + n^2\pi^2}$

(b) $\dfrac{s}{(s+3)^2+1}$

(c) $\dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}$

(d) $\dfrac{4s+12}{s^2+8s+16}$

Exercício 5. Justifique que:

(a) $\mathcal{L}\{\cosh(at)\operatorname{sen}(at)\} = \dfrac{a(s^2+2a^2)}{s^4+4a^4}$

(b) $\mathcal{L}\{\operatorname{senh}(at)\cos(at)\} = \dfrac{a(s^2-2a^2)}{s^4+4a^4}$

(c) $\mathcal{L}\{\operatorname{senh}(at)\operatorname{sen}(at)\} = \dfrac{2a^2s}{s^4+4a^4}$

A partir destas, mostre que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4+4a^4}\right\} = \frac{1}{4a^3}\big[\cosh(at)\operatorname{sen}(at) - \operatorname{senh}(at)\cos(at)\big].$$

Sugestão: Para mostrar (a), (b) e (c), utilize que

$$\cosh(at) = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{senh}(at) = \frac{e^{at}-e^{-at}}{2}.$$

Exercício 6. Usando a transformada da integral, calcule $f(t)$, sabendo que $\mathcal{L}(f)$ é igual a:

(a) $\dfrac{5}{s^3-5s}$ (b) $\dfrac{10}{s^3-\pi s^2}$ (c) $\dfrac{1}{s^4+s^2}$

Exercício 7. Denotamos por u a função de Heaviside (função degrau unitário). Esboce o gráfico das funções:

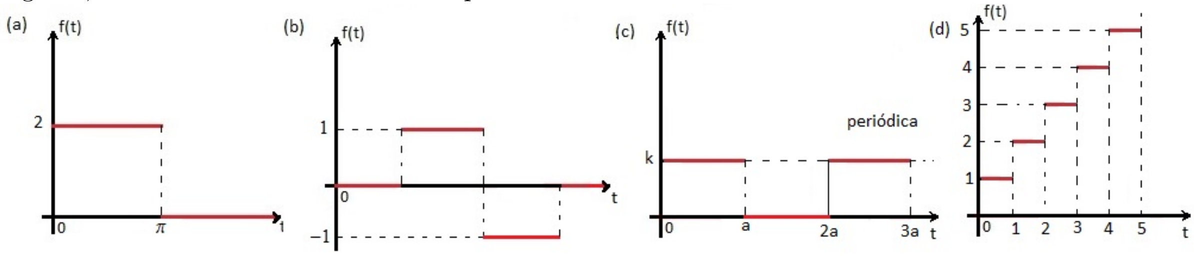
*Reprodução da segunda lista sobre a transformada de Laplace da Prof. Irene Strauch, com alguns exercícios adicionais.

(a) $u(t-1) + 2u(t-3) - 6u(t-4)$

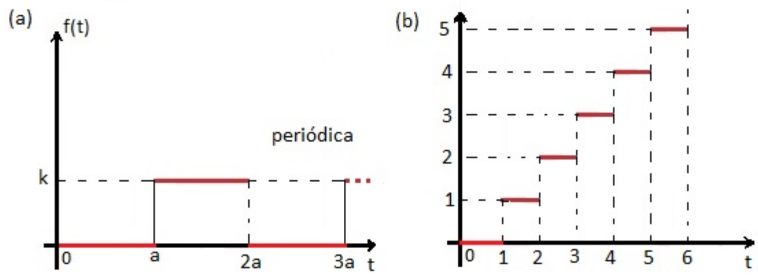
(b) $(t-3)u(t-2) - (t-2)u(t-3)$

(c) $2t\ u(t-2)$

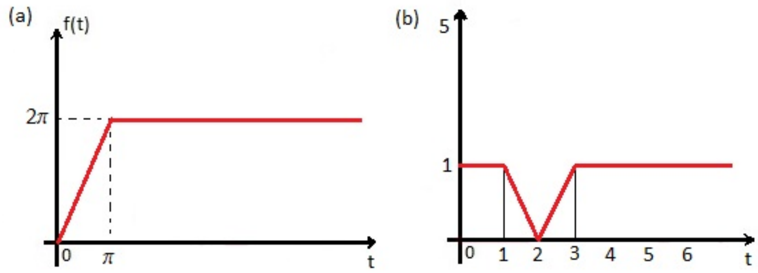
Exercício 8. Represente as seguintes funções (analiticamente) em termos da função de Heaviside. Em seguida, calcule sua transformada de Laplace:



Exercício 9. Utilizando o exercício anterior e o Teorema de Deslocamento no Eixo t, encontre a transformada de Laplace de:



Exercício 10. Utilize o Exercício 8 e a transformada da derivada para obter as transformadas de:



Exercício 11. Encontre $g(t)$ e faça um esboço de seu gráfico, sendo $\mathcal{L}\{g(t)\}$ igual a:

(a) $\dfrac{2e^{-2s} - 2e^{4s}}{s}$

(b) $\dfrac{e^{-as}}{s^2}$

(c) $\dfrac{se^{-\pi s}}{s^2+4}$

(d) $\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+2}$

(e) $\dfrac{e^{-s} + e^{-2s} - 3e^{-3s} + 6e^{-6s}}{s^2}$

Exercício 12. Faça o gráfico das seguintes funções e encontre suas transformadas de Laplace:

(a) $(t-\pi)u(t-\pi)$

(b) $t\ u(t-2)$

(c) $(\operatorname{sen} t)u(t-\pi)$

Exercício 13 (Existência da transformada de Laplace). No Exercício 6 da Lista 1, vimos que nem toda função $f(t)$ definida para $t \geq 0$ possui uma transformada de Laplace $\mathcal{L}(f)$. Mostre que se $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é integrável e tem crescimento de ordem exponencial da forma

$$|f(t)| \leq Me^{kt},$$

então a transformada de Laplace $\mathcal{L}(f)$ existe para todo $s \in (0, +\infty)$.

Sugestão: Utilize a definição de $\mathcal{L}$ e mostre que $e^{-st} f(t)$ é integrável com respeito a variável t, quando f é integrável e $s > k$.

RESPOSTAS

2a. $y(t) = e^{-t}\left(\frac{1}{2}t^2 - 1\right)$

2b. $y(t) = t \operatorname{sen} t + 3\cos t + 4 \operatorname{sen} t$

2c. $y(t) = \frac{e^{3t}}{2} + \frac{5e^{-4t}}{2} + \frac{e^{-3t}}{2}$

3a. $\frac{2}{(s-3)^3}$

3b. $\frac{4}{s^2+4s+20}$

3c. $\frac{s-4}{s^2-8s-9}$

3d. $\frac{3s-24}{s^2+4s+40}$

4a. $e^{-2t} \operatorname{sen}(n\pi t)$

4b. $e^{-3t}(\cos t - 3 \operatorname{sen} t)$

4c. $e^{2t}\big(6\cos(4t) + 2\operatorname{sen}(4t)\big)$

4d. $4e^{-4t}(1-t)$

6a. $\cosh\left(t\sqrt{5}\right) - 1$

6b. $10\frac{e^{\pi t} - \pi t - 1}{\pi^2}$

6c. $t - \operatorname{sen} t$

8a. $\frac{2}{s}(1 - e^{-\pi s})$

8b. $\frac{1}{s}(e^{-s} - 2e^{-2s} + e^{-3s})$

8c. $\frac{k}{s} \cdot \frac{1}{1+e^{-as}}$

8d. $\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1-e^{-s}}$

9a. $\frac{ke^{-as}}{s} \cdot \frac{1}{1+e^{-as}}$

9b. $\frac{e^{-s}}{s} \cdot \frac{1}{1-e^{-s}}$

10a. $\frac{2}{s^2}(1 - e^{-\pi s})$

10b. $\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}(e^{-s} - 2e^{-2s} + e^{-3s})$

11a. $2\big(u(t-2) - u(t-4)\big)$

11b. $(t-a)u(t-a)$

11c. $\cos\big(2(t-\pi)\big)(t-\pi)$

11d. $e^{-(t-\pi)} \operatorname{sen}(t-\pi)u(t-\pi)$

11e. $(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2) - 3(t-3)u(t-3) + 6(t-6)u(t-6)$

12a. $\frac{e^{-\pi s}}{s^2}$

12b. $e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\right)$

12c. $-\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$