Questões típicas de prova da área 1 - MAT01168 - MATEMÁTICA APLICADA II

Questão 1 Considere a trajetória dada pela equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= \sin(\pi t) + t \\ y &= \cos(\pi t) \\ z &= 0 \end{aligned}$$

a) Esboce gráfico dessa trajetória para $0 \leq t \leq 6$, indicando os pontos inicial e final. Esboce sobre o gráfico o triedro $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$ no ponto $t = 5/2$.

b) Calcule a aceleração $\vec{a}$, bem como as suas componentes tangencial e normal.

Questão 2 Considere o campo vetorial $\vec{v}$ definido por

$$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}$$

onde $\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$ é um vetor constante.

a) Calcule o valor de $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ e $\vec{\nabla} \times \vec{v}$.

b) Calcule a circulação do vetor $\vec{v}$ ao longo da circunferência de raio a sobre o plano xy centrada na origem e orientada no sentido horário. Obs: sua solução deve ser uma expressão envolvendo as componente do vetor $\vec{w}$

Questão 3 Mostre que se uma partícula de desloca sob a ação exclusiva de uma força conservativa da forma

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi,$$

então a energia mecânica total dada por

$$W = \frac{m}{2}v^2 + \phi(x, y, z)$$

se conserva. Ademais mostre que se o campo de força for do tipo central

$$\vec{F} = f(r)\hat{r}$$

então o momento angular também se conserva.

Questão 4 Mostre que todo campo de forças da forma $\vec{F} = f(x)\vec{i} + g(y)\vec{j} + h(z)\vec{k}$ é conservativo. Encontre uma função potencial para $\vec{F}$.

Questão 5 Calcule cada uma das integrais abaixo pelo método mais simples que a Análise Vetorial oferece. Não se esqueça de fazer os gráficos das regiões de integração e diga que teorema você está usando para cada integral.

a) $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} ds$, sendo S a superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e $\vec{F} = x\cos^2(y)\vec{i} + xz\vec{j} + z\sin^2 y\vec{k}$.

b) $\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{N} ds$, sendo S a superfície $z = 9 - x^2 - y^2$ acima do plano xy e $\vec{F} = 2xy\vec{i} + (x^2 - 2x)\vec{j} - x^2z^2\vec{k}$.