

ANÁLISE VETORIAL

em

dez aulas

Prof^ª. Irene Strauch

Departamento de Matemática Pura e
Aplicada.

Instituto de Matemática
UFRGS.

ANÁLISE VETORIAL: 1ª AULA

Os pré-requisitos necessários são: cálculo diferencial e integral e álgebra de vetores.

A Análise Vetorial é o Cálculo Diferencial e Integral das funções vetoriais.

O que são funções vetoriais? São funções que associam vetores a números reais.

Podemos citar vários exemplos de funções vetoriais que ocorrem na Física e nas Engenharias, tais como os conceitos de: deslocamento, velocidade, aceleração, força, torque, momentum linear, momentum angular, campo elétrico, campo magnético, campo gravitacional, etc.

Há duas categorias de funções vetoriais, o que já pode ser constatado nos exemplos acima.

Assim, há funções vetoriais que só dependem de uma variável, e aquelas que dependem de mais de mais de uma variável, como os campos elétrico, magnético e gravitacional.

As funções vetoriais de apenas uma variável ou parâmetro t são funções da forma $\vec{F}(t)$.

Dentre as funções vetoriais de mais de uma variável, destacaremos as funções vetoriais chamadas de *campos vetoriais*. Campos vetoriais são funções vetoriais mais gerais, que dependem, por exemplo, das coordenadas espaciais e do tempo, tais como o campo elétrico $\vec{E}(x,y,z,t)$ e o campo magnético $\vec{B}(x,y,z,t)$.

Iniciaremos o nosso estudo pela função vetorial $\vec{F}(t)$ mais simples e a indicaremos por

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k} \quad (1)$$

onde $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ são respectivamente, funções escalares de um parâmetro t , nas direções x , y , z dos eixos de um sistema de coordenadas retangulares.

Se, $t = \theta$ for um ângulo, então a equação (1) é a representação vetorial de uma curva e estaremos com a notação da GEOMETRIA.

Se, t for a variável tempo a equação (1) representa a trajetória de uma partícula e estaremos com a notação da MECÂNICA.

Exemplo 1: Esboce os gráficos das seguintes funções vetoriais:

a) $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

b) $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + 2t \vec{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Vamos agora introduzir a curva em 3-D, chamada hélice circular (é a curva representativa da molécula de DNA).

Uma hélice circular é definida na forma paramétrica por

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = a \sin t, \quad z(t) = ct, \quad (a > 0, c > 0).$$

Esta hélice é circular porque sua projeção no plano xy é uma circunferência de raio a . O parâmetro c quando multiplicado por 2π mede o chamado passo da hélice, isto é, a distância entre duas voltas consecutivas.

Exemplo 2: Represente a hélice circular acima na sua forma vetorial e faça um esboço de seu gráfico.

Usando a forma vetorial (1), temos: $\vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + ct \vec{k}$

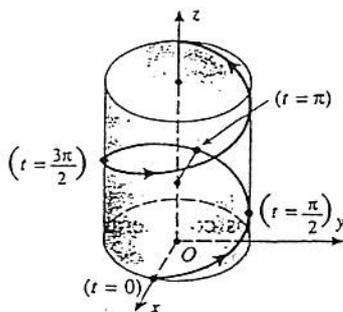
$$t = 0, \quad \vec{r}(0) = a \vec{i}$$

$$t = \frac{\pi}{2}, \quad \vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = a \vec{j} + c \frac{\pi}{2} \vec{k}$$

$$t = \pi, \quad \vec{r}(\pi) = -a \vec{i} + c\pi \vec{k}$$

$$t = \frac{3\pi}{2}, \quad \vec{r}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -a \vec{j} + c \frac{3\pi}{2} \vec{k}$$

$$t = 2\pi, \quad \vec{r}(2\pi) = a \vec{i} + c2\pi \vec{k} \quad \dots$$



Domínio de $\vec{r}(t)$:

Domínio de uma função vetorial $\vec{r}(t)$ é o conjunto de valores de t permitidos.

Se o domínio não for dado explicitamente como no exemplo acima, então subentende-se todos os valores de t para os quais cada componente de $\vec{r}(t)$ está definida, e dá um valor real.

Em certos casos o domínio será a intersecção dos domínios de suas componentes.

Exemplo 3 : Ache o domínio de $\vec{r}(t) = \ln(t-1)\vec{i} + e^t\vec{j} + \sqrt{t}\vec{k}$.

Suas componentes são:

Seus domínios são :

Logo o domínio de $\vec{r}(t)$ será a intersecção dada por .

Norma ou módulo de uma função vetorial $\vec{r}(t)$:

A definição de norma ou módulo da função vetorial $\vec{r}(t)$ é :

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)} = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$$

Ou seja, o módulo de uma função vetorial $\vec{r}(t)$ é a raiz quadrada do produto escalar de $\vec{r}(t)$ por $\vec{r}(t)$.

No exemplo 3, temos : $|\vec{r}(t)| = \sqrt{\ln^2(t-1) + e^{2t} + t}$

Para $t=2$, $|\vec{r}(t=2)| = \sqrt{0 + e^4 + 2}$.

Se $\vec{r}(t)$ representa a trajetória de uma partícula, então $|\vec{r}(2)|$ representa a distância da partícula a um observador situado na origem do referencial retangular.

Limites, derivadas e integrais de funções vetoriais:

Limites, derivadas e integrais de funções vetoriais são definidos a partir dos limites, derivadas e integrais de suas componentes.

Assim, para uma dada $\vec{r}(t)$ em 3-D, temos :

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) &= [\lim_{t \rightarrow a} x(t)]\vec{i} + [\lim_{t \rightarrow a} y(t)]\vec{j} + [\lim_{t \rightarrow a} z(t)]\vec{k} \\ \vec{r}'(t) &= x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} \\ \int \vec{r}(t) dt &= \left\{ \int x(t) dt \right\} \vec{i} + \left\{ \int y(t) dt \right\} \vec{j} + \left\{ \int z(t) dt \right\} \vec{k} \\ \int_a^b \vec{r}(t) dt &= \left\{ \int_a^b x(t) dt \right\} \vec{i} + \left\{ \int_a^b y(t) dt \right\} \vec{j} + \left\{ \int_a^b z(t) dt \right\} \vec{k}\end{aligned}$$

Regras de derivação:

Derivada de uma função vetorial constante \vec{r}_0 : $\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{0}$

Derivada do produto de uma constante k por uma função vetorial:

$$\frac{d}{dt} k\vec{r}(t) = k \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Derivada de uma soma ou diferença de funções vetoriais:

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)] = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \pm \frac{d\vec{r}_2}{dt}$$

Derivada do produto de uma função escalar $f(t)$ por uma vetorial:

$$\frac{d}{dt} [f(t)\vec{r}(t)] = f \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} \frac{df}{dt}$$

Derivada do produto escalar de duas funções vetoriais:

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)] = \vec{r}_1 \cdot \frac{d\vec{r}_2}{dt} + \vec{r}_2 \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt}$$

Derivada do produto vetorial de duas funções vetoriais:

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)] = \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{r}_2}{dt} + \frac{d\vec{r}_1}{dt} \times \vec{r}_2$$

Regras de integração:

Integral de uma constante k por uma função vetorial:

$$\int k\vec{r}(t) dt = k \int \vec{r}(t) dt$$

Integral de uma soma ou diferença de duas funções vetoriais:

$$\int [\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)] dt = \int \vec{r}_1(t) dt \pm \int \vec{r}_2(t) dt$$

Recordando Cálculo II: Curvas em duas (2-D) ou três dimensões (3-D) podem ser representadas, respectivamente, pelas equações paramétricas:

$$\begin{array}{llll} x = x(t), & y = y(t) & \text{em 2-D} & \text{ou} & (2) \\ x = x(t), & y = y(t), & z = z(t) & \text{em 3-D} & \end{array}$$

Assim, uma função vetorial da forma (1) representa uma curva em 3-D.

A seguir, veremos como representar uma função vetorial da forma $\vec{r}(t)$ em um sistema de coordenadas retangulares.

Gráfico de funções vetoriais da forma $\vec{r}(t)$:

A curva C é o gráfico traçado pela ponta do vetor $\vec{r}(t)$ em movimento.

Ou

A curva C é o gráfico da função vetorial $\vec{r}(t)$.

Nas aplicações, a curva C é vista como a trajetória de uma partícula que se desloca no espaço, em função do tempo. Sua representação vetorial $\vec{r}(t)$ é chamada de **raio-vetor** ou **vetor posição** de um ponto da curva C .

⇒ Orientação da curva C :

Toda curva representada vetorialmente pela função $\vec{r}(t)$ deve ser orientada, isto é, deve ser convencionalizado o seu sentido.

A orientação é positiva quando o seu sentido é o do crescimento de t .

Se t representa a variável tempo, então a orientação positiva é no sentido do movimento.

Notações de derivada de funções vetoriais da forma $\vec{r}(t)$:

$$\frac{d}{dt} \vec{r}(t), \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{r}'(t), \dot{\vec{r}}(t) \Rightarrow \text{notação da Mecânica.}$$

Exemplo 4: Dada a função vetorial $\vec{r}(t) = t^2 \vec{i} + e^t \vec{j} - 2 \cos \pi t \vec{k}$, calcule

a) $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{r}(t) =$

b) $\frac{d\vec{r}}{dt} =$

c) $\vec{r}'(1) =$

d) $\int_0^1 \vec{r}(t) dt =$

e) $\int \vec{r}(t) dt =$

O terno de vetores $\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)$:

Nosso objetivo é: dado o terno de vetores unitários $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, estático na origem o de um referencial cartesiano, definir um terno unitário de vetores em movimento, $\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)$, neste mesmo referencial.

Este novo terno é conhecido como triedro de Frenet-Serret, sendo $\vec{T}(t)$ o vetor tangente unitário, $\vec{N}(t)$ o vetor normal unitário e $\vec{B}(t)$ o vetor binormal unitário.

Iniciaremos deduzindo o vetor tangente unitário $\vec{T}(t)$. Para tanto, vamos ver a interpretação geométrica da derivada $\vec{r}'(t)$.

Seja C uma curva em 2-D representada por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ e seja $\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ um vetor na direção da reta secante $\overline{PP'}$ do gráfico abaixo.

No limite $\Delta t \rightarrow 0$, temos:
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t).$$

Geometricamente, no limite $\Delta t \rightarrow 0$, o vetor $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ coincidirá com o vetor tangente à curva C em P .

Assim, concluímos que:

O vetor $\vec{r}'(t)$ é um vetor na direção da reta tangente à curva C em P .

Recordando Cálculo I: Qual a relação entre $\vec{r}'(t)$ e $f'(x) = \tan\theta$? Para estabelecer esta relação, vamos usar a notação do Cálculo I e representar a curva C em 2-D por $y = f(x)$, cujo gráfico é

Assim, na notação da Análise Vetorial, $\vec{r}'(t)$ é o vetor tangente à curva C em um ponto genérico P . Este vetor tangente é dado por $\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$, e a razão de suas componentes nos fornece a relação procurada

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \tan \theta .$$

Exemplo 5: a) Calcular o vetor tangente à curva C , dada por $\vec{r}(t) = 2\cos t \vec{i} + 2\sin t \vec{j}$, em $t = \frac{3\pi}{4}$.

b) Calcular o ângulo θ que este vetor forma com o eixo x .

c) Faça o gráfico representando a curva C , o vetor $\vec{r}'\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ e o ângulo θ .

Vetor tangente unitário $\vec{T}(t)$:

Como o próprio nome diz, o vetor tangente unitário é um vetor com a mesma direção do vetor tangente $\vec{r}'(t)$ e com módulo 1. Logo,

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}, \quad \vec{r}'(t) \neq \vec{0}$$

Vetor normal unitário $\vec{N}(t)$:

Este vetor será definido a partir da condição de ortogonalidade entre \vec{T} e \vec{N} , isto é, $\vec{T}(t) \cdot \vec{N}(t) = 0$.

Vamos demonstrar, a seguir, um teorema que será útil na definição de $\vec{N}(t)$.

Teorema : Se a função vetorial $\vec{A}(t)$ possui módulo constante para todo t , então $\vec{A}(t) \cdot \vec{A}'(t) = 0$, ou seja, $\vec{A}(t)$ e $\vec{A}'(t)$ são vetores ortogonais.

Demonstração:

Como por hipótese, $|\vec{A}(t)|$ é constante, então o produto escalar $\vec{A}(t) \cdot \vec{A}(t)$ será também uma constante. Usando a regra de derivada de um produto escalar, temos

$$\vec{A}(t) \cdot \vec{A}'(t) + \vec{A}'(t) \cdot \vec{A}(t) = 0 \quad \therefore \quad 2\vec{A}(t) \cdot \vec{A}'(t) = 0$$

Conclusão: Como o vetor $\vec{T}(t)$ é um vetor constante de módulo 1, então

$$\vec{T}(t) \cdot \vec{T}'(t) = 0$$

e, portanto, $\vec{T}'(t)$ é ortogonal a $\vec{T}(t)$.

O vetor normal unitário $\vec{N}(t)$ fica, então, definido por

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}, \quad \vec{T}'(t) \neq 0$$

O vetor normal unitário $\vec{N}(t)$ possui a direção de $\vec{T}'(t)$ e aponta para o interior da curva, ou seja, para o lado côncavo de C .

Recordando o Movimento Circular Uniforme (MCU), na Física.

Seja uma partícula em trajetória circular de raio R , representada pela curva $\vec{r}(t) = R\cos(\omega t)\vec{i} + R\sin(\omega t)\vec{j}$, com velocidade vetorial dada por $\vec{v}(t) = \vec{\omega} \times \vec{r}(t)$, sendo $\vec{\omega}$ o vetor velocidade angular, conforme o gráfico abaixo. Então:

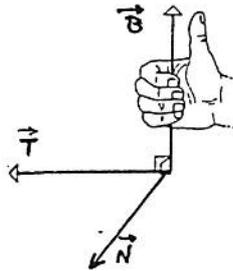
Vetor binormal unitário $\vec{B}(t)$:

O vetor binormal é o vetor unitário, perpendicular a $\vec{T}(t)$ e $\vec{N}(t)$, logo

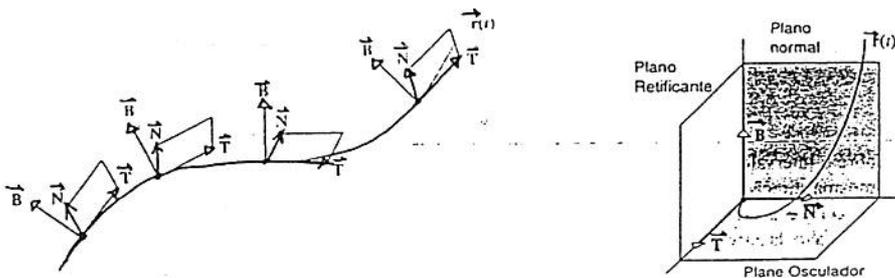
$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$

Pelas propriedades do produto vetorial, $\vec{B}(t)$ é ortogonal a ambos vetores $\vec{T}(t)$ e $\vec{N}(t)$, e está orientado em relação a estes pela regra da mão direita.

Regra da mão direita \rightarrow



Em 3-D teremos o chamado triedro de Frenet- Serret.



Conclusão: O terno de vetores $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ forma um referencial de vetores unitários, mutuamente ortogonais, que tem um papel importante no estudo do movimento de partículas no espaço, pois, diferentemente, do terno estático $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, o terno $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ acompanha a partícula em sua trajetória ao longo da curva C .

Exemplo 6: Calcular o terno $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$, para a hélice circular

$$\vec{r}(t) = acost\vec{i} + asent\vec{j} + ct\vec{k}$$

Texto Complementar à aula 1:

Trajétórias de partículas carregadas em campos magnéticos.

I) Trajetória descrita por um feixe de elétrons lançado perpendicularmente em um campo magnético uniforme \vec{B} .

Vamos supor que um feixe de elétrons é lançado por um canhão eletrônico em uma câmara de ionização, com uma velocidade vetorial \vec{v} perpendicular a \vec{B} . Numa câmara de ionização esta trajetória fica visível porque os átomos de gás da câmara emitem luz quando alguns dos elétrons do feixe colidem com eles.

A força magnética \vec{F}_B presente neste movimento é a força de Lorentz, que é uma força cuja direção é sempre perpendicular à velocidade \vec{v} da partícula de carga q e ao campo magnético \vec{B} e é expressa pelo produto vetorial $\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B}$.

Esta é a força que irá defletir os elétrons lançados na câmara de ionização e como estamos assumindo que $\vec{v} \perp \vec{B}$, esta deflexão fará com que os elétrons descrevam uma trajetória circular.

Assim, se convencionarmos o plano xy como o plano desta página, então \vec{B} estará dirigido para fora do plano da página e pela regra da mão direita a força vetorial instantânea \vec{F}_B será perpendicular ao plano determinado pelos vetores \vec{v} e \vec{B} . Como as cargas são negativas, \vec{F}_B , aponta para dentro da curva. Então, pela segunda lei de Newton, \vec{F}_B será a força centrípeta responsável pelo movimento. Esta é a igualdade que permite calcular o raio R da trajetória circular descrita pelo feixe de elétrons.

Seja $|\vec{v}|=v$ e $|\vec{B}|=B$, então :

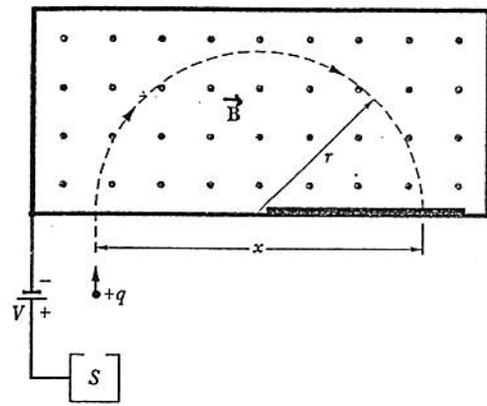
$$q v B = \frac{mv^2}{R} \quad \therefore R = \frac{mv}{qB}$$

Exercício: Calcule o raio da trajetória para esta configuração, considerando um feixe de elétrons com velocidade $v = 3.2 \times 10^7 \text{ m/s}$, que entra em um campo magnético de intensidade $B = 1.2 \times 10^{-3} \text{ T}$, sendo $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ e $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

Resposta: 15cm.

Uma importante aplicação do movimento circular de partículas carregadas em campos magnéticos uniformes é o espectrômetro de massa. O espectrômetro de massa é um equipamento usado para medir a massa m de íons e está esquematizado na figura a seguir, onde

S é a fonte de íons, inicialmente estacionários. Estes íons são acelerados por uma diferença de potencial V e disparados para o interior de uma câmara perpendicularmente a um campo magnético uniforme \vec{B} . A força de Lorentz $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$ faz com que o íon se mova em um semi-círculo e colida com uma placa fotográfica situada a uma distância $x=2R$ da entrada do feixe. Conhecendo a intensidade do campo magnético, a carga q do íon, a diferença de potencial V e o ponto x marcado na placa fotográfica, temos todos os parâmetros necessários para calcular a massa m do íon. A lei física que permite este cálculo é a lei de conservação de energia, isto é, a energia cinética do íon no final do processo de aceleração ($\frac{1}{2}mv^2$) é igual à sua energia potencial no início do processo de aceleração (qV):



II) Trajetória descrita por um feixe de raios gama lançado perpendicularmente a um campo magnético uniforme.

Neste exemplo, a câmara de ionização está preenchida com hidrogênio líquido e está imersa em um campo magnético uniforme, porém muito forte. Neste ambiente é lançado um feixe de raios gama. Como sabemos, o raio γ é uma radiação com carga total nula e portanto não deixa inicialmente rastro de sua trajetória na câmara. Contudo, o raio γ pode ter energia suficiente para ao colidir com um átomo de hidrogênio arrancar o elétron do hidrogênio e se transformar em um par elétron-pósitron. Os rastros luminosos deixados por estas partículas são uma longa linha curva, no caso do elétron arrancado e em duas curvas espirais para o par elétron-pósitron, conforme mostrado abaixo.

Neste caso, as trajetórias são curvas conhecidas como espirais.

A mais conhecida é a espiral de Arquimedes, cuja representação em coordenadas polares é dada por $r=a\theta$, com θ dado em radianos e a uma constante positiva. Se $\theta \geq 0$ a espiral gira no sentido anti-horário. Se $\theta \leq 0$, a espiral gira no sentido horário.

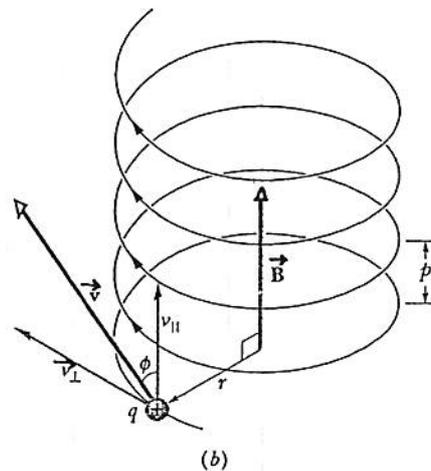
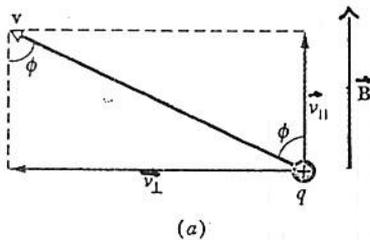
Exercício : Dada a espiral $r=\theta$ ($\theta \geq 0$), onde r e θ são coordenadas polares:

- Faça um esboço de seu gráfico. Um esboço razoável pode ser obtido plotando as intersecções da curva com os eixos xy , observando que r aumenta linearmente com θ .
- Dê uma representação vetorial para a espiral $r=\theta$.

III) Trajetórias de partículas carregadas, lançadas em campos magnéticos com velocidade \vec{v} , tais que $\vec{v}=\vec{v}_{\parallel}+\vec{v}_{\perp}$, onde \vec{v}_{\parallel} e \vec{v}_{\perp} são as velocidades na direção de \vec{B} e na direção perpendicular a \vec{B} , respectivamente.

Caso a) Campo magnético uniforme.

A partícula, neste caso, se moverá em uma trajetória helicoidal em torno da direção de \vec{B} . A componente paralela da velocidade determina o passo da hélice e a componente perpendicular determina o raio de hélice. Veja a figura abaixo.

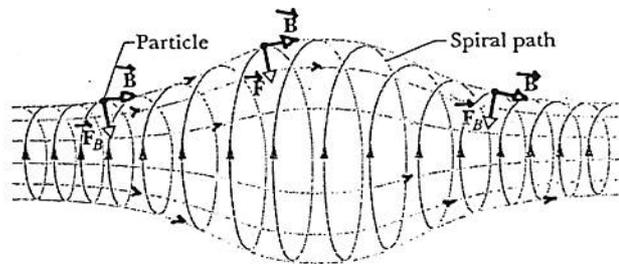


Exercício: Dada a hélice $\vec{r}(t)=R\cos\omega t\vec{i}+R\sin\omega t\vec{j}+ct\vec{k}$, onde ω é a velocidade angular da partícula e t é a variável tempo,

- determine a velocidade $\vec{v}(t)$ e a aceleração $\vec{a}(t)$ da partícula.
- Suponha que esta é a trajetória de um elétron numa região do espaço onde há um campo magnético uniforme $\vec{B}=B_0\vec{k}$. Use a lei de Lorentz $\vec{F}_B=q\vec{v}\times\vec{B}$ e o fato de que esta força é a força centrípeta para determinar o raio da R hélice.

Caso b) Campo magnético não uniforme.

Se o campo magnético não for uniforme, isto é, \vec{B} não é um vetor constante, mas um campo vetorial variável, então a partícula ficará espiralando, como é mostrado na figura abaixo.



O espaçamento entre as linhas do campo magnético mede de certa forma a intensidade do campo. Assim, podemos observar que nesta figura, as linhas de campo nas extremidades se tornam mais próximas, indicando que o campo magnético é mais intenso aí. Quando temos esta configuração, a partícula sofre uma reflexão nas extremidades, resultando no seu confinamento dentro desta 'garrafa magnética'.

O Cinturão de Van Allen: Quando as tempestades solares disparam elétrons e prótons, estes são aprisionados pelo campo magnético terrestre, formando o chamado Cinturão de Van Allen que se localiza acima da atmosfera terrestre, entre os pólos norte e sul. O movimento de vai-e-vem dos elétrons na 'garrafa magnética' dá origem a formação de um campo elétrico na região onde os elétrons normalmente refletem. Este campo acaba por eliminar a reflexão fazendo com que os elétrons escapem e entrem na atmosfera, onde colidem com as moléculas de ar, fazendo-as emitir luz. Esta é a origem do fenômeno chamado 'aurora boreal'. A luz verde é emitida pelos átomos de oxigênio e a luz pink é emitida pelas moléculas de nitrogênio.

[1] Encontre o domínio da função vetorial $\vec{r}(t)$ e o valor $\vec{r}(t_0)$ para:

(a) $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} - 3t \vec{j}; t_0 = \pi$

(b) $\vec{r}(t) = \cos(\pi t) \vec{i} - \ln t \vec{j} + \sqrt{t-2} \vec{k};$
 $t_0 = 3$

[2] Expresse as equações paramétricas abaixo como uma única equação vetorial:

(a) $x(t) = 3 \cos t; y(t) = t + \sin t$

(b) $x(t) = 2t; y(t) = 2 \sin 3t; z(t) = 5 \cos 3t$

[3] Descreva o gráfico das equações:

(a) $\vec{r}(t) = (2 - 3t) \vec{i} - 4t \vec{j}$

(b) $\vec{r}(t) = 2t \vec{i} - 3 \vec{j} + (1 + 3t) \vec{k}$

(c) $\vec{r}(t) = 3 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j} - \vec{k}$

[4] Encontre a declividade (coeficiente angular) da reta em D representada por:

$\vec{r}(t) = (1 - 2t) \vec{i} - (2 - 3t) \vec{j}$

R: $-\frac{3}{2}$

[5] Esboce o gráfico de $\vec{r}(t)$:

(a) $\vec{r}(t) = 2 \vec{i} + t \vec{j}$

(b) $\vec{r}(t) = (1 + \cos t) \vec{i} + (3 - \sin t) \vec{j}; 0 \leq t \leq 2\pi$

(c) $\vec{r}(t) = \cosh t \vec{i} + \sinh t \vec{j}$

(d) $\vec{r}(t) = t \vec{i} + t \vec{j} + t \vec{k}$

(e) $\vec{r}(t) = t \vec{i} + t^2 \vec{j} + 2 \vec{k}$

(f) $\vec{r}(t) = 2 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j} + t \vec{k}$

[6] Dada a hélice circular: $\vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + ct \vec{k}$, sendo $c > 0$, encontre c tal que a cada volta completa z avance 3 unidades.

R: $\frac{3}{2\pi}$

[7] Calcule $\vec{r}'(t_0)$ e esboce o gráfico de $\vec{r}(t)$ juntamente com o vetor tangente $\vec{r}'(t_0)$:

(a) $\vec{r}(t) = (t, t^2), t_0 = 2$

(b) $\vec{r}(t) = (e^{-t}, e^{2t}), t_0 = \ln 2$

(c) $\vec{r}(t) = 2 \sin t \vec{i} + \vec{j} + 2 \cos t \vec{k}, t_0 = \frac{\pi}{2}$

[8] Dadas $\vec{u}(t) = t^2 \vec{i} - 3t \vec{k}, \vec{v}(t) = -4t^3 \vec{j} + (t+1) \vec{k}, \vec{w}(t) = 3t^2 \vec{i} + t \vec{j} - t^3 \vec{k}$. Encontre:

(a) $(\vec{u} \cdot \vec{v})'$

R: $-3(2t+1)$

(b) $(\vec{u} \times \vec{v})'$

R: $-48t^3 \vec{i} - (3t^2 + 2t) \vec{j} - 20t^4 \vec{k}$

(c) $[\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})]'$

R: $(6t - 48t^3) \vec{i} - (2t + 30t^2 - 5t^4) \vec{j} + (3t^2 - 20t^4) \vec{k}$

[9] Prove:

(a) $\frac{d}{dt} [\vec{r}(t) \times \vec{r}'(t)] = \vec{r}(t) \times \vec{r}''(t)$

(b) $\frac{d}{dt} \|\vec{r}(t)\| = \frac{1}{\|\vec{r}(t)\|} \vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t)$, sendo

$\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)}$

(c) $\frac{d}{dt} \left[\frac{\vec{r}(t)}{\|\vec{r}(t)\|} \right] = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}(t)\|} - \frac{\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t)}{\|\vec{r}(t)\|^3} \vec{r}(t)$

Sugestão para o item (c): Lembre-se que $\frac{1}{\|\vec{r}(t)\|}$ é uma função escalar, use as regras de derivação de produto de uma função escalar por uma função vetorial.

Análise vetorial : 2ª aula

Qual a motivação para introduzir o terno de vetores unitários $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ se já dispomos do terno $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$?

Na Geometria : definir curvatura κ e torção τ de uma curva C .

Na Mecânica :

- representar o vetor aceleração $\vec{a}(t)$ de uma partícula em função de suas componentes tangencial $a_T(t)$ e normal $a_N(t)$
- redefinir curvatura e torção de uma curva (trajetória da partícula) em função de parâmetros cinemáticos.

Conceitos intuitivos de curvatura κ e raio de curvatura ρ :

Dadas as curvas planas abaixo, observe, para cada uma delas, como o vetor \vec{T} varia em função do comprimento de arco s .

Na curva (a), que é uma reta, o vetor \vec{T} é constante em direção, módulo e sentido. Podemos dizer também que uma reta não se curva nunca.

A curva (b) é uma curva suave e o vetor \vec{T} varia lentamente ao longo de C . Esta é uma curva que se encurva lentamente.

Já, a curva (c) se encurva mais rapidamente, ou seja, o vetor \vec{T} varia mais drasticamente ao longo de C . Comparando estas três curvas, podemos dizer que a reta é uma curva de curvatura nula e que a curvatura da curva (c) é maior que a curvatura da (b). Isto é, estamos associando o conceito de curvatura κ com a taxa de variação do vetor \vec{T} com relação ao comprimento s da curva C . Observar que estamos apresentando o vetor \vec{T} em função de uma nova variável geométrica, que é o comprimento de arco s em substituição à variável angular t .

Em síntese : A curvatura em um ponto de uma curva mede o quão rapidamente a direção de seu vetor tangente \vec{T} se altera em relação ao comprimento de arco s .

Define-se, então, curvatura κ como:
$$\kappa(s) = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| \quad (7)$$

Assim, a curvatura é uma função escalar de s , ou seja $\kappa = \kappa(s)$ onde s é um novo parâmetro. A definição acima só poderá ser usada se a curva C estiver parametrizada em termos do comprimento de arco s . Mas este não é um parâmetro prático, tanto na Geometria como na Mecânica, a curva C é representada preferencialmente pela função vetorial definida em (1) :

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

onde o parâmetro t pode ser um ângulo θ ou a variável tempo.

Precisamos, pois, transformar $\kappa(s)$ em $\kappa(t)$. Para tanto, vamos usar a regra da cadeia:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\vec{T}'(t)}{\frac{ds}{dt}} \quad (8)$$

Apareceu nesta dedução a taxa $\frac{ds}{dt}$, conhecida do Cálculo I.

Recordando Cálculo I:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad \text{ou}$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \quad \therefore$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{\vec{r}' \cdot \vec{r}'} = |\vec{r}'(t)|$$

Finalmente, substituindo esta fórmula na (8) e esta na definição (7), temos

$$\kappa(t) = \frac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{r}'(t)|}, \quad |\vec{r}'(t)| \neq 0 \quad (9)$$

Obsrvação: As derivadas com relação a variável t serão denotadas por uma linha.

Um outro conceito associado ao conceito de curvatura é o conceito de raio de curvatura, indicado pela letra grega ρ e definido como

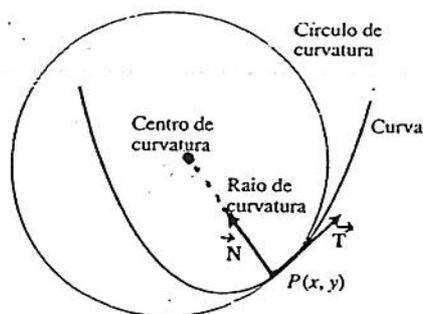
$$\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)} \quad (10)$$

Assim quanto maior a curvatura $\kappa(t)$ em um dado ponto da curva tanto menor será o raio de curvatura $\rho(t)$ naquele ponto.

Associado ao conceito de raio de curvatura, apresentamos abaixo o conceito de círculo de curvatura.

Círculo de curvatura ou círculo osculador, em um ponto P, sobre uma curva plana, onde $\kappa \neq 0$ é o círculo no plano da curva que :

- É tangente à curva em P (tem a mesma reta tangente que a curva).
- Tem a mesma curvatura que a curva em P .
- Aponta para o lado côncavo ou interno da curva.



Exemplo 7: Encontre a curvatura e trace o círculo de curvatura da parábola $y = x^2$ na origem.

Torção de uma curva C

Assim como o conceito de curvatura mede o "encurvamento" de uma curva, o conceito de torção mede a capacidade de uma curva se torcer. Neste sentido, só é possível definir torção para curvas em 3-D.

A definição matemática deste novo parâmetro, indicado pela letra grega τ , é:

$$\tau(s) = \left| \frac{d\vec{B}}{ds} \right| \quad (11)$$

Usando a regra da cadeia, transformamos $\tau(s)$ em $\tau(t)$:

$$\tau(t) = \left| \frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right| = \frac{|\vec{B}'(t)|}{|\vec{r}'(t)|} \quad (12)$$

Exemplo 8:

Calcular a curvatura, o raio de curvatura e a torção das seguintes curvas:

- uma circunferência centrada na origem e de raio a;
- uma hélice circular de raio a e passo c.

Análise Vetorial : 3ª aula

No exemplo 8, calculamos a curvatura $\kappa(t)$ para uma hélice usando sua definição geométrica. Você deve ter observado que precisamos executar uma série de operações. Vejamos :

- a) Derivamos $\vec{r}(t)$ obtendo $|\vec{r}'(t)|$.
- b) Calculamos o módulo de $\vec{r}'(t)$.
- c) Dividimos $\vec{r}'(t)$ por seu módulo, a fim de definir $\vec{T}(t)$.
- d) Derivamos $\vec{T}(t)$ usando a regra do quociente.
- e) Obtido $\vec{T}'(t)$, calculamos seu módulo.
- f) Finalmente, dividimos $|\vec{T}'(t)|$ por $|\vec{r}'(t)|$ e obtemos $\kappa(t)$.

Você há de convir que esta fórmula não é nada prática. Pois bem, existem fórmulas muito mais práticas de se calcular a curvatura. Estas fórmulas surgem naturalmente na Mecânica, quando se estuda o movimento de partículas ao longo de uma curva C. É a Física ajudando a Matemática. Este é o nosso próximo objetivo.

Movimento de uma partícula ao longo de uma curva C .

Já foi mencionada a importância do terno de vetores unitários $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ no estudo do movimento de partículas na Mecânica. Vamos iniciar nosso estudo com a dedução da fórmula da aceleração $\vec{a}(t)$:

$$\boxed{\vec{a}(t) = a_T(t)\vec{T} + a_N(t)\vec{N}} \quad (13)$$

onde a_T e a_N são respectivamente a componente tangencial e normal do vetor aceleração $\vec{a}(t)$.

Esta fórmula é muito interessante, porque ela mostra que mesmo para curvas em 3-D, o vetor aceleração está sempre contido no plano formado pelos vetores \vec{T} e \vec{N} (plano osculador).

Após a dedução da fórmula (13), veremos como aparecem as fórmulas mais práticas para a curvatura.

Seja $\vec{r}(t)$ a curva C que representa a trajetória de uma certa partícula, onde t é a variável tempo. Seja $\vec{v}(t)$ o vetor velocidade desta partícula. Por definição física temos:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t) \quad \text{ou} \quad \vec{v}(t) = v\vec{T}, \quad \text{sendo} \quad v = |\vec{v}(t)| .$$

(Esta notação mais compacta é usada na Física.)

Vamos agora sintetizar todas as fórmulas necessárias no seguinte formulário:

$$\vec{v}(t) = v\vec{T} \quad (1)$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|} \quad (2)$$

$$\kappa(t) = \frac{|\vec{T}'(t)|}{v} \quad (3)$$

$$\kappa(t) = \frac{1}{\rho} \quad (4)$$

Parte-se da definição física de aceleração: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$ ou

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{T}) = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{d\vec{T}}{dt},$$

onde se usou a fórmula (1) e a regra de derivada de produto.

O 1º termo, $\frac{dv}{dt}$, é a componente tangencial da aceleração. Isto é,

$$a_T = \left(\frac{dv}{dt}\right).$$

Vamos usar as fórmulas (2), (3) e (4) do formulário para reescrever o 2º termo, isto é :

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \vec{T}'(t) = |\vec{T}'(t)|\vec{N} = \kappa v\vec{N} = \frac{v}{\rho}\vec{N}$$

Substituindo estes resultados em $\vec{a}(t)$ temos :

$$\vec{a}(t) = a_T\vec{T} + \frac{v^2}{\rho}\vec{N}$$

Define-se a componente normal da aceleração por:

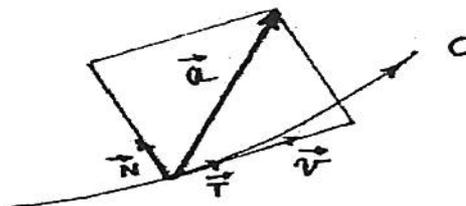
$$a_N = \frac{v^2}{\rho}.$$

Assim, finalmente demonstramos que:

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N}$$

(13)

Conclusão : O vetor aceleração por estar expresso em termos dos vetores \vec{T} e \vec{N} não necessita de um sistema de referência, conforme é mostrado ao lado.



Vamos agora deduzir fórmulas mais práticas para as componentes a_T e a_N da aceleração e para a curvatura $\kappa(t)$.

Partimos da fórmula (13) multiplicada escalarmente pelo vetor \vec{v} :

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = a_T \vec{v} \cdot \vec{T} + a_N \vec{v} \cdot \vec{N}$$

Mas, $\vec{v} \cdot \vec{T} = v$ e $\vec{v} \cdot \vec{N} = 0$, pois $\vec{v} // \vec{T}$ e $\vec{v} \perp \vec{N}$.

Logo,

$$\boxed{a_T = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v}} \quad (14)$$

Multiplicamos, agora, vetorialmente o vetor \vec{v} pelo vetor \vec{a} :

$$\vec{v} \times \vec{a} = a_T \vec{v} \times \vec{T} + a_N \vec{v} \times \vec{N}$$

Mas, $\vec{v} \times \vec{T} = \vec{0}$, pois $\vec{v} // \vec{T}$ e $\vec{v} \times \vec{N} = v \vec{T} \times \vec{N} = v \vec{B}$.

Logo,

$$\vec{v} \times \vec{a} = a_N v \vec{B}$$

Calculando o módulo deste produto e lembrando que o vetor binormal $\vec{B}(t)$ é unitário, temos:

$$|\vec{v} \times \vec{a}| = a_N v |\vec{B}| = a_N v \quad \text{ou}$$

$$\boxed{a_N = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v}} \quad (15)$$

Vimos anteriormente que a definição da componente normal da aceleração é $a_N = \frac{v^2}{\rho}$. Assim igualando esta definição com a fórmula (15), temos uma nova fórmula para calcular a curvatura :

$$\kappa(t) = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v^3} \quad (16^a)$$

Lembrando que $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$ e que $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$ então podemos, finalmente, escrever

$$\kappa(t) = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3} \quad (16^b)$$

Esta é a fórmula mais prática de que falávamos anteriormente e que substitui a definição geométrica. Vamos usá-la nos exemplos que se seguem, contemplando aplicações geométricas e físicas.

Exemplo 9: Calcular a curvatura e o raio de curvatura nas extremidades dos eixos da elipse

$$\vec{r}(t) = 2\cos t \vec{i} + 3\sin t \vec{j} \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Exemplo 10 :

O traçado de uma estrada plana e horizontal é o de uma parábola $y = \frac{1}{600}x^2$ (as unidades de x e y são as do SI).

Um caminhão carregado trafega por esta estrada com velocidade constante em módulo. O caminhão poderá derrapar se a componente normal de sua aceleração exceder 1.5m/s^2 . Quais os valores possíveis para a velocidade do caminhão que permitem a sua passagem pelo vértice da parábola sem perigo de derrapagem ?

R: $v < 21.2 \text{ m/s}$

Exemplo 11: Uma pessoa em uma asa delta está espiralando para cima devido ao ar ascendente muito veloz em uma trajetória com vetor posição dado por

$$\vec{r}(t) = 3\cos t \vec{i} + 3\sin t \vec{j} + t^2 \vec{k}$$

A trajetória é similar a uma hélice. Encontre $a_T(t), a_N(t)$ e $\kappa(t)$ para esta curva.

Exemplo 12: A curva descrita por um ponto da beira de uma roda de raio R que gira sem deslizar e se desloca ao longo do eixo x é chamada de ciclóide.

Seja $P(x,y)$ um ponto da beira da roda que irá descrever a ciclóide e vamos supor P , inicialmente, localizado nas coordenadas $x=0$ e $y=2R$, conforme o gráfico abaixo.

As equações paramétricas da trajetória do ponto P são:

$$x(t) = R \sin \omega t + R \omega t \quad , \quad y(t) = R \cos \omega t + R$$

Calcule para esta ciclóide os vetores velocidade e aceleração nos pontos onde y é máximo e mínimo.

[1] Encontre os vetores unitários \vec{T} e \vec{N} para as curvas abaixo em $t = t_0$.

(a) $\vec{r}(t) = 5 \cos t \vec{i} + 5 \sin t \vec{j}$, $t_0 = \frac{\pi}{3}$

R: $\vec{T} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\vec{N} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(b) $\vec{r}(t) = (t^2 - 1) \vec{i} + t \vec{j}$, $t_0 = 1$

R: $\vec{T} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{N} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

[2] O vetor binormal unitário foi definido em aula como $\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$. Argumente, sem cálculos, que ele também poderia ser definido como: $\vec{B}(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}$.

[3] Use esta última fórmula para calcular $\vec{B}(t)$ para a curva C:

$\vec{r}(t) = (\sin t - t \cos t) \vec{i} + (\cos t + t \sin t) \vec{j} + \vec{k}$

R: $\vec{B}(t) = -\vec{k}$

[4]

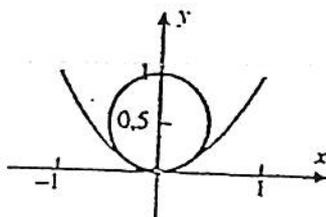
Para cada uma das curvas ao Lado, use a respectiva circunferência de curvatura para estimar o raio de curvatura ρ .

R:

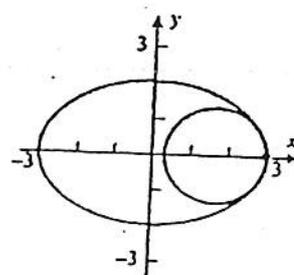
(a) $\rho = 0,5$

(b) $\rho = 1,25$

(a)



(b)



[5] Calcule a curvatura $\kappa(t)$ e faça um esboço da curva com a respectiva circunferência de curvatura:

(a) $y = \frac{1}{x}$, em $x = 1$

R: $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(b) $y = \frac{1}{2}x^2$, em $x = -1$

R: $\kappa = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

(c) $y = e^x$, em $x = 0$

R: $\kappa = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

[6] Calcule o raio de curvatura $\rho(t)$ da elipse $x(t) = 2 \cos t$, $y(t) = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, em $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2}$. Esboce as circunferências de curvatura nestes pontos. R: $\rho(0) = \frac{1}{2}$, $\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

[7] Em que ponto a curva $y = e^x$ tem a máxima curvatura?

R: $t = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

[8] Seja $\vec{r}(t)$ o vetor-posição de uma partícula em movimento e t o tempo. Encontre $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$ e $\|\vec{v}(t)\|$. Faça um esboço da trajetória representando $\vec{v}(t)$, e $\vec{a}(t)$ em t_0 :

(a) $\vec{r}(t) = 3 \cos t \vec{i} + 3 \sin t \vec{j}$, $t_0 = \frac{\pi}{3}$

R: $\vec{v}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, 3\right)$, $\vec{a}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

(b) $\vec{r}(t) = e^t \vec{i} + e^{-t} \vec{j}$, $t_0 = 0$

R: $\vec{v}(0) = (1, -1)$, $\vec{a}(0) = (1, 1)$

(c) $\vec{r}(t) = \cosh t \vec{i} + \sinh t \vec{j}$, $t_0 = \ln 2$

R: $\vec{v}(\ln 2) = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$, $\vec{a}(\ln 2) = \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$

(d) $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + t \vec{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$

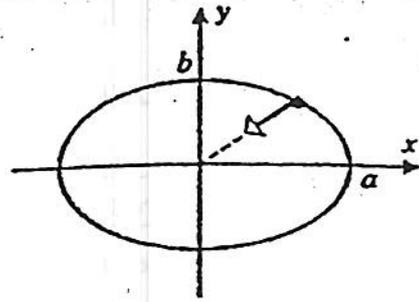
R: $\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, $\vec{a}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

[9]

Conforme o gráfico ao lado, a trajetória de uma partícula é representada na forma paramétrica por:

$$x(t) = a \cos \omega t, \quad y(t) = b \sin \omega t$$

- (a) Mostre que a aceleração $\vec{a}(t)$ está voltada em direção à origem.
 (b) Mostre que $\|\vec{a}(t)\|$ é proporcional à distância da partícula à origem.



[10] O movimento de uma partícula é descrito por $\vec{r}(t) = (t - t^2) \vec{i} - t^2 \vec{j}$. Encontre o valor mínimo para $\|\vec{v}(t)\|$ da partícula e sua localização quando tiver esta velocidade.

R: $\|\vec{v}(t)\|_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}, P\left(\frac{3}{16}, -\frac{1}{16}\right)$

R: 15°

[11] Encontre o ângulo entre $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$ para $\vec{r}(t) = t^3 \vec{i} + t^2 \vec{j}, t = 1$.

[12] Onde ao longo da trajetória $\vec{r}(t) = (t^2 - 5t) \vec{i} + (2t + 1) \vec{j} + 3t^2 \vec{k}$, os vetores velocidade e aceleração são ortogonais.

R: $P\left(-\frac{19}{16}, \frac{3}{2}, \frac{3}{16}\right)$

[13] Prove que se o módulo da velocidade de uma partícula é constante, então os vetores velocidade e aceleração são perpendiculares. (Sugestão: Considere $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$)

[14] Prove que se a aceleração de uma partícula em movimento é zero para todo t , então a partícula se move ao longo de uma reta. (Sugestão: lembre-se que $\kappa(t) = \frac{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}{v^3}$)

[15] Calcule a componente tangencial a_T e a componente normal a_N da aceleração, em $t = t_0$, para:

(a) $\vec{r}(t) = 2 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j}, t_0 = \frac{\pi}{3}$

(b) $\vec{r}(t) = e^{-t} \vec{i} + e^t \vec{j}, t_0 = 0$

R: $a_T = 0, a_N = \sqrt{2}$

R: $a_T = 0, a_N = 2$

(c) $\vec{r}(t) = (t^3 - 2t) \vec{i} + (t^2 - 4) \vec{j}, t_0 = 1$

(d) $\vec{r}(t) = t \vec{i} + t^2 \vec{j} + t^3 \vec{k}, t_0 = 1$

R: $a_T = \frac{22}{\sqrt{14}}, a_N = \sqrt{\frac{38}{7}}$

R: $a_T = 2\sqrt{5}, a_N = 2\sqrt{5}$

[16] Dados $\vec{v} = 2 \vec{i} + 2 \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{a} = \vec{i} + 2 \vec{k}$ num certo ponto. Determine a_T, a_N, \vec{T} e \vec{N} neste instante.

R: $a_T = \frac{4}{3}$

$a_N = \frac{\sqrt{29}}{3}$

$\vec{T} = \frac{1}{3}(2 \vec{i} + 2 \vec{j} + \vec{k})$

$\vec{N} = \frac{\vec{i} - 8 \vec{j} + 14 \vec{k}}{3\sqrt{29}}$

[17] Calcule a componente tangencial da aceleração dado $\|\vec{v}\| = \sqrt{3t^2 + 4}, t = 2$.

R: $\frac{3}{2}$

[18] O acelerador do Laboratório Enrico Fermi é circular e possui um raio de 1 km. Ache a componente normal da aceleração de um próton movendo-se em torno do acelerador com uma velocidade de módulo constante e igual a $2,9 \times 10^5 \text{ km/s}$.

R: $8,41 \times 10^{10} \text{ km/s}^2$

Análise Vetorial : 4ª aulaCampos Vetoriais

Iniciaremos esta segunda parte da Análise Vetorial apresentando o conceito de campos vetoriais. Esta nomenclatura vem da Física, onde a palavra campo significa *ação à distância*.

Existem campos escalares e campos vetoriais. Os campos escalares são representados matematicamente por funções escalares das coordenadas espaciais, isto é, por funções da forma: $w=f(x,y,z)$. Dentre os campos escalares, podemos citar os campos de temperatura, de pressão, os potenciais gravitacional, elétrico e magnético.

Os campos vetoriais são representados matematicamente por funções vetoriais que associam um único vetor a cada ponto P do espaço bi ou tri-dimensional, isto é, por funções da forma:

$$\vec{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\vec{i} + g(x,y,z)\vec{j} + h(x,y,z)\vec{k} \quad (1)$$

Na Física, os campos podem, também, ser função do tempo. Podemos citar como exemplos: os campos de velocidade de um fluido $\vec{v}(x,y,z,t)$, o campo elétrico $\vec{E}(x,y,z,t)$ e o campo magnético $\vec{B}(x,y,z,t)$.

O campo vetorial \vec{F} mais simples é o campo vetorial que posiciona os pontos $P(x,y,z)$ do espaço 2-D ou 3-D, isto é :

$$\vec{r}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (2)$$

É importante não confundir esta função que representa todos os pontos do espaço com a função vetorial $\vec{r}(t)$ da primeira parte. Lá, as coordenadas $x(t), y(t), z(t)$ são funções do parâmetro t , de tal forma que $\vec{r}(t)$ representa uma curva C .

Como representar graficamente um campo vetorial?

Ou, como usar um sistema de coordenadas retangulares para representar campos vetoriais?

A resposta a esta pergunta é: Por um conjunto de vetores representativos desta função vetorial. É uma representação pictórica, pois o campo vetorial é formado por um número infinito de vetores.

Os exemplos que veremos a seguir são muito simples. Campos vetoriais em 3-D ou mesmo campos vetoriais em 2-D porém mais complexos só poderão ser visualizados com computação gráfica.

Exemplo 1 : Represente graficamente o campo vetorial dado por

$$\vec{F}(x,y) = \sqrt{y} \vec{i} , \quad y > 0$$

Na Mecânica dos Fluidos, este campo poderia ser um modelo para descrever o escoamento de um fluido ao longo de um cano. Sabemos que os modelos mais simples partem do chamado escoamento laminar, onde o campo de velocidades do fluido se distribui ao longo de lâminas, como o ilustrado acima.

Exemplo 2: Use um sistema de coordenadas retangulares para representar o seguinte campo vetorial:

$$\vec{F}(x,y) = x \vec{i} , \quad x > 0$$

Este poderia ser um modelo para um campo de velocidades em um túnel de vento, ou um campo de velocidades de um fluido em movimento em um canal que se estreita.

Exemplo 3: Represente em um sistema de coordenadas retangulares o campo

$$\vec{F}(x,y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$$

Observar que neste exemplo o campo vetorial se distribui tangencialmente a circunferências de raios crescentes. Na Física, estas circunferências constituem as chamadas linhas de força e campos desta natureza são chamados de campos de spin. Um exemplo é o campo magnético dado pela lei de Biot-Savart que descreve o campo magnético induzido por uma corrente elétrica que percorre um fio condutor.

Este tipo de campo serve também para descrever sistemas físicos em rotação. Para ilustrar, vamos lembrar o exemplo de um disco rígido girando no plano x,y , com uma velocidade angular $\vec{\omega} = (0,0,\omega_0)$, sendo z o eixo de rotação.

#Recordando a Mecânica de Rotação: A definição de velocidade linear de um corpo em rotação é

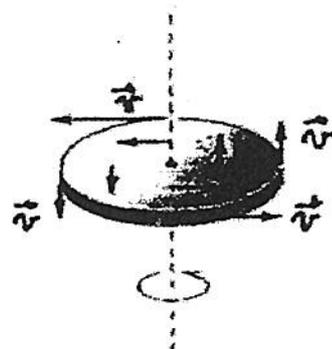
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

ou seja,

$$\vec{v} = \omega_0(-y\vec{i} + x\vec{j})$$

Observar que o campo entre parênteses é o campo de spin, representado no exemplo 3.

Da mesma forma, fluidos em movimento como um líquido derramado em um funil ou certos ciclones podem ser modelados por campos vetoriais do tipo campos de spin.



Campos inverso-do-quadrado: Lei da Gravitação Universal e Lei de Coulomb.

As duas leis físicas mencionadas acima são representadas matematicamente pelas funções:

$$|\vec{F}| = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \longrightarrow \text{Lei da Gravitação Universal,}$$

onde G é a constante de gravitação universal, m_1 e m_2 são as massas de dois corpos e $r = |\vec{r}|$ a distância entre eles.

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \longrightarrow \text{Lei de Coulomb}$$

onde ϵ_0 é a constante de permissividade elétrica no sistema SI, q_1 e q_2 são duas cargas elétricas e r a distância entre elas.

Os campos ditos "inverso do quadrado" sintetizam estas duas importantes leis da Física e podem ser expressos genericamente pelo campo \vec{F} , cujo módulo é : $|\vec{F}| = k \frac{1}{r^2}$.

Ou, na forma vetorial
$$\vec{F} = k \frac{1}{r^3} \vec{r} \quad , \quad (3)$$

onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e $r = |\vec{r}|$.

Introduzindo o versor $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$, podemos ainda escrever

$$\boxed{\vec{F} = k \frac{1}{r^2} \hat{r}} \quad (4)$$

O caráter vetorial deste campo, tanto na forma (3) como (4) o caracteriza com um campo radial.

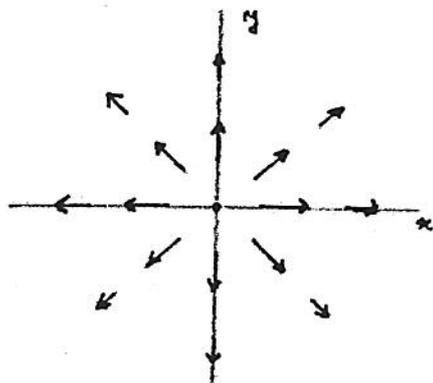
Observar que a notação acima, com \vec{F} em função de r é muito mais concisa, e será usada preferencialmente a :

$$\vec{F}(x, y, z) = k \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

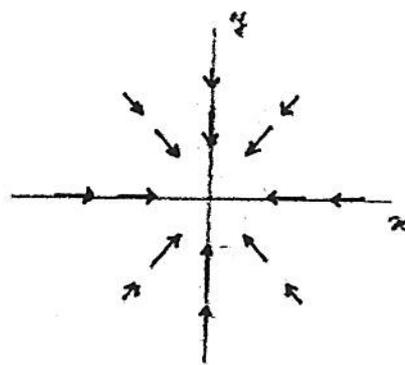
Se a constante k for tal que $k > 0$, o campo é dito um campo repulsivo ou de fonte.

Se a constante k for tal que $k < 0$, o campo é dito um campo atrativo ou de sumidouro.

A representação gráfica destes campos é:



$k > 0$



$k < 0$

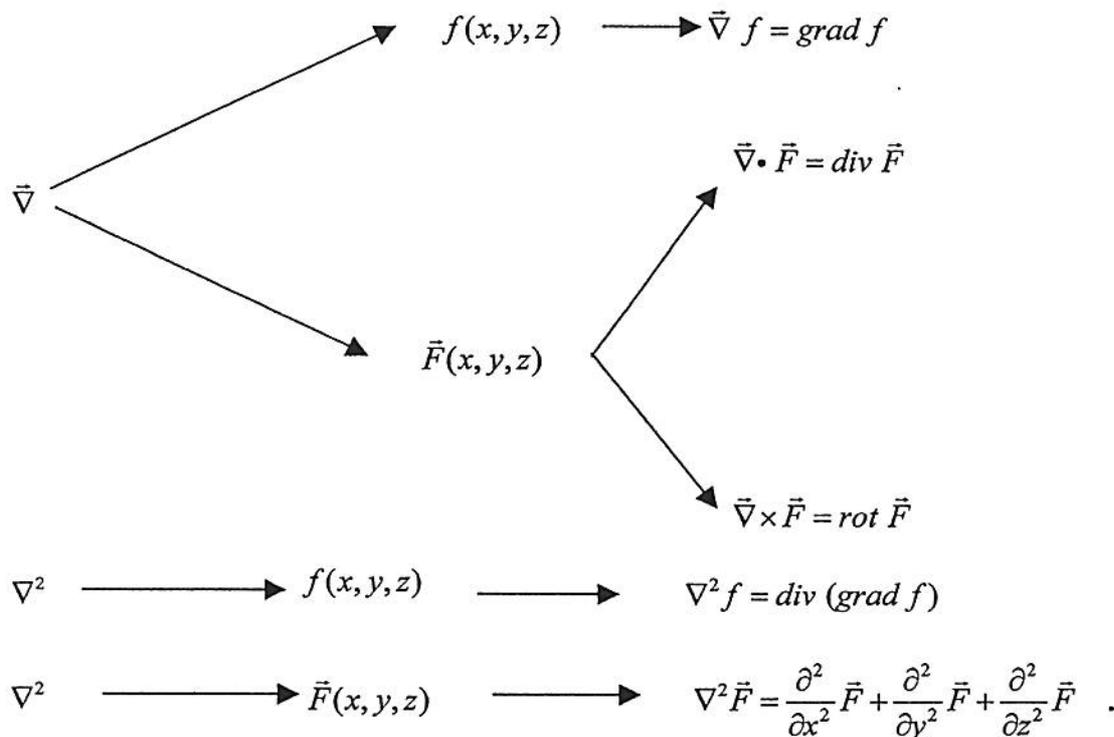
O operador vetorial del $\vec{\nabla}$: os conceitos de gradiente, divergente, rotacional e laplaciano .

No Cálculo, o operador por excelência é a derivada: $\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$.

Na Análise Vetorial, o operador por excelência é o operador vetorial, indicado pelo símbolo $\vec{\nabla}$ e definido por :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \tag{5}$$

Este operador pode ser aplicado tanto em campos escalares $f(x,y,z)$ como em campos vetoriais $\vec{F}(x,y,z)$. Em resumo:



DEFINIÇÕES:

a) Gradiente de um campo escalar $f(x, y, z)$:

$$\boxed{\vec{\nabla}f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}} \quad (6)$$

Observar que o gradiente de um campo escalar é um campo vetorial.

b) Divergente de um campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = f \vec{i} + g \vec{j} + h \vec{k}$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (f \vec{i} + g \vec{j} + h \vec{k})$$

Ou, ainda,

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}} \quad (7)$$

Observar que o divergente de um campo vetorial é um campo escalar.

c) Rotacional de um campo vetorial $\vec{F}(x, y, z)$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Mas esta não é uma definição fácil de ser memorizada. Por isso, usa-se um recurso mnemônico que consiste em interpretar o rotacional como o 'produto vetorial' entre o operador vetorial del e o campo \vec{F} . Então, como na Álgebra dos Vetores, representa-se o produto vetorial como um determinante, onde a 1ª fila é formada pelos vetores unitários $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, a 2ª fila pelas componentes do 'vetor del ' e a 3ª fila pelas componentes do vetor \vec{F} . Ao se calcular este determinante, pela regra de Sarrus, produtos da forma $\frac{\partial}{\partial y} h$ devem ser interpretados como a derivada de h com relação a y . Assim,

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix}} \quad (7)$$

d) Laplaciano de um campo escalar $f(x,y,z)$:

$$\nabla^2 f = \text{div}(\text{grad } f) = \nabla \cdot \nabla f \quad \text{ou}$$

$$\nabla^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (9)$$

O operador ∇^2 pode ser aplicado também a um campo vetorial, gerando o campo vetorial dado por:

$$\nabla^2 \vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial z^2} \quad (10)$$

Importante: Observe como a notação *operacional* desempenha um importante papel na correta maneira de expressar os entes matemáticos acima definidos. Assim, por exemplo, ao calcular o divergente e rotacional de um campo vetorial \vec{F} , associamos o respectivo produto escalar e vetorial entre o operador del e o campo \vec{F} .

Exemplo 4: Dado o campo escalar $f(x,y)=x+y$, encontre o campo vetorial que é o gradiente de $f(x,y)$ e faça seu gráfico.

Exemplo 5: Calcule o divergente e o rotacional do campo vetorial dado por $\vec{F}(x,y,z)=x^2y\vec{i} + 2y^3z\vec{j} + 3z\vec{k}$.

Exemplo 6: Dados os campos $f=xyz$, $\vec{F}=-y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$ e $\vec{G}=3xyz^2\vec{i} + 2xy^3\vec{j} - x^2yz\vec{k}$, determine $(\vec{F} \cdot \nabla)f$ e $(\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G}$ em $(1,1,1)$.

Análise vetorial : 5ª aula**Tabela de Fórmulas envolvendo o Operador $\vec{\nabla}$:**

Você está recebendo uma tabela que vai lhe prestar um grande serviço, não só aqui nesta disciplina mas também nas disciplinas mais avançadas de seu curso. Portanto, use-a aqui e guarde-a para o futuro.

Esta tabela será usada como material de consulta no dia da 1ª prova: é fundamental não acrescentar nenhuma anotação a seu conteúdo.

Assim sendo, é preciso entendê-la e saber que tipo de informação ela contém.

Sua notação é a seguinte: as letras maiúsculas \vec{F} e \vec{G} indicam campos vetoriais diferenciáveis e as letras minúsculas f e g campos escalares diferenciáveis. A fim de não confundir f e g com as componentes escalares dos campos \vec{F} e \vec{G} , usaremos aqui a seguinte notação :

$$\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\vec{i} + F_2(x, y, z)\vec{j} + F_3(x, y, z)\vec{k}$$

$$\vec{G}(x, y, z) = G_1(x, y, z)\vec{i} + G_2(x, y, z)\vec{j} + G_3(x, y, z)\vec{k}$$

As fórmulas (1), (2), (3) da Tabela tratam respectivamente do gradiente, divergente e rotacional da soma de duas funções. Observar que estas fórmulas vêm acompanhadas de uma outra possibilidade de notação .

A demonstração destas fórmulas é evidente se lembrarmos que o operador del é um operador diferencial da forma :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

e que a derivação é uma operação linear : a derivada de uma soma é a soma das derivadas.

As fórmulas TAB(4), (5), (6) tratam respectivamente do gradiente, do divergente e rotacional do produto de duas funções. A fórmula (4) é facilmente demonstrável a partir da regra de derivada de um produto de funções escalares.

Já a demonstração das fórmulas (5) e (6) é mais elaborada, pois entra em jogo os conceitos de produto escalar e vetorial envolvendo o operador $\vec{\nabla}$.

Vamos então, apresentar uma demonstração rápida para estas duas fórmulas.

Dedução da TAB(5) .

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (f\vec{F}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left(fE_1 \vec{i} + fE_2 \vec{j} + fE_3 \vec{k} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (fE_1) + \frac{\partial}{\partial y} (fE_2) + \frac{\partial}{\partial z} (fE_3) = \\ &= f \left(\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) E_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) E_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) E_3 = \\ &= f (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) + \vec{\nabla} f \cdot \vec{F}\end{aligned}$$

Dedução da Tab(6) .

Para simplificar, faremos a demonstração apenas para a componente x. Isto é,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (f\vec{F}) \Big|_{\text{comp } x} &= \vec{\nabla} f \times \vec{F} \Big|_{\text{comp } x} + f(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \Big|_{\text{comp } x} \\ \Downarrow & \qquad \qquad \qquad \Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ fE_1 & fE_2 & fE_3 \end{vmatrix}_x &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{vmatrix}_x + f \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{vmatrix}_x\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} (fE_3) - \frac{\partial}{\partial z} (fE_2) \right) \vec{i} = \left(E_3 \frac{\partial f}{\partial y} - E_2 \frac{\partial f}{\partial z} \right) \vec{i} + f \left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z} \right) \vec{i}$$

Usando a regra da derivada de um produto de funções, no lado esquerdo desta expressão, obtemos uma identidade. Isto é : verificamos que a componente x do rotf \vec{F} satisfaz a Tab(6).

Procedendo de forma análoga para as demais componentes, teremos verificado a fórmula Tab(6).

Continuando pela tabela, chegamos à fórmula (7). Esta, apenas contém a definição do chamado operador Laplaciano ∇^2 .

O Laplaciano é o divergente do gradiente de f , isto é:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f = \nabla^2 f\end{aligned}$$

As fórmulas Tab(8) e Tab(9) afirmam, respectivamente, que o rotacional dos campos gradiente e o divergente dos campos rotacionais são nulos. Estas expressões contêm grande significado físico, como veremos mais adiante. Dedução da Tab(8):

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \vec{k} = \vec{0}$$

onde, por hipótese, f possui derivadas parciais de 2ª ordem contínuas, isto é, as derivadas 'cruzadas' se cancelam aos pares.

Dedução da Tab(9):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left(\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \vec{k} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} = 0 \end{aligned}$$

onde, \vec{F} possui derivadas de 2ª ordem contínuas.

As fórmulas Tab(10) a Tab(13) não serão demonstradas aqui, pois suas demonstrações são muito longas. Contudo, a despeito da mão de obra, segue-se o mesmo tipo de procedimento usado para demonstrar as anteriores. Interessados poderão consultar o livro *Análise Vetorial* da coleção Schaum.

Veremos, agora, alguns exemplos de uso da tabela do operador $\vec{\nabla}$.

Exemplo 7: Mostre que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g) = 0$

Exemplo 8: Simplifique a expressão

$$\vec{\nabla} \times (\vec{F} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}) + \vec{F} \times [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})] + \vec{F} \times \nabla^2 \vec{F}$$

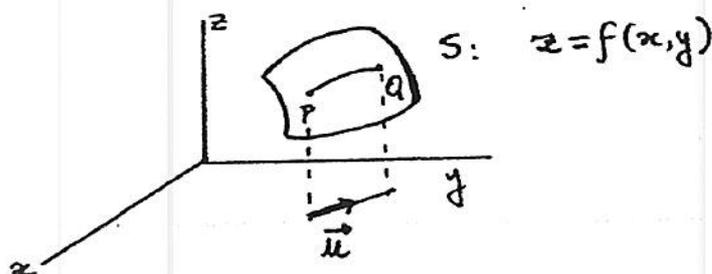
Exemplo 9: Verifique a Tab(10) para $\vec{F} = x^2y\vec{i} + xyz\vec{j} + z^2y\vec{k}$.

O gradiente de um campo escalar : seu significado, suas aplicações.

O gradiente na Matemática -

O conceito de gradiente foi apresentado no Cálculo II, no capítulo das derivadas parciais de uma função de duas ou mais variáveis, mais especificamente, na definição de derivada direcional de uma função da forma $z = f(x, y)$.

#Recordando Cálculo II: Seja S a superfície representada por $z = f(x, y)$ e seja \vec{u} um vetor unitário dado por $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$.



Define-se a derivada direcional de $f(x, y)$ na direção \vec{u} por :

$$D_{\vec{u}}f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} u_2$$

Ou na forma de um produto escalar como :

$$D_{\vec{u}}f(x, y) = \vec{\nabla}f \cdot \vec{u}$$

O 1º vetor no produto escalar é chamado de gradiente de f e denotado pelo símbolo $\vec{\nabla}f$.

Esta definição foi apresentada em duas dimensões, mas pode ser generalizada para três dimensões. Neste caso, a função w será uma função de três variáveis, isto é, $w = f(x, y, z)$, a qual não poderá ser graficamente representada em um sistema de coordenadas retangulares.

Importantes conclusões podem ser tiradas da definição de derivada direcional como o produto escalar entre o gradiente de f e um vetor unitário. Vejamos :

1º) Se o ângulo θ entre os vetores $\vec{\nabla}f$ e \vec{u} é zero, então a derivada direcional será máxima, e será igual ao módulo do gradiente, isto é

$$D_{\vec{u}}f(x, y) = |\vec{\nabla}f| |\vec{u}| \cos 0^\circ \quad \therefore \quad D_{\vec{u}}f(x, y)|_{\text{máx}} = |\vec{\nabla}f|$$

2°) Se o ângulo θ entre os vetores $\vec{\nabla}f$ e \vec{u} for 180° , então a derivada direcional terá seu valor mínimo e será igual a menos o módulo do gradiente, isto é :

$$D_{\vec{u}}f(x, y) = |\vec{\nabla}f| |\vec{u}| \cos 180^\circ \quad \therefore \quad D_{\vec{u}}f(x, y)|_{\min} = -|\vec{\nabla}f|$$

3°) Se $f(x, y)$ for uma curva de nível dada por $f(x, y) = k$, e \vec{u} um vetor tangente à curva de nível, então a derivada direcional será nula. Isto é, $\vec{\nabla}f \cdot \vec{u} = 0$, logo $\vec{\nabla}f$ será perpendicular a \vec{u} , e portanto normal à curva de nível $f(x, y) = k$.

Se a função f for $w = f(x, y, z)$, então no lugar de curvas de nível teremos superfícies de nível $f(x, y, z) = k$.

Resumindo :

$\vec{\nabla}f$ aponta na direção em que f cresce mais rapidamente.
 $|\vec{\nabla}f|$ dá o máximo valor da taxa de variação da função f .
 $-|\vec{\nabla}f|$ dá o mínimo valor da taxa de variação da função f .
 $\vec{\nabla}f$ representa um vetor normal às curvas de nível ou às superfícies de nível.

Exemplo 10 : A temperatura de um ponto $P(x, y)$ de uma placa metálica é :

$$T(x, y) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$$

a) Encontre a taxa de variação da temperatura em $(1, 1)$ na direção do vetor $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

b) Uma formiga em $(1, 1)$ deseja se deslocar na direção em que a temperatura cai mais rapidamente. Encontre o vetor unitário nesta direção.

Exemplo 11 : Em uma certa montanha, a elevação z acima do ponto $P(x,y)$ localizado em um plano horizontal que está ao nível do mar é :

$$z=2000-2x^2-4y^2 \quad (\text{m})$$

O eixo x aponta na direção leste e o eixo y na direção norte. Um alpinista se encontra em $(-20,5,1100)$.

a) Calcule a direção em que a função z cresce mais rapidamente a partir de $(-20,5)$.

b) Se o alpinista usa uma bússola e decide seguir a direção nordeste, estará ele começando a subir ou a descer ? E com que taxa ?

O gradiente na Física .

O conceito de gradiente na Física está estreitamente relacionado aos conceitos de campo conservativo e de função potencial, de tal forma que também na Matemática se define campo vetorial conservativo.

Na Física campos conservativos são campos que conservam a energia do sistema, isto é, campos onde não há dissipação de energia quer por atrito quer por efeito Joule.

Há uma diferença de sinal entre as duas definições que será comentada posteriormente.

Definição : A função vetorial \vec{F} é um campo vetorial conservativo se existe uma função escalar ϕ , chamada função potencial, tal que

$$\boxed{\vec{F}_{\text{cons}} = -\vec{\nabla}\phi} \quad (9)$$

Assim, dada uma função potencial $\varphi(x, y, z)$ ou uma função potencial do tipo $\varphi(r)$, basta calcular o gradiente para encontrar o campo vetorial conservativo associado a φ .

Se φ é uma função explícita de x, y, z então

$$\vec{E}_{\text{cons}}(x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$$

Se φ é uma função implícita de x, y, z através de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, isto é, $\varphi(r) = \varphi(r(x, y, z))$ então é necessário usar a regra da cadeia para calcular o gradiente de φ . Potenciais desta forma são ditos potenciais centrais.

Cálculo do gradiente de potenciais centrais :

Usando a regra da cadeia para cada uma das derivadas parciais que compõem o gradiente temos :

$$\frac{\partial \varphi(r)}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \varphi'(r) \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \varphi'(r) \left[\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} 2x \right]$$

Lembrando que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, podemos simplificar a expressão acima e escrever

$$\frac{\partial \varphi(r)}{\partial x} = \frac{\varphi'(r)}{r} x$$

De maneira análoga podemos expressar as demais componentes do gradiente de φ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\varphi'(r)}{r} y \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\varphi'(r)}{r} z$$

Somando estas três derivadas temos finalmente o $\text{grad}\varphi(r)$:

$$\vec{\nabla} \varphi(r) = \frac{\varphi'(r)}{r} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \quad \text{ou}$$

$$\vec{\nabla} \varphi(r) = \varphi'(r) \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{ou ainda}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \varphi(r) = \varphi'(r) \hat{r}} \quad (10)$$

Muitos modelos de potenciais físicos são centrais, e esta última fórmula acima nos fornece o campo gradiente com apenas uma derivação. Assim, sempre que você estiver diante de um

potencial central dê preferência a esta fórmula simples que é fácil de ser memorizada se você associar o operador del com a derivada na direção radial.

Só para ilustrar, é interessante saber que muitos potenciais na teoria eletromagnética são expansões de potências de r do tipo :

$$\varphi(r) = r^n$$

De tal forma que : $\vec{\nabla}\varphi(r) = nr^{n-1} \hat{r}$

Observar que se usou a 'velha' regra de derivada de potência acrescida de caráter vetorial.

Exemplo 12 : Calcule o campo conservativo associado ao potencial central

$$\varphi(r) = -k \frac{1}{r}$$

Onde mais aparece o gradiente de campos escalares ?

Há três leis empíricas conhecidas como Lei de Fick, Lei de Fourier e Lei de Ohm que se expressam em termos de campos gradiente. Estas leis, como veremos, guardam uma certa analogia entre si, pois regem os chamados 'fenômenos de transporte' da Física . A Lei de Fick rege o transporte de massa , a Lei de Fourier o de calor e a Lei de Ohm o de carga. Vejamos como se expressam :

$$\vec{J}(x, y, z, t) = - D \vec{\nabla} \rho(x, y, z, t)$$

$$\vec{q}(x, y, z, t) = - \kappa \vec{\nabla} T(x, y, z, t)$$

$$\vec{J}(x, y, z, t) = - \sigma \vec{\nabla} \varphi(x, y, z, t)$$

Observe que as três leis relacionam um campo vetorial com o gradiente de um campo escalar.

A 1ª é a Lei de Fick que rege a difusão de substâncias em meios contínuos, tal como a difusão da fumaça no ar, a difusão de neutrons, ou a difusão nos processos químicos .

A função vetorial indicada por \vec{J} é chamada de *densidade de corrente*. \vec{J} é um vetor na direção do escoamento e de módulo igual à quantidade de substância que atravessa uma unidade de área normal à direção do escoamento, na unidade de tempo. Sua definição matemática é :

$$\vec{J} = \rho \vec{v} \quad \text{onde}$$

$\rho = \rho(x, y, z, t)$ é o campo escalar que descreve a densidade do fluido e $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$ o campo vetorial que representa a velocidade do fluido.

A constante D , é a chamada constante de difusão e depende do meio.

A 2ª expressão é a chamada Lei de Fourier e rege a condução térmica. A função vetorial indicada por \vec{q} é chamada de *densidade de corrente de calor* e é definida por :

$$\vec{q} = \frac{Q}{V} \vec{v} \quad \text{onde}$$

Q é a quantidade de calor, V o volume e \vec{v} a velocidade de escoamento do calor. Todas estas grandezas são funções das coordenadas espaciais e do tempo. A constante κ é a condutividade térmica do meio.

A 3ª expressão traduz a Lei de Ohm , sendo \vec{J} a *densidade de corrente elétrica*, σ a condutividade elétrica e ϕ o potencial elétrico. A definição da função vetorial \vec{J} é análoga à definição de densidade de corrente usada na Lei de Fick, apenas aqui em vez de transporte de massa temos transporte de carga.

Estas leis , juntamente com a equação da continuidade, nos permitem deduzir as equações diferenciais da difusão, do calor e, no caso de escoamento estacionário, a equação de Laplace . A equação da continuidade será deduzida na aula seguinte, ao estudarmos o significado do divergente de um campo vetorial.

MATEMÁTICA APLICADA II

ÁREA I: ANÁLISE VETORIAL

Fórmulas Envolvendo o Operador $\vec{\nabla}$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F} = \vec{F}(x, y, z) \\ \vec{G} = \vec{G}(x, y, z) \end{array} \right\} \text{Funções vetoriais diferenciáveis}$$

$$\left. \begin{array}{l} f = f(x, y, z) \\ g = g(x, y, z) \end{array} \right\} \text{Funções escalares diferenciáveis}$$

$$1. \vec{\nabla}(f + g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g \quad \text{ou} \quad \text{grad}(f + g) = \text{grad}f + \text{grad}g$$

$$2. \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G} \quad \text{ou} \quad \text{div}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{div}\vec{F} + \text{div}\vec{G}$$

$$3. \vec{\nabla} \times (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G} \quad \text{ou} \quad \text{rot}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{rot}\vec{F} + \text{rot}\vec{G}$$

$$4. \vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$$

$$5. \vec{\nabla} \cdot (f\vec{F}) = (\vec{\nabla}f) \cdot \vec{F} + f(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$$

$$6. \vec{\nabla} \times (f\vec{F}) = (\vec{\nabla}f) \times \vec{F} + f(\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

$$7. \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}f) = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

$$\text{onde } \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ (Operador Laplaciano)}$$

$$8. \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}f) = \vec{0}$$

$$9. \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$$

$$10. \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$$

$$11. \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G})$$

$$12. \vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} - \vec{G}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} + \vec{F}(\vec{\nabla} \cdot \vec{G})$$

$$13. \vec{\nabla}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} + (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) + \vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G})$$

MATEMÁTICA APLICADA II ~ ÁREA I ~ 3ª Lista de Exercícios

Campos Vetoriais, Gradiente, Divergente, Rotacional e Laplaciano

- 1) Faça um esboço dos campos vetoriais \vec{F} . Procure representar os vetores com as respectivas proporções: a) $\vec{F}(x,y) = 2\vec{i} - \vec{j}$; b) $\vec{F}(x,y) = y\vec{i} - x\vec{j}$;
 c) $\vec{F}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x\vec{i} + y\vec{j})$ (Observe que cada vetor neste campo é um vetor unitário na direção de \vec{r}).

2) Calcule o $\text{div}\vec{F}$ e o $\text{rot}\vec{F}$ de:

a) $\vec{F} = x^2\vec{i} - 2\vec{j} + yz\vec{k}$	b) $\vec{F} = e^{xy}\vec{i} - \cos y\vec{j} + \sin^2 z\vec{k}$
R: a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2x + y, \vec{\nabla} \times \vec{F} = z\vec{i}$	R: b) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = ye^{xy} + \sin y + \sin 2z, \vec{\nabla} \times \vec{F} = -x e^{xy}$

- 3) Mostre que se $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, onde a, b e c são constantes, e $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, então:
 a) $\text{div}(\vec{u} \times \vec{r}) = 0$; b) $\text{rot}(\vec{u} \times \vec{r}) = 2\vec{u}$

4) Dado $f = 2xz^4 - x^2y$, calcule $\vec{\nabla}f$ e $|\vec{\nabla}f|$ no ponto $P(2, -2, 1)$.

R: $\vec{\nabla}f = 10\vec{i} - 4\vec{j} + 16\vec{k}, |\vec{\nabla}f| = 2\sqrt{93}$.

5) Dado $\vec{F} = 2x^2\vec{i} - 3yz\vec{j} + xz^2\vec{k}$ e $f = 2z - x^3y$, calcule $\vec{F} \cdot \vec{\nabla}f$ e $\vec{F} \times \vec{\nabla}f$ no ponto $P(1, -1, 1)$.

R: $\vec{F} \cdot \vec{\nabla}f = 5, \vec{F} \times \vec{\nabla}f = 7\vec{i} - \vec{j} - 11\vec{k}$

6) Escreva para aprender : Qual o significado que pode ser dado a $(\vec{F} \times \vec{\nabla})f$ e $(\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G}$, sendo \vec{F} e \vec{G} campos vetoriais e f um campo escalar ?

7) Mostre que: $(\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} = \vec{F}$, onde $\vec{F} = f(x,y,z)\vec{i} + g(x,y,z)\vec{j} + h(x,y,z)\vec{k}$.

8) Mostre que $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3, \vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{0}$, e $\vec{\nabla}r = \frac{1}{r}\vec{r} = \hat{r}$, sendo $\vec{r}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

9) Dada a função escalar $f(r)$ onde $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, use a regra da cadeia para mostrar que $\vec{\nabla}f(r) = \frac{f'(r)}{r}\vec{r} = f'(r)\hat{r}$.

Aplice esta fórmula para mostrar que: $\vec{\nabla}r^n = nr^{n-2}\vec{r}$.

10) Use os resultados do exercício (9) para calcular $\vec{\nabla} f(r)$ para:

a) $f(r) = r^3$	b) $f(r) = \ln r$	c) $f(r) = r^2 e^{-r}$
R: a) $3r \vec{r}$	R: b) $\frac{\vec{r}}{r^2}$	R: c) $(2-r) e^{-r} \vec{r}$

11) Use, nesta ordem, 1º a definição de laplaciano de uma função escalar, 2º o resultado do exercício 9 e 3º a tabela de fórmulas do operador $\vec{\nabla}$ para mostrar que:

$$\vec{\nabla}^2 f(r) = 2 \frac{f'(r)}{r} + f''(r)$$

Utilize este resultado para mostrar :

a) $\vec{\nabla}^2 \ln r = \frac{1}{r^2}$	b) $\vec{\nabla}^2 r^n = n(n+1) r^{n-2}$
c) $\vec{\nabla}^2 \ln r^2 = \frac{2}{r^2}$	d) $\vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = 0$

12) Prove que:

$$\vec{\nabla}^2 (f g) = f \vec{\nabla}^2 g + 2 \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g + g \vec{\nabla}^2 f$$

13) *Escreva para aprender* : Como você faz a leitura das expressões abaixo ?

a) $\vec{F} \cdot \vec{\nabla} f$ b) $\vec{F} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{G}$ c) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G})$ d) $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f$
 e) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$ f) $(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{G}$ g) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F})$ h) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f)$

14) Use a Tabela do operador del para mostrar que :

a) $(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F} = \frac{1}{2} \nabla (\vec{F} \cdot \vec{F}) - \vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$

b) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{r}) = \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F})$

15) *Escreva para aprender* : Como você lê a fórmula (10) da Tabela do operador del ?

Análise vetorial : 6ª aulaO divergente de um campo vetorial: seu significado, suas aplicações.

O conceito de divergente surgiu na Mecânica dos Fluidos.

Quando mencionamos fluidos estamos querendo dizer gases, líquidos e vapores.

Os fluidos compressíveis são fluidos cuja densidade ρ varia no espaço e no tempo, isto é, $\rho = \rho(x, y, z, t)$. Os fluidos incompressíveis são aqueles para os quais a densidade é uma constante, isto é $\rho = \rho_0$. Os líquidos em geral são fluidos de baixa compressibilidade, para eles $\rho \cong \rho_0$.

Nosso objetivo é seguir os passos que nos levam ao significado de divergente, tal como ele surgiu no estudo do escoamento de um fluido. Chegaremos a uma importante equação, chamada equação da continuidade, que expressa mais uma lei de conservação da Física, a conservação de massa. Veremos, também, que o conceito de divergente e a equação da continuidade podem ser aplicados a outras áreas da Física que não apenas à Mecânica dos Fluidos. Uma das mais importantes aplicações é no Eletromagnetismo, onde a lei de conservação que a equação da continuidade expressa é a de carga.

Antes de deduzir a equação da continuidade, convém explicar que estamos usando a expressão escoamento de um fluido, em lugar de fluxo de um fluido, para reservar esta última para a grandeza física chamada *fluxo de um campo através de uma superfície*, que será vista na 9ª aula.

Dedução da equação da continuidade:

Vamos considerar o movimento de um fluido em uma região do espaço, onde por hipótese não há fontes nem sumidouros. Por fontes, estamos querendo dizer regiões onde há emissão ou criação de partículas e por sumidouros, regiões onde há absorção ou destruição de partículas.

Vamos imaginar o escoamento do fluido através uma caixa elementar de volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$, em um sistema de coordenadas retangulares.

Seja $\vec{v}(x, y, z, t)$ a função vetorial que representa o vetor velocidade do fluido em movimento, isto é

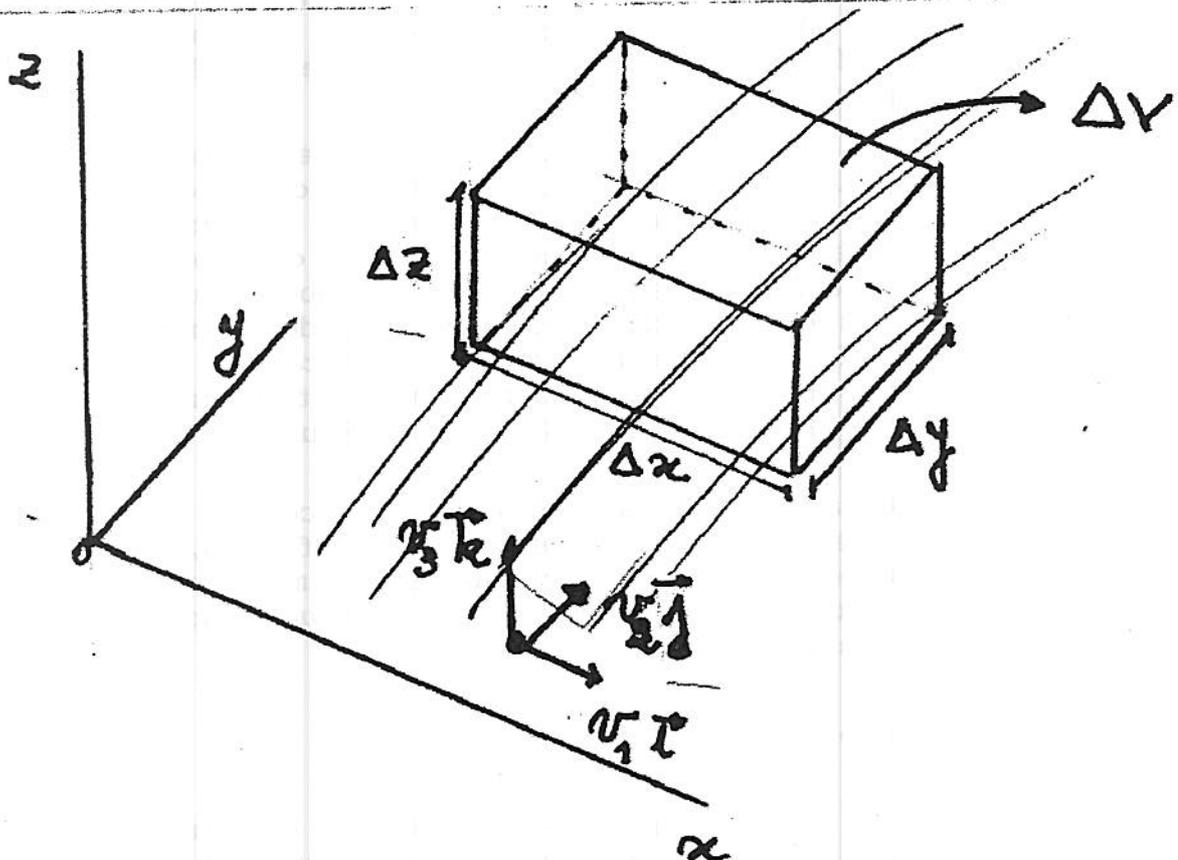
$$\vec{v}(x, y, z, t) = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$$

E seja $\vec{J} = \rho \vec{v}$, a função vetorial que define a densidade de corrente. Consequentemente,

$$\vec{J}(x, y, z, t) = J_1 \vec{i} + J_2 \vec{j} + J_3 \vec{k}$$

A densidade de corrente, como vimos no final da 5ª aula, tem a dimensão de massa por unidade de área, por unidade de tempo.

Vamos posicionar a caixa elementar de volume ΔV em um referencial de coordenadas retangulares, conforme ilustrado abaixo.



Vamos calcular a vazão através deste volume elementar, ou seja a massa que sai menos a massa que entra em ΔV na unidade de tempo. Faremos este cálculo para cada par de faces da caixa, ou seja, é como se dividíssemos a vazão em três partes: a vazão através da face frontal e posterior cuja área é $\Delta x \Delta z$, a vazão através da face superior e inferior, cuja área é $\Delta x \Delta y$ e a vazão através das faces laterais de área $\Delta y \Delta z$.

Esta simplificação é possível, porque, quando estamos estudando a vazão nas faces, por exemplo de área $\Delta x \Delta z$, as componentes v_1 e v_3 de \vec{v} são paralelas a esta face e não contribuem ao escoamento.

Assim, para cada par de faces, vamos escrever a vazão, ou seja a massa que sai menos a massa que entra durante um intervalo de tempo Δt .

1º) Faces de área $\Delta x \Delta z$:

$$[J_2(x, y + \Delta y, z, t) - J_2(x, y, z, t)] \Delta x \Delta z = \Delta J_2 \Delta x \Delta z = \frac{\Delta J_2}{\Delta y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Ou seja a contribuição das faces frontal e posterior à vazão total é $\frac{\Delta J_2}{\Delta y} \Delta V$.

2º) Faces de área $\Delta x \Delta y$:

$$[\bar{J}_3(x, y, z + \Delta z, t) - \bar{J}_3(x, y, z, t)] \Delta x \Delta y = \Delta \bar{J}_3 \Delta x \Delta y = \frac{\Delta J_3}{\Delta z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Ou seja a contribuição das faces inferior e superior à vazão total é $\frac{\Delta J_3}{\Delta z} \Delta V$.

3º) Faces de área $\Delta y \Delta z$:

De maneira análoga, a contribuição das faces laterais à vazão total é $\frac{\Delta J_1}{\Delta x} \Delta V$.

Somando estas três expressões, teremos a perda de massa em ΔV por unidade de tempo. Como, por hipótese, não há fontes nem sumidouros na caixa de volume elementar então a perda de massa só poderá ser causada pela taxa de variação temporal da densidade, isto é :

$$\left[\frac{\Delta J_1}{\Delta x} + \frac{\Delta J_2}{\Delta y} + \frac{\Delta J_3}{\Delta z} \right] \Delta V = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta V$$

Tomando o limite $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ nesta expressão, temos :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta J_1}{\Delta x} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta J_2}{\Delta y} + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta J_3}{\Delta z} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad , \quad \text{ou}$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial x} + \frac{\partial J_2}{\partial y} + \frac{\partial J_3}{\partial z} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad , \quad \text{ou ainda}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad (11)$$

Esta equação é chamada equação da continuidade e expressa a lei de conservação de massa.

A equação da continuidade foi aqui demonstrada para transporte de massa. Contudo ela se aplica também para o transporte de calor e carga. No caso de transporte de carga devemos fazer a seguinte leitura:

ρ = densidade de carga elétrica

\vec{v} = vetor velocidade das cargas

$\vec{J} = \rho \vec{v}$ = densidade de corrente elétrica .

\vec{J} tem a dimensão de corrente elétrica por unidade de área.

Comentamos na 5ª aula as leis que regem a difusão de partículas em um meio contínuo (Lei de Fick), a lei que rege a condução de calor (Lei de Fourier) e a lei que rege o transporte de carga (Lei de Ohm).

Estas leis quando associadas com a equação da continuidade levam a equações diferenciais de mesma natureza conhecidas como equação da difusão, equação do calor e, no caso de corrente estacionária, à equação de Laplace:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -D \vec{\nabla}^2 \rho = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \therefore \vec{\nabla}^2 \rho = \frac{1}{D} \frac{\partial \rho}{\partial t} \longrightarrow \text{Equação da difusão}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = -k \vec{\nabla}^2 T = -\frac{\partial T}{\partial t} \quad \therefore \vec{\nabla}^2 T = \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \longrightarrow \text{Equação do calor}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\sigma \vec{\nabla}^2 \phi = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \therefore \vec{\nabla}^2 \phi = 0 \longrightarrow \text{Equação de Laplace}$$

Regime estacionário ou permanente:

Entende-se por regime estacionário (steady-state, em inglês) o escoamento de um fluido cuja densidade não depende explicitamente do tempo, isto é

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

Neste caso a equação da continuidade se reduz a :

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0} \quad (13)$$

No caso de fluidos incompressíveis (como os líquidos) a densidade ρ é uma constante ρ_0 , e a equação da continuidade do regime estacionário se reduz a :

$$\vec{\nabla} \cdot \rho_0 \vec{v} = \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

Logo

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0}$$

(14)

Esta última forma da equação da continuidade é conhecida como *condição de incompressibilidade* dos fluidos em regime estacionário e o campo de velocidades \vec{v} é dito *solenoidal*.

Assim, na Mecânica dos Fluidos em regime estacionário teremos $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ para fluidos gasosos e vapores, e $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ para líquidos de densidade constante.

Todas as conclusões acima são válidas desde que o escoamento do fluido se dê em uma região livre de fontes ou sumidouros de partículas.

Cabe a pergunta : O que acontece se, no regime estacionário, houver fontes ou sumidouros ? Neste caso a equação da continuidade ficará

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \neq 0$$

Se $\nabla \cdot \vec{J} > 0$ \longrightarrow haverá fontes.

Se $\nabla \cdot \vec{J} < 0$ \longrightarrow haverá sumidouros.

Exemplo 13 : Verifique se está livre de fontes e sumidouros o campo \vec{J} dado por

$$\vec{J} = (x^3 - x) \vec{i} + (y^3 - y) \vec{j} + (z^3 - z) \vec{k}$$

Rotacional de um campo vetorial : seu significado, suas aplicações.

Já foi visto uma representação gráfica de um campo vetorial que dá idéia de giro, de rotação. Todos estão lembrados do campo de spin dado por

$$\vec{F}(x,y) = -y\vec{i} + x\vec{j} \quad .$$

Mostramos que este campo poderia ser uma representação do campo de velocidades \vec{v} das partículas de um disco rígido em rotação no plano xy com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega_0 \vec{k}$.

Calculamos o campo de velocidade e encontramos

$$\vec{v}(x,y) = \omega_0(-y\vec{i} + x\vec{j}) \quad .$$

Vamos agora calcular o rotacional deste campo de spin, isto é:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \omega_0 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{\omega} \quad .$$

Assim, $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 2\vec{\omega}$ ou $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{v}$.

Campos vetoriais cujo rotacional é diferente de zero são ditos campos de vórtice (vortex, em latim). Assim, o campo de velocidades de um corpo em rotação é um campo de vórtice e no exemplo acima o $\text{rot } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v}$ dá duas vezes a velocidade angular $\vec{\omega}$. Como se vê, o rotacional de um campo 'medirá' a capacidade de giro deste campo.

Agora é o momento de entender o significado físico da fórmula Tab(8):

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \text{rot}(\text{grad } f) = \vec{0} .$$

Vimos que campos conservativos são campos gradientes, isto é, $\vec{F}_{\text{cons}} = \vec{\nabla} \phi$. Assim, o que a Tab(8) está nos dizendo é que os campos conservativos são campos irrotacionais.

Conhecemos os campos conservativos dados pela Lei da Gravitação Universal e pela Lei de Coulomb. Estes são, pois, campos irrotacionais, ou em outras palavras nada girará sob a ação exclusiva destes campos.

Aplicação dos Conceitos de Gradiente, Divergente e Rotacional

[1] Mostre que se \vec{F} é um campo vetorial conservativo, então $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$.

[2] Dado o campo vetorial regido pela lei inverso do quadrado $\vec{F} = k \frac{1}{r^3} \vec{r}$, sem usar coordenadas cartesianas, mostre que:

(a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$, $|\vec{r}| \neq 0$.

(b) $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$.

(c) $\varphi(r) = -\frac{k}{r}$ é a função potencial associada ao campo $\vec{F} = k \frac{1}{r^3} \vec{r}$.

[3] Uma partícula de massa m e velocidade \vec{v} é atraída para a origem por uma força central dada por $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$. Mostre que o momentum angular $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ é constante, isto é $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$.

[4] Use a equação da continuidade para mostrar que para um fluido incompressível e em estado estacionário o campo de velocidade \vec{v} é tal que $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$.

[5] O escoamento de um fluido incompressível e estacionário é regido pelo campo vetorial \vec{v} . Verifique em cada caso, se há fontes ou sumidouros em alguma região do espaço:

(a) $\vec{v} = (x + y)\vec{i} - xz^3\vec{j} + x^2\text{sen}y\vec{k}$ (b) $\vec{v} = xy\vec{i} - xy\vec{j} + y^2\vec{k}$

(c) $\vec{v} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$

[6] Supondo que um fluido gira como um corpo rígido com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega_0\vec{k}$

mostre que $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$.

[7] Em cada caso é dada a velocidade \vec{v} do movimento estacionário de um fluido. Encontre $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ e diga se o campo \vec{v} é um campo irrotacional ou um campo de vórtice:

(a) $\vec{v} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$ (b) $\vec{v} = -2y\vec{i} + 2x\vec{j}$ (c) $\vec{v} = y^2\vec{i}$

[8] Um campo central dado por $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$ é irrotacional?

[9] Qual a lei da Física que está por trás do conceito de campo conservativo?

[10] Discuta o significado físico da equação da continuidade.

Exemplo 14: Mostre que os campos inverso do quadrado são irrotacionais.

Exemplo 15 : A forma diferencial das equações de Maxwell num espaço livre de cargas e correntes é dado pelo conjunto de equações :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

a) Mostre que os campos elétrico e magnético obedecem às equações da onda, isto é, você estará comprovando matematicamente que a ótica é um ramo do eletromagnetismo.

b) Considere, agora, que os campos elétrico e magnético são campos estáticos . Chegue à equação de Laplace para um potencial eletrostático ϕ .

Análise Vetorial- 7ª aulaIntegração Vetorial.

Chegamos à última parte da Análise Vetorial : a integração vetorial.

Por integração vetorial estamos querendo dizer integrais cujo integrando contém uma função vetorial.

De todas possíveis integrais vetoriais nos restringiremos a aquelas que possuam significado físico, quais sejam:

Caso I : Integrais da forma :

$$\int \vec{F}(t) dt$$

onde $\vec{F}(t)$ é uma função vetorial na forma paramétrica.

Caso II : Integrais de linha da forma:

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

onde C é a curva dada por $\vec{r}(t)$.

Caso III: Integrais de superfície da forma:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

onde \vec{n} é o vetor normal unitário perpendicular a uma superfície S.

Estas três formas de integrais são muito usadas na Física. As duas primeiras já devem ter sido estudadas nas disciplinas de Cálculo, bem como nas disciplinas de Física Geral. Apenas a integral de superfície (caso III) envolve um conceito novo.

Contudo, faremos uma revisão , afim de colocar os três casos dentro do contexto e da notação da Análise vetorial.

Caso I : É o caso mais simples, pois trata de integrais de funções vetoriais dadas na forma paramétrica, como as estudadas na 1ª parte da Análise Vetorial, onde

$$\vec{F}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$$

Na Física, estas são as integrais que definem a grandeza chamada impulso, indicada pelo vetor \vec{I} e expressa a variação de momentum $\Delta \vec{p}$, causada pelas forças impulsivas $\vec{F}_i(t)$, sendo t o tempo. Forças impulsivas são forças muito intensas que ocorrem em curtos intervalos de tempo, durante os processos de colisão, de espalhamentos ,etc.

Isto é,

$$\bar{I} = \int \bar{F}_i(t) dt = \Delta \bar{p}$$

Também se incluem no caso I, as integrais da Cinemática, com vistas aos cálculos de velocidade $\bar{v}(t)$, dada a aceleração $\bar{a}(t)$ ou aos cálculos do vetor-posição da partícula dada a velocidade $\bar{v}(t)$. É o que será visto no exemplo a seguir.

Exemplo 1 : A velocidade de uma partícula como função do tempo t é dada pela seguinte função vetorial

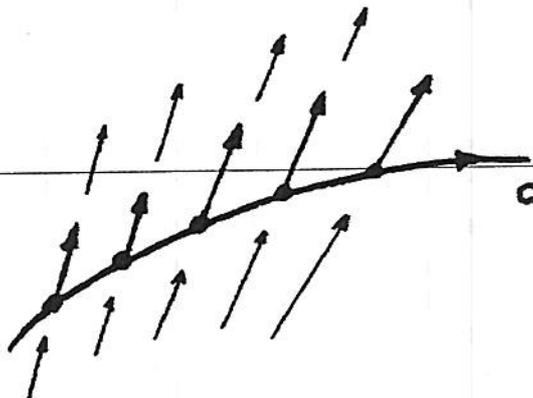
$$\bar{v}(t) = \bar{i} + t\bar{j} + t^2\bar{k}$$

Calcular as coordenadas da partícula em $t=1$, sabendo que em $t=0$ a partícula está em $(-1, 2, 4)$.

Caso II: Integrais de linha da forma $\int_C \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r}$.

Que vem a ser uma integral de linha ? É a integral realizada ao longo da curva C representada por $\bar{r}(t)$. Em outras palavras, o integrando $\bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r}$ deverá coincidir com os pontos da curva C .

Esta última afirmação é mais facilmente entendida se nos lembrarmos que na Física esta é a definição de trabalho W realizado por um campo de forças sobre uma partícula que se desloca através de uma trajetória C representada por $\bar{r}(t)$. Observe a figura abaixo.



Nela está representada a trajetória de uma partícula que atravessa uma região onde está presente um campo de forças. Diz-se que este campo realiza um trabalho sobre a partícula. O trabalho W é definido como a soma dos infinitos produtos da componente do campo \vec{F} na direção do movimento da partícula. Traduzindo matematicamente esta definição chegamos a

$$W = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1)$$

Com a imagem da figura em mente podemos perceber que a integral de linha deve ser realizada colocando no integrando apenas as forças cujos pontos de aplicação coincidem com a trajetória da partícula. Veremos, mais adiante, nos exemplos, como isto deve ser feito.

Antes porém, convém destacar que o conceito de trabalho é muito importante e aparece em todas as áreas da Física. Assim, falamos de trabalho mecânico, trabalho elétrico, trabalho magnético, trabalho termodinâmico no ciclo de Carnot, etc.

Na Mecânica dos Fluidos o campo vetorial usado, como já vimos, é o campo de velocidades \vec{v} e o conceito de trabalho é substituído pelo conceito de *circulação do campo de velocidades ao longo da curva C*. Matematicamente, esta grandeza é definida pela integral de linha fechada C

$$\text{circ } \vec{v} = \oint_c \vec{v} \cdot d\vec{r} \quad (2)$$

No Eletromagnetismo as integrais de linha aparecem na Lei de Faraday, onde o campo vetorial é o campo elétrico \vec{E} e na Lei de Ampère, onde o campo vetorial é o campo de indução magnético \vec{B} . A expressão matemática dessas leis é dada respectivamente por :

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{r} = \varepsilon$$

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 i$$

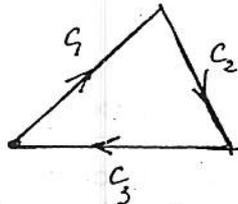
Na Lei de Faraday, ε é chamada de força eletro-motriz e dimensionalmente é trabalho por unidade de carga. Na lei de Ampère, μ_0 é uma constante e i é a corrente elétrica. Voltaremos a estas leis quando estudarmos as equações de Maxwell.

Vimos que o caminho C nas nossas integrais de linha poderá ser uma curva aberta (\int_C) ou fechada (\oint_C).

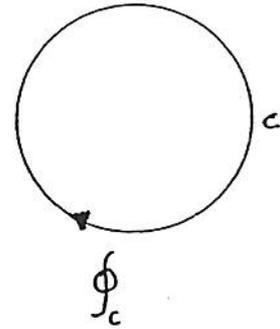
A condição exigida é que a curva seja uma curva contínua ou contínua por partes, tais como as curvas apresentadas abaixo.



$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}$$



$$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$$



Exemplo 2: Dados o campo \vec{F} e a curva C calcule o trabalho para

- a) $\vec{F}(x, y) = x^3 y \vec{i} + (x - y) \vec{j}$ e
 $C: y = x^2$ desde $P_1(-2, 4)$ até $P_2(1, 1)$.
- b) $\vec{F}(x, y, z) = yz \vec{i} + xz \vec{j} + xy \vec{k}$
 $C: \vec{r}(t) = t \vec{i} + t^2 \vec{j} + t^3 \vec{k}, 0 \leq t \leq 1$.

Teorema Fundamental para Integrais de Linha :

Veremos agora um importante teorema que irá nos fornecer uma maneira de calcular a função potencial φ conhecido o campo conservativo associado a ela.

Enunciado :

Seja \vec{F} um campo vetorial conservativo, isto é, $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$, definido em uma certa região R do espaço . Seja C uma curva contínua por partes em R, com início em $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e extremidade em $P(x, y, z)$, então

$$\int_C \vec{F}_{\text{cons}} \cdot d\vec{r} = \varphi(x, y, z) - \varphi(x_0, y_0, z_0)$$

Demonstração :

Parte-se de

$$\vec{F}_{\text{cons}} = \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$$

Lembrando que a curva C é dada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad , \text{ então}$$

$$d\vec{r} = \left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \right) dt$$

Logo

$$\vec{F}_{\text{cons}} \cdot d\vec{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} dt + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} dt + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{dz}{dt} dt \equiv d\varphi$$

$$E , \quad \int_C \vec{F}_{\text{cons}} \cdot d\vec{r} = \int_C d\varphi = \int_{P_0}^P d\varphi = \varphi(P) - \varphi(P_0)$$

c.q.d.

Observações :

Sempre que o campo for conservativo o trabalho será dado pela diferença de potencial, ou seja o trabalho é independente da forma do caminho C ; dependerá apenas dos pontos inicial e final unindo a curva C. Se a curva C for uma curva fechada, então o ponto inicial coincide com o final e neste caso o trabalho será nulo.

Resumo : As quatro formas de afirmar que um campo é conservativo são :

1ª) $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$ (é uma definição matemática)

2ª) $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ (consequência da definição e TAB.8)

3ª) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(P) - \phi(P_0)$ (W independe de C)

4ª) $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ (W=0 para um caminho C fechado)

Exemplo 3 : Dado o campo vetorial

$$\vec{F}(x,y) = 2xy^3 \vec{i} + (1 + 3x^2y^2) \vec{j}$$

- Mostre que \vec{F} é conservativo.
- Calcule a função potencial $\phi(x,y)$.
- Calcule o trabalho realizado por este campo de forças ao deslocar uma partícula desde $P_1(1,4)$ até $P_2(3,1)$.
- Como você calcularia as curvas de nível de ϕ (equipotenciais)?

Matemática Aplicada II (Área I)

5ª Lista de Exercícios

Integração Vetorial : Integral Simples e Integral de Linha , Aplicações

- 1) Dada a aceleração $\vec{a}(t)$ de uma partícula , calcule a velocidade $\vec{v}(t)$ e o vetor posição $\vec{r}(t)$, supondo $t \geq 0$, $\vec{v}(0) = \vec{0}$ e $\vec{r}(0) = \vec{0}$, para:

a) $\vec{a} = 12 \cos 2t \vec{i} - 8 \sin 2t \vec{j} + 16t \vec{k}$	$\vec{a} = e^{-t} \vec{i} - 6(t+1)\vec{j} + 3 \operatorname{sen} t \vec{k}$
R: $\vec{v} = 6 \sin 2t \vec{i} + (4 \cos 2t - 4)\vec{j} + 8t^2 \vec{k}$	R: $\vec{v} = (1 - e^{-t}) \vec{i} - (3t^2 + 6t)\vec{j} + (3 - 3 \cos t)\vec{k}$
$\vec{r} = (-3 \cos 2t + 3) \vec{i} + (2 \sin 2t - 4t)\vec{j} + \frac{8}{3}t^3 \vec{k}$	$\vec{r} = (t - 1 + e^{-t}) \vec{i} - (t^3 + 3t^2)\vec{j} + (3t - 3 \operatorname{sen} t)\vec{k}$

- 2) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, dados:

a) $\vec{F} = (x+2y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ C: $x = 2 \cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq \pi/4$	b) $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} - x\vec{j}$ C: Circunferência de $x^2 + y^2 = 1$ de (1,0) a (0,1) no 1º quadrante
R: $1 - \pi$	R: $-1 - \pi/4$

- 3) Determine se o campo \vec{F} é conservativo. Se for, encontre a função potencial ϕ .

a) $\vec{F} = x \vec{i} + y \vec{j}$; R: $\phi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C$	b) $\vec{F} = x^2 y \vec{i} + 5xy^2 \vec{j}$; R: Não é conservativo
c) $\vec{F} = (\cos y + y \cos x)\vec{i} + (\operatorname{sen} x - x \operatorname{sen} y)\vec{j}$ R: $\phi = x \cos y + y \operatorname{sen} x + C$	d) $\vec{F} = yz \vec{i} + xz \vec{j} + (xy + 3z^2)\vec{k}$ R: $\phi = xyz + z^3 + C$

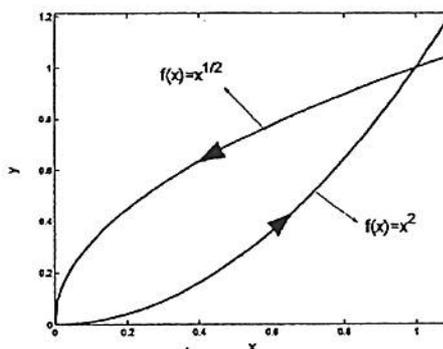
- 4) Calcular o trabalho para se deslocar uma partícula no campo de força $\vec{F} = 3x^2 \vec{i} + (2xz - y)\vec{j} + z \vec{k}$ ao longo:

- a) da reta que liga (0,0,0) a (2,1,3) b) da curva $x = 2t^2$, $y = t$, $z = 4t^2 - t$ de $t = 0$ até $t = 1$
c) da curva definida por $x^2 = 4y$, $3x^3 = 8z$, de $x = 0$ até $x = 2$ R: a)16; b)14.2 ; c)16

- 5) Calcule o trabalho realizado pela força conservativa $\vec{F} = xy^2 \vec{i} + x^2 y \vec{j}$ ao deslocar uma partícula desde $P_0(1,1)$ até $P_1(0,0)$. R: -1/2

- 6) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, para $\vec{F} = (e^y + ye^x)\vec{i} + (xe^y + e^x)\vec{j}$ e C é a curva dada por $\vec{r} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right) \vec{i} + (\ln t)\vec{j}$, $1 \leq t \leq 2$. (Sugestão : Determine primeiro se \vec{F} é conservativo) R: -1 + ln2

- 7) Dado $\vec{F} = (x-y)\vec{i} + (x+y)\vec{j}$, calcule $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ao longo da curva C representada na curva ao lado. R: 2/3



- 8) Se $\vec{A} = (4xy - 3x^2 z^2)\vec{i} + 2x^2 \vec{j} - 2x^3 z \vec{k}$, prove que $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$ é independente da curva C ligando dois pontos dados.

- 9) a) Se $\vec{E} = r \vec{F}$, prove que existe um potencial ϕ tal que $\vec{E} = -\nabla \phi$

- b) Calcule ϕ c) Qual o valor de $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$? R: $\phi = -\frac{r^3}{3} + C$

- 10) Calcule o trabalho para se deslocar uma partícula nos campos de força conservativa dados por:

a) $\vec{F} = -k \vec{r}$ (Lei de Hooke) R: $\phi = \frac{-kr^2}{2} + C$	b) $\vec{F} = \frac{1}{r^3} \vec{r}$ (Lei inverso do quadrado) R: $\phi = -\frac{1}{r} + C$
--	---

Análise Vetorial : 8ª aulaIntegração vetorial (continuação):

Caso III) Integrais de superfície da forma

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

onde \vec{n} é o vetor normal à superfície S .

Integrais desta natureza representam a grandeza chamada *fluxo de um campo vetorial* \vec{F} através de uma superfície S , ou simplesmente **fluxo**, e é indicado pela letra grega maiúscula Φ .

Na Mecânica dos Fluidos poderemos ter **fluxo** de um campo de velocidades \vec{v} . No Eletromagnetismo teremos **fluxo** de um campo elétrico \vec{E} (Lei de Gauss da Eletricidade) ou de um campo de indução magnética \vec{B} (Lei de Gauss do Magnetismo) através de uma superfície S . Se o campo vetorial for um campo densidade de corrente, indicado pela letra \vec{J} , então o **fluxo** terá dimensão de massa por unidade de tempo ou de corrente elétrica, conforme estejamos estudando o movimento de um fluido ou o movimento de cargas elétricas, respectivamente.

Observe agora a definição matemática de **fluxo** e entenda seu significado. O integrando na forma de um produto escalar está nos dizendo que apenas as componentes do campo perpendiculares à superfície S contribuirão ao cálculo do **fluxo**. Outro detalhe é que a soma dos infinitos **fluxos** deverá ser feita ao longo da superfície S . Ou seja, esta definição lembra a definição de trabalho W , no sentido de que teremos que fazer com que o integrando coincida com os pontos da superfície S . É isto que estamos querendo dizer quando colocamos a letra S no símbolo de integral dupla.

As superfícies S colocadas no campo \vec{F} deverão ser superfícies permeáveis, isto é, deixam passar o fluido ou as cargas e poderão ser abertas ou fechadas.

Do ponto de vista matemático esta superfície deverá ser representada por funções contínuas ou contínuas por partes; diz-se, então, que a superfície é 'suave' ou 'lisa'. Neste caso, podemos dizer que S possuirá plano tangente em cada ponto e conseqüentemente um vetor normal em cada ponto.

Orientação da superfície S :

Assim como as curvas, também as superfícies precisam ser orientadas, afim de que, adotando uma certa convenção, sempre se encontre o mesmo sinal para o **fluxo** Φ .

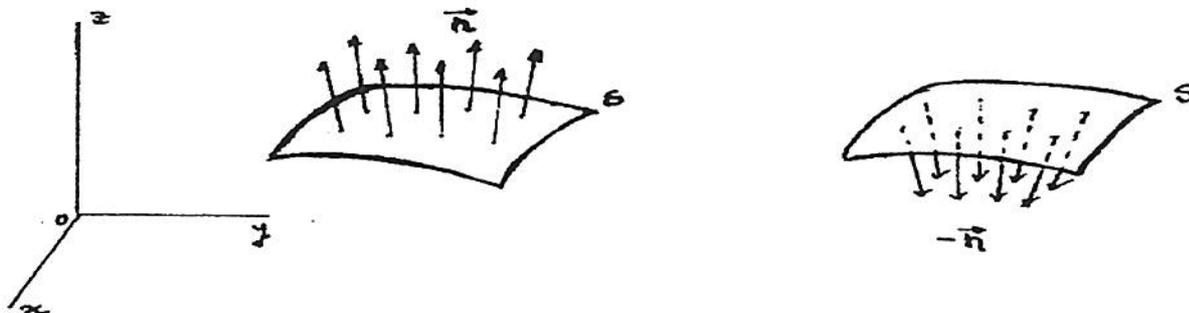
A maioria das superfícies que encontramos nas aplicações tem dois lados : um lado externo e um lado interno . Contudo, existem superfícies, como a tira de Möbius, que possui apenas um lado. Esta tira está representada abaixo, e se caracteriza pelo fato de que é possível percorrê-la sem cruzar uma borda.



Diz-se que uma superfície de dois lados é orientável e que uma superfície com um único lado é não orientável. É óbvio que trataremos aqui apenas de superfícies orientáveis.

Assim, precisamos distinguir os lados de uma superfície orientável e convencionar a orientação considerada positiva e a negativa, pois se invertermos a orientação de S inverte-se o sinal de Φ .

Na figura a seguir, estão representados os vetores \vec{n} e $-\vec{n}$, apontando para os lados opostos da superfície S . No 1º caso a orientação é dita positiva e no 2º negativa.



Resumo: O sinal de \vec{n} serve para orientar S .

Passemos agora ao cálculo de \vec{n} .

Suponha que a superfície S seja dada como
 $z = g(x, y)$ ou $y = g(x, z)$ ou $x = g(y, z)$

Vamos reescrever cada uma dessas equações na forma

$$G(x, y, z) = 0$$

Podemos interpretar esta última forma, como a equação de uma superfície de nível de uma função

$$w = G(x, y, z)$$

Como já vimos, o $\vec{\nabla}G$ é, neste caso, um vetor 3-D e representa um vetor normal à superfície de nível $G(x, y, z) = 0$.

Assim, o vetor normal unitário \vec{n} poderá ser

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}G}{|\vec{\nabla}G|} \quad \text{ou} \quad \vec{n} = -\frac{\vec{\nabla}G}{|\vec{\nabla}G|}$$

Antes de entrarmos em detalhe sobre o cálculo de \vec{n} , vamos apresentar o enunciado do teorema que permite calcular a integral de superfície que define Φ . Ou seja, teremos agora uma técnica para transformar uma integral de superfície numa integral dupla de área.

TEOREMA: Seja S uma superfície suave da forma

$z = g(x, y)$ ou $y = g(x, z)$ ou $x = g(y, z)$ e seja \vec{F} um campo vetorial contínuo em S . Suponha, também, que a equação de S seja reescrita como $G(x, y, z) = 0$, passando g para o membro esquerdo da equação e seja R a projeção de S no plano coordenado das variáveis independentes de g . Então

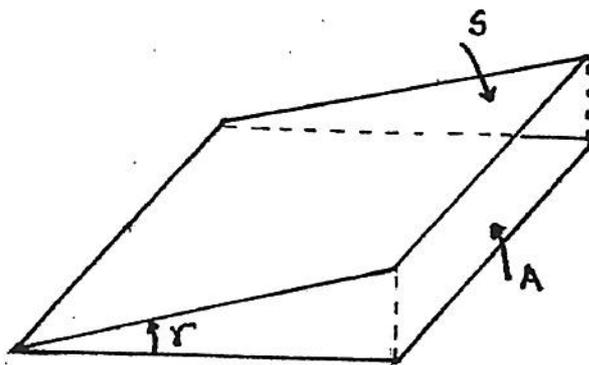
$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \pm \iint_R \vec{F} \cdot \vec{\nabla}G \, dA$$

onde o sinal $+$ é usado se S possui orientação positiva e o sinal $-$ se S possui orientação negativa.

Observamos que a transformação de uma integral de superfície em uma integral comum de área plana se deu através da afirmação matemática

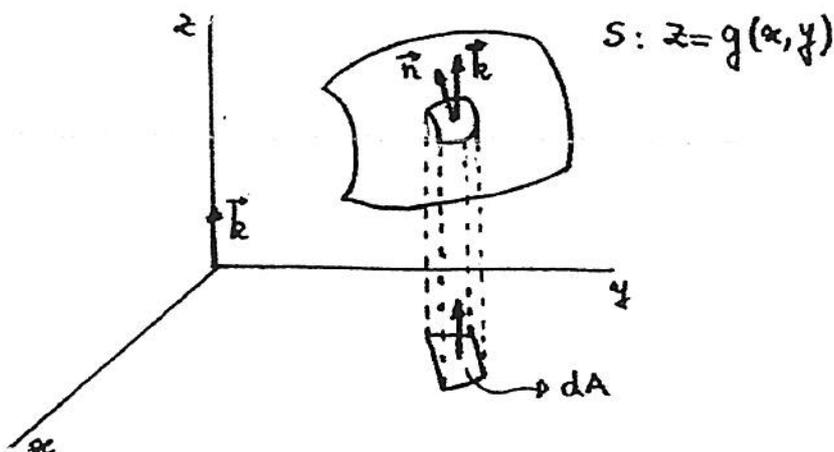
$$\vec{n} \, dS = \pm \vec{\nabla}G \, dA$$

Precisamos nos convencer que esta afirmação está correta. Para tanto, em vez de uma demonstração formal, usaremos a seguinte idéia básica: se dois planos se interceptam formando um ângulo γ entre eles, então todas as áreas de um plano são multiplicadas por $\cos \gamma$ quando projetadas sobre o outro. Veja a figura a seguir.



$$A = S \cos \gamma$$

Usaremos, pois, a mesma idéia para projetar um elemento de superfície dS sobre um elemento de área dA da região R . Ilustramos abaixo, com o gráfico de uma superfície aberta, dada por $z = g(x, y)$.



Temos, então

$$dA = \cos \gamma dS \quad \text{ou} \quad dS = \frac{dA}{\cos \gamma}$$

onde γ é o ângulo entre o vetor \vec{k} (direção z para cima) e o vetor \vec{n} normal à superfície, apontando para cima. Ou seja

$$\vec{n} \cdot \vec{k} = \cos \gamma$$

Lembrando que

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}G}{|\vec{\nabla}G|} = \frac{1}{|\vec{\nabla}G|} \left(-\frac{\partial g}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial z} \vec{k} \right)$$

Logo

$$\vec{n} \cdot \vec{k} = \frac{1}{|\vec{\nabla}G|}$$

Consequentemente

$$dS = |\vec{\nabla}G| dA$$

e finalmente o fluxo Φ

$$\Phi = \iint_R \vec{F} \cdot \frac{\vec{\nabla}G}{|\vec{\nabla}G|} |\vec{\nabla}G| dA = \iint_R \vec{F} \cdot \vec{\nabla}G dA$$

c.q.d.

Observações importantes :

A despeito de termos substituído a integração ao longo de uma superfície por uma integração dupla na região dos planos coordenados, não podemos nos esquecer que o integrando deve coincidir com os pontos da superfície. Para tanto, é importante que você identifique a superfície.

Dentre as superfícies de interesse nas aplicações, as mais simples são os planos, as superfícies cúbicas e os tetraedros. Poderemos ter também superfícies de revolução como as superfícies cilíndricas, abertas ou fechadas. As seguintes em ordem de complexidade, são as superfícies quádricas.

Vamos fornecer uma tabela com as superfícies quádricas para você recordar a forma canônica de suas equações. Dentre as seis quádricas, nos restringiremos à esfera, que é o caso particular do elipsóide, ao parabolóide circular e ao cone circular.

Após todos estes cuidados, devemos olhar de novo para o nosso integrando $\vec{F} \cdot \vec{\nabla}G$ e ver qual o sistema de coordenadas mais apropriado tendo em vista a simetria da superfície. Assim o elemento de área dA deverá ser transformado numa integral iterada, usando ou coordenadas retangulares ou polares conforme a simetria do integrando e da região de integração.

Todos estes detalhes serão vistos nos exemplos a seguir. Iniciaremos com superfícies abertas, ilustrando as três simetrias, quais sejam a retangular, a cilíndrica e a esférica. Por fim, veremos que, nos casos de superfícies fechadas, há felizmente um atalho chamado Teorema da Divergência de Gauss.

Exemplo 4: Calcular o fluxo do campo $\vec{F} = x^2\vec{i} + 3y^2\vec{j}$ através da superfície S orientada para fora e representada por $x + y + z = 1$, no 1º octante.

Exemplo 5: Calcular o fluxo de $\vec{F} = 3z^2\vec{i} + 6\vec{j} + 6xz\vec{k}$ através da superfície S dada por $y = x^2$ com $0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq z \leq 3$ e orientada para fora.

Exemplo 6 : Seja S a porção da superfície

$z = 1 - x^2 - y^2$, acima do plano xy , orientada para fora .
Encontre o fluxo Φ através de S para o campo

$$\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Exemplo 7: Dados $\vec{F} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ e S a porção da superfície
 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, situada abaixo do plano $z = 1$ e orientada para
fora.

Exemplo 8 : Seja S a superfície do cubo limitado pelos planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ e $z = \pm 1$, orientado para fora. Determine o fluxo para :

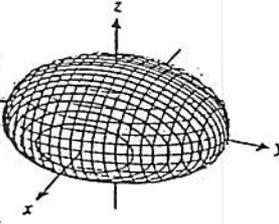
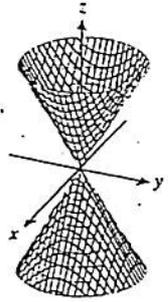
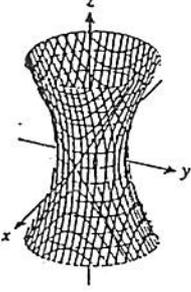
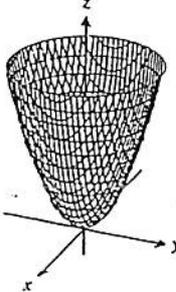
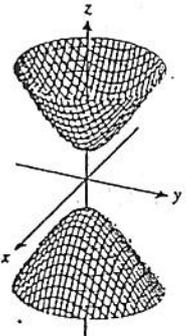
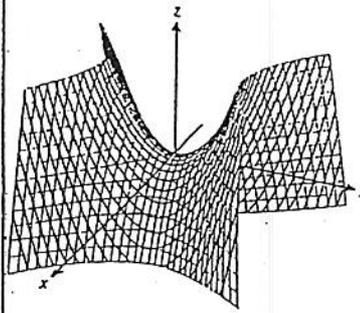
a) $\vec{F} = x\vec{i}$

b) $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

c) $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$

Exemplo 9 : Calcule o fluxo do campo $\vec{F} = z\vec{k}$ através da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, orientada para fora.

Tabela 4.7.1

SUPERFÍCIE	EQUAÇÕES	SUPERFÍCIE	EQUAÇÕES
<p style="text-align: center;">ELIPSOÍDE</p> 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ <p>Os traços nos planos coordenados são elipses, como também são elipses os traços em planos paralelos aos planos coordenados, que interceptam a superfície em mais de um ponto.</p>	<p style="text-align: center;">CONE ELÍPTICO</p> 	$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ <p>O traço no plano xy é um ponto (a origem) e os traços em planos paralelos ao plano xy são elipses. Os traços nos planos yz e xz são pares de retas que se interceptam na origem. Os traços em planos paralelos a estes são hipérbolas.</p>
<p style="text-align: center;">HIPERBOLÓIDE DE UMA FOLHA</p> 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ <p>O traço no plano xy é uma elipse, como são os traços nos planos paralelos ao plano xy. Os traços nos planos yz e xz são hipérbolas, bem como os traços nos planos paralelos a eles que não passam pelos interceptos x e y. Nestes interceptos, os traços são pares de retas concorrentes.</p>	<p style="text-align: center;">PARABOLÓIDE ELÍPTICO</p> 	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ <p>O traço no plano xy é um ponto (a origem) e os traços em planos paralelos e acima dele são elipses. Os traços nos planos yz e xz, bem como em planos paralelos a eles são parábolas.</p>
<p style="text-align: center;">HIPERBOLÓIDE DE DUAS FOLHAS</p> 	$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ <p>Não há traço no plano xy. Em planos paralelos ao plano xy que interceptam a superfície em mais do que um ponto os traços são elipses. Nos planos yz, xz e nos planos paralelos a eles que interceptam a superfície em mais de um ponto, os traços são hipérbolas.</p>	<p style="text-align: center;">PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO</p> 	$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$ <p>O traço no plano xy é um par de retas que se cruzam na origem. Os traços em planos paralelos ao plano xy são hipérbolas. As hipérbolas acima do plano xy abrem-se na direção y e as abaixo na direção x. Os traços nos planos yz e xz são parábolas, assim como os traços nos planos paralelos a estes.</p>

6ª Lista de Exercícios: Integração Vetorial

Integrais de Superfície, Fluxo de um Campo Vetorial através de uma Superfície.

Teorema da Divergência de Gauss

[1] Calcule o fluxo Φ do campo vetorial \vec{F} através da superfície S orientada para fora, nos seguintes casos (Sugestão: faça o gráfico da superfície para ajudá-lo na escolha do vetor normal à S):

[a] $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}$ $S: z = 1 - x^2 - y^2$ acima do plano xy $R: 2\pi$	[b] $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x+z)\vec{k}$ S é a porção do plano $x + y + z = 1$ no primeiro octante $R: 1$
[c] $\vec{F} = z^2\vec{k}$ S é o hemisfério superior dado por $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ $R: \frac{\pi}{2}$	[d] $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}$ S é a porção do cone $z^2 = x^2 + y^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$ $R: -\frac{14\pi}{3}$

[2] Seja S a superfície do cubo limitado pelos planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$ orientada para fora. Determine o fluxo Φ para:

[a] $\vec{F} = x\vec{i}$ $R: 8$	[b] $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ $R: 24$	[c] $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ $R: 0$
---------------------------------	--	---

[3] Seja $\vec{F} = r^k \vec{r}$, onde k é uma constante. Seja S uma esfera de raio a centrada na origem e orientada para fora por $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r}}{a}$. [a] Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ sem executar qualquer integração. $R: 4\pi a^{k+3}$

[b] Para que valor de k a integral no item [a] fica independente do raio da esfera? Qual lei da Física é representada pelo campo \vec{F} ?

[4] Use o Teorema da Divergência para provar que se $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e V é o volume do sólido de área superficial S , então o fluxo de \vec{F} através de S é dado por: $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = 3V$

[5] Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo Φ nos seguintes casos:

[a] $\vec{F} = 4x\vec{i} - 3y\vec{j} + 7z\vec{k}$; S é a superfície do cubo limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$. $R: 8$
[b] $\vec{F} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$; S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. $R: 216\pi$
[c] $\vec{F} = (x-z)\vec{i} + (y-x)\vec{j} + (z-y)\vec{k}$; S é a superfície do sólido limitado por $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ e $z = 1$. $R: 3\pi a^2$
[d] $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$; S é a superfície do sólido limitado por $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ e $z = 3$. $R: 180\pi$
[e] $\vec{F} = (x^2 + y)\vec{i} + xy\vec{j} - (2xz + y)\vec{k}$; S é a superfície do tetraedro no 1º octante, limitado por $x + y + z = 1$ e pelos planos coordenados. $R: \frac{1}{24}$
[f] $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$; S é a superfície do sólido limitado por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $z = 1$. $R: \frac{\pi}{2}$

Análise Vetorial : 9ª aula**Fluxo através de superfícies fechadas.**

O exemplo 9 ilustra como o cálculo de **fluxo** para superfícies fechadas pode se tornar complicado.

Contudo, há uma considerável simplificação dos cálculos que pode ser utilizada quando a superfície é fechada. Este atalho nos é fornecido pelo teorema da divergência de Gauss, cujo enunciado será visto a seguir. Não iremos demonstrá-lo .

O teorema da divergência de Gauss:

Enunciado: Seja V o volume de um sólido cuja superfície S é orientada para fora. Seja o campo vetorial $\vec{F}(x, y, z)$ dado por

$$\vec{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\vec{i} + g(x, y, z)\vec{j} + h(x, y, z)\vec{k}$$

onde as funções $f, g, e h$ possuem derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em algum conjunto aberto contendo V , então

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV$$

Isto é, o **fluxo** de um campo vetorial \vec{F} através de uma superfície fechada S , orientada para fora é igual à integral do divergente de \vec{F} dentro do volume V .

Comentários : Observar que foi usado o símbolo de integral de superfície fechada (\oiint_S) para reforçar o fato de que este

teorema só poderá ser usado quando a superfície for fechada.

É importante pois, reconhecer no enunciado dos exercícios os casos em que a superfície é aberta e os casos em que é fechada.

À primeira vista, pode parecer que ao trocarmos uma integral dupla de superfície por uma integral tripla de volume não estejamos ganhando muito na redução de nossos cálculos. Contudo, convém lembrar que uma integral fechada de superfície requer que a desdobremos em duas ou mais integrais de superfície abertas.

Por outro lado, se olharmos o integrando da integral tripla, reconheceremos que é muito mais fácil calcular o divergente de \vec{F} do que montar o produto escalar $\vec{F} \cdot (\pm \vec{\nabla}G)$, onde G é a forma

implícita da equação da superfície, e ainda escolher o correto sinal do gradiente de acordo com a orientação de S .

Todas essas simplificações que o teorema da divergência nos proporciona têm contudo um preço, que é identificar o sistema de coordenadas apropriado para a simetria do problema. Este é um tópico da disciplina de Cálculo II, no capítulo das integrais triplas, onde você deve ter apreendido como usar os sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas.

Junto ao material desta aula, você encontrará uma página contendo os gráficos que permitem transformar as coordenadas retangulares em cilíndricas e esféricas. Com as informações ali contidas, é possível deduzir os elementos de volume dV , a partir do volume dos cubos elementares destes dois sistemas de coordenadas. Esta página poderá ser utilizada no dia da prova. Observar que estamos com uma notação diferente do Howard Anton. As coordenadas cilíndricas são (ρ, ϕ, z) e as coordenadas esféricas são (r, θ, ϕ) . Assim, no plano xy as coordenadas cilíndricas se reduzem às coordenadas polares (ρ, ϕ) e reservamos a coordenada r (que é o módulo do vetor \vec{r}) para a coordenada espacial do sistema esférico. Com esta notação estaremos coerentes com a notação da Análise Vetorial, com respeito à variável r .

Vamos, agora refazer os exemplos 8 e 9 utilizando o teorema da divergência.

Exemplo 8 : Seja S a superfície do cubo limitado pelos planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$, orientado para fora. Determine o fluxo para :

- a) $\vec{F} = x\vec{i}$;
- b) $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$;
- c) $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.

Exemplo 9 : Calcule o fluxo do campo $\vec{F} = z\vec{k}$, através da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, orientada para fora .

Exemplo 10 : Use o teorema da divergência para calcular o fluxo do campo $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^2\vec{k}$, através da região limitada pela superfície $x^2 + y^2 = 9$ e os planos $z = 0$ e $z = 2$.

Exemplo 11 : Use o teorema da divergência para determinar o fluxo do campo $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$, através da superfície envolvida pelo hemisfério $z = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}$ e o plano $z = 0$.

Lei de Gauss : o teorema da divergência aplicado a um campo elétrico \vec{E} .

Vamos demonstrar a lei de Gauss para uma campo Coulombiano criado por uma carga puntual, mas ela poderá ser aplicada para distribuições de carga mais gerais.

Enunciado: Seja o campo elétrico dado pela Lei de Coulomb

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

e seja S uma superfície fechada que circunda a origem, orientada para fora. Então, o fluxo de \vec{E} através de S é :

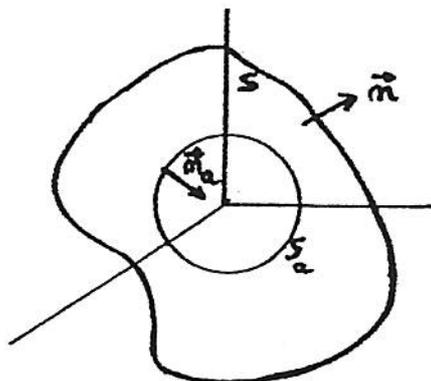
$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{q}{\epsilon_0} .$$

Vemos que o campo elétrico acima possui uma descontinuidade na origem, isto é, em $r = 0$. Calculando o $\text{div } \vec{E}$ encontramos o valor zero desde que $r \neq 0$. Isto é ,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \vec{\nabla} \cdot (r^{-3} \vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q [\vec{\nabla}(r^{-3}) \cdot \vec{r} + r^{-3} \vec{\nabla} \cdot \vec{r}] \quad \rightarrow \text{TAB(5)} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q [-3r^{-4} \hat{r} \cdot \vec{r} + 3r^{-3}] = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0 \quad , r \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, rigorosamente falando não poderemos usar o teorema da divergência para calcular o fluxo, exceto se a região limitada por S não incluir origem $r = 0$.

Esta dificuldade foi contornada por Gauss, que construiu uma superfície esférica de raio 'a' centrada na origem, na qual o raio é suficientemente pequeno para que a esfera fique inteiramente dentro da região envolvida por S . Chamaremos esta esfera de superfície S_a . A região V compreendida entre S e S_a é pois, uma região multiplamente conexa, ou seja o volume V contém uma cavidade interna. (Ver figura abaixo.)



Da mesma maneira que se pode aplicar o teorema de Green a regiões multiplamente conexas no plano (regiões com cavidades internas), também é possível aplicar o teorema da divergência para volumes no espaço 3-D com cavidades internas, desde que a integral de superfície fechada abranja toda a fronteira, sendo a fronteira externa orientada para fora e a fronteira da cavidade interna orientada para dentro. Assim:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, dV = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS + \oiint_{S_a} \vec{E} \cdot \vec{n}_a \, dS = 0 \quad , \quad r \neq 0$$

Ou seja,

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = - \oiint_{S_a} \vec{E} \cdot \vec{n}_a \, dS.$$

Conseqüentemente, o cálculo do fluxo Φ através da superfície genérica S ficou reduzido a menos o fluxo através da superfície esférica S_a . Esta superfície S_a é representada pela equação $r=a$, seu vetor unitário normal aponta para dentro de S_a e é dado por $\vec{n}_a = -\frac{\vec{r}}{a} = -\hat{r}$.

Ao longo da superfície S_a , o integrando deve coincidir com os pontos da superfície, isto é, os pontos tais que $r=a$.

$$\vec{E} \cdot \vec{n}_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot (-\hat{r}) \Big|_{S_a} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} \hat{r} \cdot \hat{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2}$$

Logo

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = - \left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} \right) \oiint_{S_a} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} 4\pi a^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad , \quad \text{c.q.d.}$$

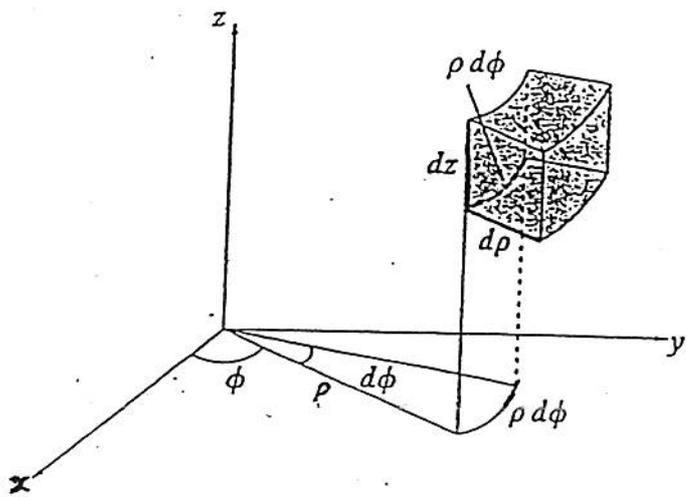
Em resumo : A lei de Gauss para campos elétricos afirma que o fluxo Φ para fora através de qualquer superfície orientável fechada S que circunda a carga q é

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

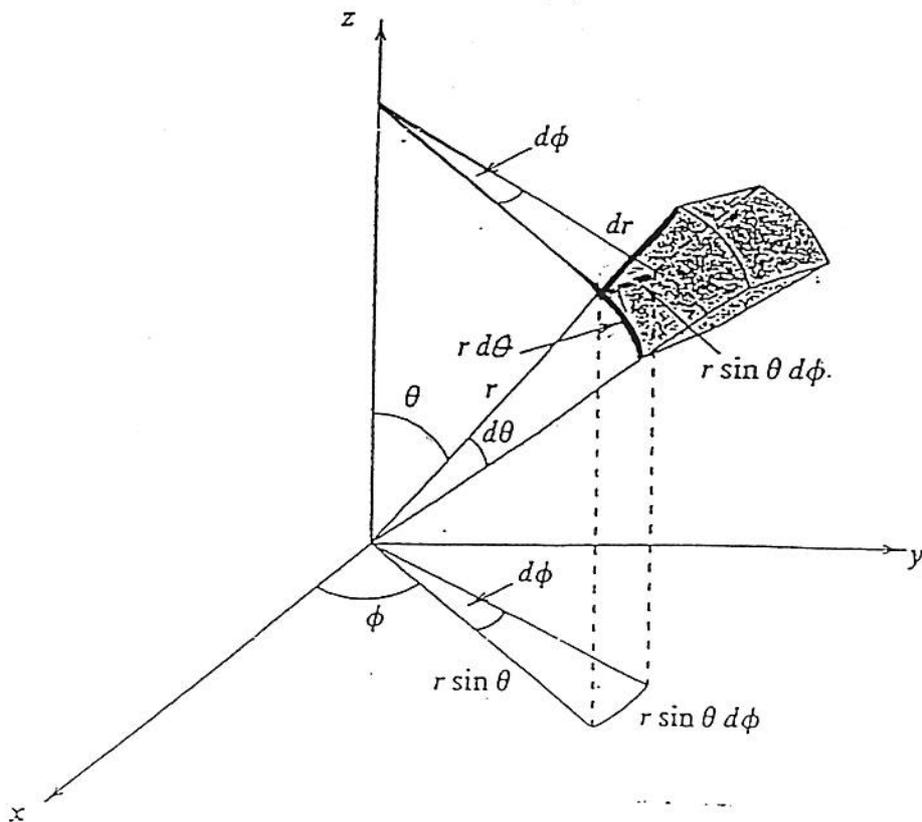
Esta lei, juntamente com a lei de Gauss para o magnetismo e as leis de Faraday e Ampère forma um conjunto de quatro equações conhecidas como as equações de Maxwell.

COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

a) Coordenadas cilíndricas : ρ, ϕ, z



b) Coordenadas esféricas : r, θ, ϕ



Análise Vetorial : 10ª aulaO Teorema de Stokes :

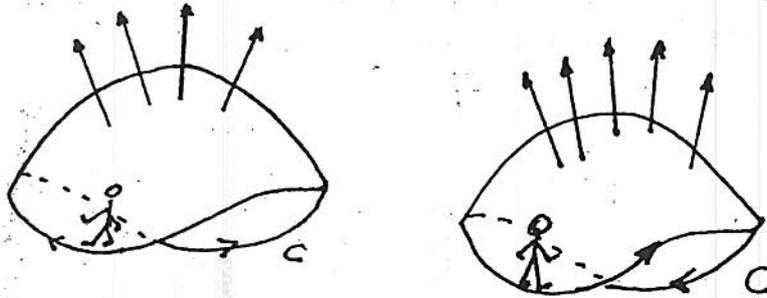
Vimos que o teorema da divergência relaciona o **fluxo** do campo \vec{F} através de uma superfície fechada com a divergência de \vec{F} através do volume limitado por esta superfície.

Pois agora, encerraremos a Análise Vetorial com o teorema de Stokes, que relaciona o **fluxo do rotacional** do campo \vec{F} através de uma superfície aberta com o trabalho realizado por \vec{F} ao longo da curva que limita essa superfície.

Este teorema tem grande utilidade na Mecânica dos Fluidos e no Eletromagnetismo e por envolver o **fluxo do rotacional**, está relacionado à capacidade de giro dos campos vetoriais.

O teorema de Stokes é a versão 3-D do teorema de Green, visto no Cálculo II.

Contrariamente ao teorema da divergência, no teorema de Stokes as superfícies orientáveis S são abertas e limitadas por curvas fechadas, as curvas contorno C . Precisamos pois, orientar também as curvas C . Supondo que as superfícies estejam orientadas para fora, então temos duas possibilidades para a orientação de C . Se um observador se desloca ao longo de C , deixando a superfície à sua esquerda, diz-se que C está orientada positivamente. Se o observador deixa a superfície à sua direita, então C está orientada negativamente. Estas duas possibilidades de orientação são mostradas na figura abaixo.



Enunciado do Teorema de Stokes:

Seja S uma superfície orientada, suave por partes, limitada por uma curva C , fechada, contínua por partes, orientada positivamente. Seja o campo vetorial

$$\vec{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\vec{i} + g(x, y, z)\vec{j} + h(x, y, z)\vec{k}$$

cujas componentes são contínuas, de derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em alguma região aberta contendo S , então

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

Comentários:

Se \vec{F} for um campo de forças, então o teorema de Stokes afirma que o trabalho realizado pelo campo de forças \vec{F} ao longo de um caminho fechado C é igual ao **fluxo do rotacional** de \vec{F} através da superfície aberta S , limitada por C .

Se o campo de forças for um campo conservativo, isto é, $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$, então o trabalho ao longo do caminho fechado C é nulo. Ou seja o teorema está coerente com a definição de campo conservativo.

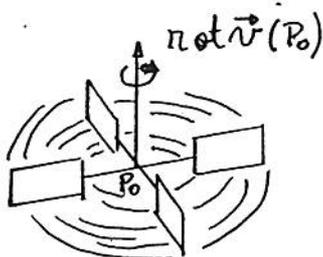
Se \vec{F} for o campo de velocidades \vec{v} de um fluido incompressível em regime estacionário, então a integral de linha $\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r}$, define,

como já vimos, a circulação de \vec{v} ao longo de C . Neste caso, a circ \vec{v} é igual ao **fluxo do rotacional** de \vec{v} através de S .

Muitos autores, atribuem um significado físico ao rotacional de um campo de velocidades a partir do teorema de Stokes. Consideram o máximo valor do **fluxo do rotacional** de \vec{v} , isto é, quando $\text{rot } \vec{v}$ e \vec{n} são paralelos, e tomam um valor constante para $\text{rot } \vec{v} = \text{rot } \vec{v}(P_0)$. Assim a integral do **fluxo** se reduz a uma integral dupla de superfície, dando a área A da superfície. Consequentemente

$$|\text{rot } \vec{v}(P_0)| \approx \frac{1}{A} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

ou seja o $\text{rot } \vec{v}(P_0)$ é visto como a 'densidade de circulação de \vec{v} em P_0 '. Ou ainda, em cada ponto do escoamento de um fluido em estado estacionário a densidade de circulação máxima ocorre na direção do rotacional. É usual aqui, mencionar a situação de uma roda-d'água imersa num fluido de modo que o pivô seja o ponto P_0 , então as pás giram mais rapidamente quando o eixo de rotação estiver alinhado com $\text{rot } \vec{v}(P_0)$, conforme figura abaixo.

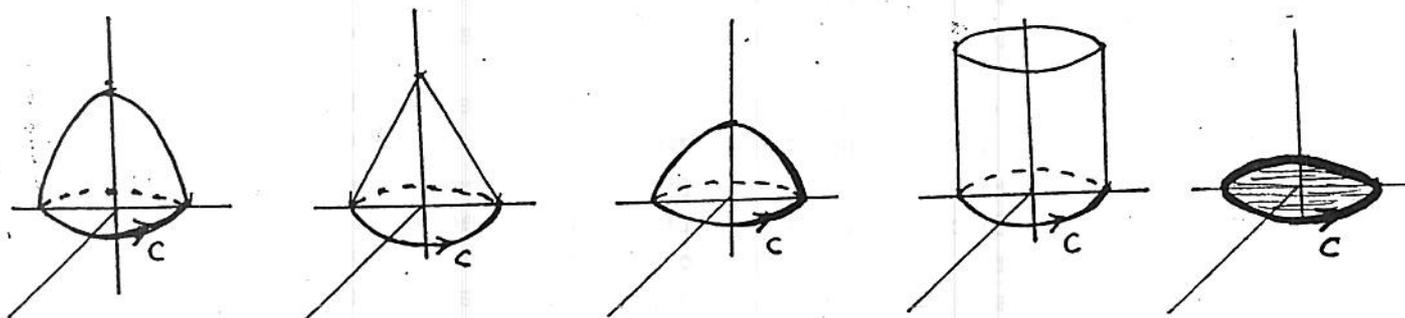


Após estes comentários com relação aos possíveis significados físicos contidos no teorema de Stokes, voltemos ao seu enunciado, com vistas aos cálculos.

É importante reconhecer que há um atalho embutido na afirmação matemática do teorema, qual seja, se S_1 e S_2 forem duas superfícies com a mesma curva contorno C , com orientação positiva com relação a S_1 e S_2 , então

$$\iint_{S_1} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_2} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

Como várias superfícies podem ter a mesma curva contorno C , a idéia é escolher a mais simples com vistas à integração de superfície. Ilustramos, na figura abaixo cinco superfícies que possuem a mesma curva contorno C : o parabolóide, o cone, o hemisfério, o cilindro e o disco, todos circulares.



Vamos ilustrar esta situação como exercício nº2 da 7ª lista.

Dado $\vec{F} = 4y\vec{i} + x\vec{j} + 2z\vec{k}$ encontre $\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ através do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$.

Há três maneiras de fazer esta integral:

- 1ª) Realizar a integral como a integral de **fluxo** através de uma superfície aberta.
- 2ª) Usar o teorema de Stokes e calcular pela integral de linha.
- 3ª) Usar o atalho embutido no teorema de Stokes, calculando o fluxo através da superfície mais simples contornada por C : o disco circular dado pela equação $x^2 + y^2 = a^2$.

Esta superfície mais simples é o disco circular, com vetor normal $\vec{n} = \vec{k}$.

Optando pelo atalho temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4y & x & 2z \end{vmatrix} = -3\vec{k}$$

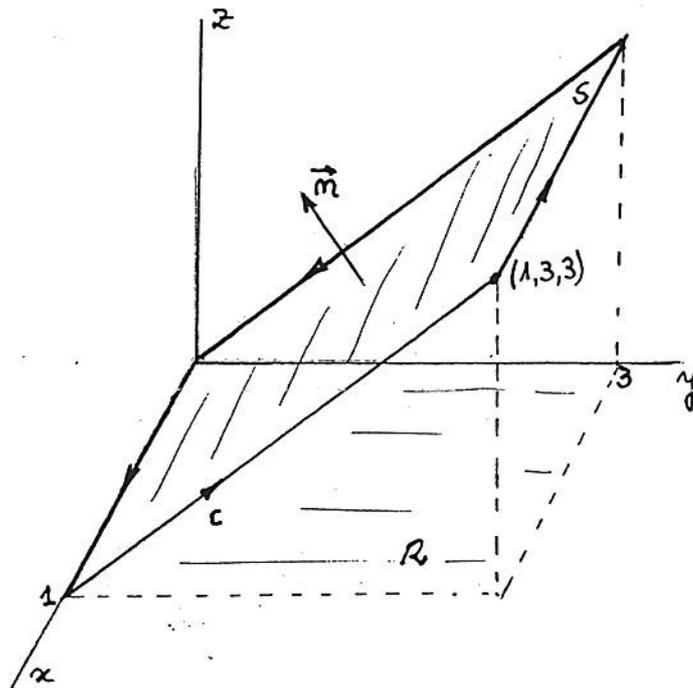
Logo,

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = -3 \iint_S \vec{k} \cdot \vec{k} \, dS = -3 \iint_S dS = -3\pi a^2$$

Este resultado foi obtido substituindo o hemisfério pela superfície mais simples limitada pela circunferência, que é o disco circular de raio a .

Vamos, agora, fazer o exercício nº3 da 7ª lista :

Use o teorema de Stokes para calcular o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F} = x^2\vec{i} + 4xy^3\vec{j} + y^2x\vec{k}$ ao longo da curva C , que limita o retângulo no plano $z = y$, mostrado no gráfico dado a seguir.



Observe a região de integração e veja que esta não possibilita construir uma superfície mais simples limitada por C . Mesmo assim, ainda será mais rápido calcular o trabalho pelo teorema de Stokes do que pela integral de linha, uma vez que a curva C é uma curva contínua por partes e teríamos quatro integrais de linha, isto é

$$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} \quad (1.1)$$

Usando pois, o teorema de Stokes, precisamos calcular o rotacional de \vec{F} e montar o $\vec{\nabla}G$. Assim,

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & 4xy^3 & y^2x \end{vmatrix} = 2xy\vec{i} - y^2\vec{j} + 4y^3\vec{k}$$

$$S : z = y \therefore G = z - y, \quad \vec{\nabla}G = -\vec{j} + \vec{k} \quad e$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{\nabla}G = y^2 + 4y^3$$

Logo

$$W = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_R \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{\nabla}G \, dA = \iint_R (y^2 + 4y^3) \, dA$$

Lembrando que a região R é o retângulo $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 3$ obtemos

$$W = \int_0^3 \int_0^1 (y^2 + 4y^3) \, dx \, dy = \int_0^3 (y^2 + 4y^3) \, dy = 90 \quad .$$

AS EQUAÇÕES DE MAXWELL

Como já foi mencionado, as equações de Maxwell formam o conjunto de leis físicas, obtidas experimentalmente, que sintetizam o eletromagnetismo e a ótica. Estas quatro equações explicam uma variedade de fenômenos que cobrem desde situações simples como por que a agulha de uma bússola aponta para o norte até por que o motor do carro inicia seu movimento quando a chave de ignição é acionada. Elas formam a base matemática que explica o funcionamento de motores elétricos, ciclotrons, transmissores e receptores de televisão, telefones, fax, radares, forno de micro-ondas, e ainda todos os dispositivos óticos.

As quatro leis físicas mencionadas são : a lei de Gauss da Eletricidade, derivada da lei de Coulomb; a lei de Gauss do Magnetismo ; a lei de Faraday e a lei de Ampère-Maxwell. Esta última representa a lei de Ampère corrigida por Maxwell, a fim de levar em consideração campos variáveis no tempo. Sem esta correção à lei de Ampère não haveria radiação eletromagnética. Foi portanto, graças à predição de Maxwell que a luz pode ser explicada como uma onda eletromagnética e ondas eletromagnéticas de todas as frequências podem ser produzidas.

As equações de Maxwell podem ser apresentadas na forma integral ou na forma diferencial. Esta última forma só é possível graças aos teoremas da divergência e de Stokes e é nessa forma que elas são usadas nas disciplinas mais avançadas. Antes de mostrarmos como a forma diferencial é obtida, vamos recordá-las na forma integral como aparecem no Halliday.

Apresentamos na página seguinte uma tabela das equações de Maxwell extraída do Halliday, com sua própria notação e no sistema de unidades MKS. É importante mencionar que existem cinco sistemas de unidades em uso e diferentes constantes aparecem nos termos das equações para cada sistema de unidades.

Equações de Maxwell

Fonte : *Fundamentals of Physics by Halliday , Resnick , Walker (Fifth Edition)*

Nome	Equação		Significado
Lei de Gauss da Eletricidade	Notação Halliday	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$	Relaciona o fluxo elétrico resultante com a carga envolvida pela superfície
	Notação da Análise Vetorial		
	Forma Diferencial		
Lei de Gauss do Magnetismo	Notação Halliday	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	Não há monopolos magnéticos
	Notação da Análise Vetorial		
	Forma Diferencial		
Lei de Faraday	Notação Halliday	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$	Relaciona o campo elétrico induzido com a taxa de variação do fluxo magnético
	Notação da Análise Vetorial		
	Forma Diferencial		
Lei de Ampère-Maxwell	Notação Halliday	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$	Relaciona o campo magnético induzido à corrente e a variação de fluxo elétrico
	Notação da Análise Vetorial		
	Forma Diferencial		

Notação (Halliday) :

q: carga elétrica	i: corrente elétrica
\vec{E} : campo elétrico	\vec{B} : campo de indução magnético
$d\vec{s}$:diferencial do comprimento de arco na direção da reta tangente	$d\vec{A} = \vec{n} dA$, \vec{n} é o vetor normal unitário à superfície diferencial de área dA
Φ_E , Φ_B : fluxos elétricos e magnético respectivamente	

Equações de Maxwell na forma diferencial :

$$1^a) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \text{Lei de Gauss da Eletricidade}$$

$$2^a) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \text{Lei de Gauss do Magnetismo}$$

$$3^a) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \text{Lei de Faraday}$$

$$4^a) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \text{Lei de Ampère-Maxwell}$$

Dedução das equações de Maxwell na forma diferencial:

A 1ª equação diferencial é obtida usando o teorema da divergência na forma integral da Lei de Gauss, lembrando que a carga q deve ser expressa em termos da densidade de carga ρ como

$$q = \iiint_V \rho \, dV :$$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \, dV$$

Igualando os integrandos das integrais de volume, obtemos a 1ª equação de Maxwell na forma diferencial:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

(É interessante relacionar a existência de $\text{div} \vec{E} \neq 0$ com a existência de fontes, conforme vimos a partir da equação da continuidade.)

Usando agora, o teorema da divergência na forma integral da 2ª equação de Maxwell e lembrando que ela expressa a ausência de **fluxo** magnético através de uma superfície fechada, então a forma diferencial fica:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

a qual expressa matematicamente o fato de que até hoje não se constatou a existência de monopolos magnéticos na natureza.

Para obter a 3ª equação, usaremos o teorema de Stokes e assumiremos que as variáveis temporal e espacial dos campos são independentes.

Parte-se da lei de Faraday na forma integral, onde o **fluxo** magnético Φ_M através de uma superfície aberta é

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS .$$

Assim :

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} \, dS ,$$

onde a última igualdade expressa a independência entre a variável tempo e as variáveis espaciais.

Compare o lado esquerdo com a última igualdade da direita . Como as integrais de superfície são iguais, então os integrandos também são iguais, isto é :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ,$$

ou seja o campo elétrico \vec{E} será um campo de vórtice desde que os campos de indução magnética \vec{B} variem com o tempo.

O procedimento para deduzir a 4ª e última equação de Maxwell é análogo. Parte-se da Lei de Ampère-Maxwell, onde o **fluxo** elétrico Φ_E através de uma superfície aberta , é

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS \quad \text{e a corrente elétrica } i , \quad \text{é } i = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS .$$

Assim:

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS$$

Como todas integrais acima são integrais de superfície, então esta igualdade se mantém para seus integrandos, isto é,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} .$$

Concluimos a dedução das equações de Maxwell , e com isso finalizamos a apresentação dos conteúdos da área I de nossa disciplina.

Integração Vetorial: O Teorema de Stokes

[1] Dar o significado físico do Teorema de Stokes contemplando os conceitos de trabalho e de circulação.

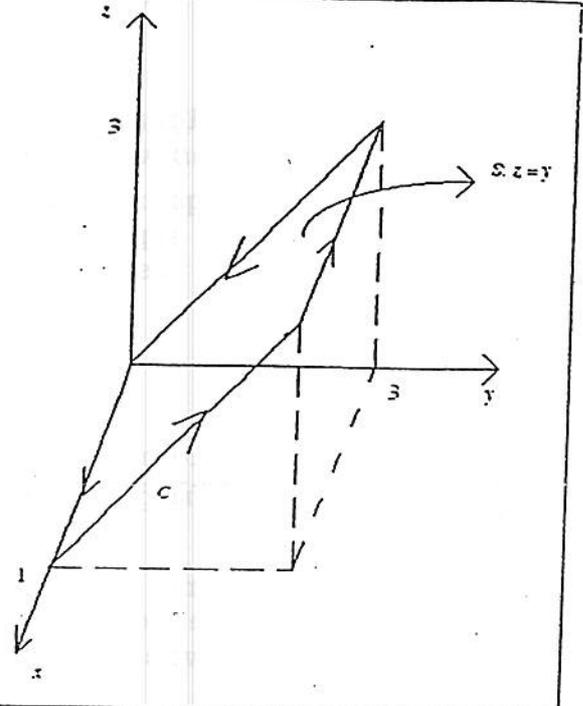
[2] Dado $\vec{F} = 4y\vec{i} + x\vec{j} + 2z\vec{k}$ encontre a maneira mais simples de calcular o fluxo do $\text{rot } \vec{F} (= \vec{\nabla} \times \vec{F})$

através do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$.

R: $-3\pi a^2$

[3] Use o Teorema de Stokes para calcular o trabalho realizado pelo campo de forças

$\vec{F} = x^2\vec{i} + 4xy^3\vec{j} + y^2x\vec{k}$ ao longo da curva C que limita o retângulo no plano $z = y$, dado pelo gráfico ao lado.



R: 90

[4] Calcule a circulação do campo de velocidade $\vec{v} = 3z\vec{i} + 4x\vec{j} + 2y\vec{k}$ ao longo da curva C que limita o parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0$.

R: 16π

[5] "O Teorema de Stokes é uma extensão do Teorema de Green para 3-D, envolvendo superfície S e suas curvas limites C no lugar de regiões planas R limitadas por curvas C ."

Mostre que se $\vec{F}(x, y) = f(x, y)\vec{i} + g(x, y)\vec{j}$, então $\oint_C f dx + g dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA$

Que é o Teorema de Green do Cálculo II.

[6] Use o Teorema de Stokes para mostrar que:

[a] Se $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, então $\oint_C \vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$

[b] $\oint \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{r} = 0$

[7] Use o Teorema da Divergência e o Teorema de Stokes para obter a forma diferencial das equações de Maxwell (consulte a tabela de equações de Maxwell do Halliday.)