Lista 1 – Prof. Diego Marcon

Métodos III – Análise Complexa – Variável Complexa I

06 de Abril de 2017

Lista de exercícios referente às duas primeiras semanas de aula:

- Números complexos (representações e primeiras propriedades);
- Domínios no plano complexo e limites;
- Funções holomorfas e as equações de Cauchy–Riemann;
- Séries de potências.

1 Exercícios do livro do Márcio Soares

- **Capítulo 1:** todos, exceto 20 e 21.
- **Capítulo 2:** somente 1 e 2.
- **Capítulo 3:** todos.
- **Capítulo 4:** todos, exceto 11, 13, 14, 15 e 16.

2 Exercícios do livro do Stein e Shakarchi – Capítulo 1

- **Página 24:** todos, exceto 4, 5, 6, 15 e 22.

3 Exercícios adicionais

No que segue, estamos assumindo que $\Omega = \mathbb{C}$ ou que Ω é uma *região*, isto é, um aberto conexo do plano complexo.

1. Calcule os limites abaixo (se eles existirem) utilizando a definição ou justificando de alguma forma os seus passos (geometricamente/algebricamente/etc):

- $\displaystyle\lim_{z\to 10+i} \frac{z-5}{z(z-i)}$;
- $\displaystyle\lim_{z\to -1} \frac{z+1}{z+1}$;
- $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{z}$;
- $\displaystyle\lim_{z\to 1+i} (z^2+i)$;

- $\lim\limits_{i} \dfrac{(2+i)z^4 - z^2 + 2z}{z+1}$;

2. Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa em $z_0 \in \mathbb{C}$. Mostre que f é necessariamente contínua em z_0.

Dica: Como f é holomorfa em z_0, existe uma função $E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)E(z - z_0)$; dado um $\epsilon > 0$, sempre podemos escolher um $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ apropriado, de tal forma que $|z - z_0| < \delta$ implica em $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.

3. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é dada por $f(z) = c$ para alguma constante complexa $c \in \mathbb{C}$, mostre que f é holomorfa em Ω e que $f'(z) = 0$ utilizando a definição de derivada complexa.

4. Mostre que a função $f(z) = |z|$ não é diferenciável em nenhum ponto.

5. Regra de L'Hospital: Suponha que as funções f e g são analíticas em z_0, e que elas satisfazem $f(z_0) = g(z_0) = 0$ e $g'(z_0) \neq 0$. Verifique que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Utilize essa resultado para calcular o seguinte limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^3 + (1+2i)z^2 + (-1+4i)z - 2}{z^3 + iz^2}.$$

6. Verifique se as funções abaixo são holomorfas e, em caso positivo, indique a região onde isso é válido.

- $f(z) = z^2 + z$;
- $g(z) = 2x^2 + y + i(y^2 - x)$;
- $h(z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - i\dfrac{y}{x^2 + y^2}$;
- $j(z) = Re(z)$;
- $\ell(z) = 4x^2 + 5x - 4y^+9 + i(8xy + 5y - 1)$.

7. Mostre que se f é holomorfa em z_0, então $|f'(z_0)|^2 = u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2$

Dica: Use as equações de Cauchy-Riemann.

8. Mostre que se f é holomorfa em Ω, e se $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$, então $f(z)$ é constante em Ω.

Dica: Use a definição de derivada complexa e as equações de Cauchy-Riemann.

9. Escolha sua função holomorfa preferida; ela pode estar definida em uma região Ω ou no plano complexo inteiro como, por exemplo, $f(z) = e^z$. O que podemos dizer sobre as derivadas de segunda ordem das partes real e imaginária dessa função?

10. Calcule as derivadas de primeira ordem das funções abaixo, indicando cada uma das regras de derivação utilizadas e qual é o domínio onde a função é holomorfa:

a. $f(z) = z^2 e^{z+i}$;

b. $f(z) = e^{iz} - e^{-iz}$;

c. $f(z) = ie^{1/z}$;

d. $f(z) = \dfrac{3e^{2z} - ie^{-z}}{z^2+1}$;

e. $f(z) = \log(z+2) - z^2$;

f. $f(z) = (z+1)\log(z)$;

g. $f(z) = e^z \log(z)$;

h. $f(z) = \log(z^2+1)$;

11. Verifique que a única função inteira que quando restrita ao eixo real é igual a e^x e que satisfaz $f'(z) = f(z)$ para $z \in \mathbb{C}$ é a função exponencial complexa como definida em aula.

Dica: partindo da condição $f'(z) = f(z)$ e do fato de que $f(x+i0) = e^x$, obtenha um par de equações diferenciais que devem ser satisfeitas por u e v; utilizando as equações de Cauchy-Riemann, verifique que a única função *inteira* com essas condições é de fato e^z.

12. Descreva a imagem da curva $y = x$ quando aplicamos a função exponencial, isto é, se $z(t) = t + it$ com $t \in \mathbb{R}$, qual é a curva $w(t) = e^{z(t)}$?

13. Descreva a imagem da curva $\mathcal{C}$ que é a união de quatro curvas $\mathcal{C}_i$, pelo mapa $w = e^z$, em cada um dos casos abaixo:

a) $\mathcal{C}_1 = \{z = z(t) : z(t) = -1 + it\,,\, -\pi < t < 0\}$
$\mathcal{C}_2 = \{z = z(t) : z(t) = t\,,\, -1 \leq t \leq 1\}$
$\mathcal{C}_3 = \{z = z(t) : z(t) = 1 + it\,,\, 0 < t < \pi\}$
$\mathcal{C}_4 = \{z = z(t) : z(t) = t + i\pi\,,\, -1 \leq t \leq 1\}$.

b) $\mathcal{C}_1 = \{z = z(t) : z(t) = -1 + it\,,\, 0 < t < \pi\}$
$\mathcal{C}_2 = \{z = z(t) : z(t) = t\,,\, -1 \leq t \leq 1\}$
$\mathcal{C}_3 = \{z = z(t) : z(t) = 1 + it\,,\, 0 < t < \pi\}$
$\mathcal{C}_4 = \{z = z(t) : z(t) = t + i\pi\,,\, -1 \leq t \leq 1\}$.

c) $\mathcal{C}_1 = \{z = z(t) : z(t) = -1 + it\,,\, -\pi < t < 0\}$
$\mathcal{C}_2 = \{z = z(t) : z(t) = t\,,\, -1 \leq t \leq 1\}$
$\mathcal{C}_3 = \{z = z(t) : z(t) = 1 + it\,,\, -pi < t < 0\}$
$\mathcal{C}_4 = \{z = z(t) : z(t) = t + i\pi\,,\, -1 \leq t \leq 1\}$.

d) $\mathcal{C}_1 = \{z = z(t) : z(t) = -1 + it\,,\, 0 < t < \pi\}$
$\mathcal{C}_2 = \{z = z(t) : z(t) = t\,,\, -1 \leq t \leq 1\}$
$\mathcal{C}_3 = \{z = z(t) : z(t) = 1 + it\,,\, -pi < t < 0\}$
$\mathcal{C}_4 = \{z = z(t) : z(t) = t + i\pi\,,\, -1 \leq t \leq 1\}$.

14. Mostre que, utilizando o ramo principal do logaritmo, $(1+i)^i = e^{-\frac{\pi}{4} + i \log \sqrt{2}}$.

15. Se $c \in \mathbb{C}$ e $f'(z)$ existe para todo $z \in \Omega$, expresse a derivada com respeito a z da função $g(z) = c^{f(z)}$ em termos de derivadas da função potência e da função f.

16. Use as equações de Cauchy-Riemann para verificar que $\cos \bar{z}$ não é holomorfa em nenhuma parte de $\mathbb{C}$. O que podemos dizer sobre $\operatorname{sen} \bar{z}$?

17. Se z^α representa o ramo principal da função potência, determine quem é a derivada as funções abaixo nos pontos indicados:

a. $z^{3/2}$, em $z = 1 + i$;

b. z^{1+i}, em $z = 1 + i\sqrt{3}$;

c. z^{2i}, em $z = i$;

d. $z^{\sqrt{2}}$, em $z = -i$;

18. Descreva como o mapa $f(z) = z^2$ mapeia $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$
Dica: Faça um esboço de como esse mapa age sobre retas verticais e horizontais)

19. Descreva como o mapa $f(z) = \dfrac{1}{z}$ mapeia $\mathbb{C} - \{0\}$ em $\mathbb{C} - \{0\}$
Dica: Faça um esboço de como esse mapa age sobre retas verticais e horizontais; além disso, verifique o que ela faz quando age no interior do círculo unitário $C(0, 1)$, no exterior do círculo unitário $C(0, 1)$ e sobre o círculo unitário $C(0, 1)$).