Lista 7

MAT01168 – Matemática Aplicada II – 2015/1

Para cada um dos exercícios abaixo, resolva os seguintes problemas:

(a) Encontre a expansão de $f(x)$ em Série de Fourier Trigonométrica.

(b) A partir do item (a), escreva a Série de Fourier Harmônica de $f(x)$.

(c) A partir do item (a), encontre a expansão de $f(x)$ em Série de Fourier Complexa.

(d) Verifique que os coeficientes da Série de Fourier Complexa podem ser obtidos como

$$C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\omega_n x}\,dx, \quad \text{onde } \omega_n = \frac{n\pi}{L}.$$

(e) Podemos escrever o número complexo C_n em sua forma polar $C_n = |C_n|e^{i\phi_n}$. Faça um esboço do gráfico das funções discretas

$$n \longmapsto |C_n| \quad \text{e} \quad n \longmapsto \phi_n.$$

Exercício 1. Considere $f(x)$ a função 2π–periódica tal que $f(x) = x^2$, para $0 \leq x \leq 2\pi$.

Exercício 2. Considere $f(x)$ a função 2π–periódica tal que $f(x) = x^2$, para $-\pi \leq x \leq \pi$.

Exercício 3. Considere $f(x)$ a função 2-periódica tal que $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$, para $x \in (-1, 1)$.

RESPOSTAS

1a. $\dfrac{4\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\cos(nx)}{n^2} - \frac{\pi\,\mathrm{sen}(nx)}{n}\right)$

1b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cos\big(nx - \theta_n\big)$, onde $A_0 = \dfrac{4\pi^2}{3}$, $\quad A_n = \dfrac{4}{n}\sqrt{1/n^2 + \pi^2}$, $\quad \theta_n = \arctan(-n\pi) = \arctan(n\pi)$

1c. $\dfrac{4\pi^2}{3} + 2\displaystyle\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{+\infty}\left(\frac{1 + n\pi i}{n^2}\right)e^{inx}$

2a. $\dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$

2b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cos\big(nx - n\pi\big)$, onde $A_0 = \dfrac{\pi^2}{3}$, $\quad A_n = \dfrac{4}{n^2}$

2c. $\dfrac{\pi^2}{3} + 2\displaystyle\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{inx}$

3a. $2\pi\,\mathrm{sen}(3)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(-1)^n}{9 - \pi^2 n^2}\,\mathrm{sen}(n\pi x)$

3b. $2\pi\,\mathrm{sen}(3)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{9 - \pi^2 n^2}\cos\left(n\pi x - (-1)^n\frac{\pi}{2}\right)$

3c. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{in\pi x}$