Lista 2 – Prof. Diego Marcon

Métodos III – Análise Complexa – Variável Complexa I

25 de Abril de 2017

Lista de exercícios referente ao restante da primeira área:

- Integração Complexa
- Independência do caminho
- Teorema Integral de Cauchy e Fórmula Integral de Cauchy
- Consequências e aplicações do TIC e FIC
- Classificação de singularidades isoladas

1 Exercícios do livro do Márcio Soares

- **Capítulo 5:** todos, exceto 20 e 21.
- **Capítulo 6:** do 1 até o 5 e 8 (somente a ordem do polo), 10 (calcule utilizando a Fórmula Integral de Cauchy, não precisa saber o que são resíduos).

2 Exercícios do livro do Stein e Shakarchi – Capítulo 1

- **Página 64:** 1, 2, 3, 4, 6, 7. Adicionais: 11, 12, 13.

3 Mais exercícios

Questão 1. Calcule as integrais ao longo das curvas indicadas utilizando a parametrização dada ou qualquer outra parametrização que venha a ser mais útil:

a. $\displaystyle\int_C (z+3)\,\mathrm{d}z$, ao longo de C descrita parametricamente por $x = 2t$ e $y = 4t - 1$, onde $1 \leq t \leq 3$;

b. $\displaystyle\int_C (2\overline{z}+z)\,\mathrm{d}z$, ao longo de C descrita parametricamente por $x = -t$ e $y = t^2 + 2$, onde $0 \leq t \leq 2$;

c. $\displaystyle\int_C (z^2)\,\mathrm{d}z$, ao longo de C descrita parametricamente por $z(t) = t + it^2$, onde $0 \leq t \leq 1$;

d. $\displaystyle\int_C (z^n)\,\mathrm{d}z$, ao longo do círculo de raio R centrado na origem;

e. $\displaystyle\int_C \frac{z+1}{z}\,\mathrm{d}z$, ao longo do semicírculo de raio 1 orientado positivamente e ligando $z = i$ e $z = -i$;

f. $\displaystyle\int_C |z|^2\,\mathrm{d}z$, ao longo da curva C descrita parametricamente por $x = t^2$ e $y = \frac{1}{t}$, onde $1 \leq t < 2$;

g. $\displaystyle\int_C e^z \, \mathrm{d}z$, ao longo da curva C que é a poligonal formada pela reta ligando $z = 0$ e $z = 2$, e pela reta ligando $z = 2$ e $z = 1 + i\pi$.

Questão 2. Se T denota o triângulo que liga os pontos $z = 0$, $z = 1$ e $z = 1 + i$ orientado positivamente, calcule as integrais abaixo:

a. $\displaystyle\int_T x \, \mathrm{d}z$;

b. $\displaystyle\int_T z^2 \, \mathrm{d}z$;

c. $\displaystyle\int_T \overline{z}^2 \, \mathrm{d}z$;

d. $\displaystyle\int_T (\operatorname{Im} z)^2 \, \mathrm{d}z$.

Questão 3. Ache uma estimativa para o valor absoluto das integrais abaixo ao longo da curva indicada:

a. $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^2+1} \, \mathrm{d}z$, onde C é um círculo de raio 5 centrado na origem;

b. $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2-2i} \, \mathrm{d}z$, onde C é a metade direita do círculo centrado na origem e que liga os pontos $z = -6i$ e $z = 6i$, orientado positivamente;

c. $\displaystyle\int_C (z^3+5) \, \mathrm{d}z$, onde C é a reta que liga os pontos $z = 0$ e $z = 1 + i$.

Questão 4. Use a Fórmula Integral de Cauchy para calcular as integrais abaixo:

a. $\displaystyle\int_C \frac{z}{z^2+9} \, \mathrm{d}z$ onde C é o círculo $|z - 2i| = 4$;

b. $\displaystyle\int_C \frac{z^2-4z+4}{z+i} \, \mathrm{d}z$ onde C é o círculo $|z| = 2$;

c. $\displaystyle\int_C \frac{z+1}{z^4+2iz^3} \, \mathrm{d}z$ onde C é o círculo $|z| = 1$;

d. $\displaystyle\int_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2} \, \mathrm{d}z$ onde γ é curva composta pela união dos círculos $|z| = \dfrac{1}{2}$ e $|z - i| = \dfrac{1}{2}$, sendo que o primeiro está orientado negativamente e o segundo está orientado positivamente (essa é uma espécie de *figura oito*);

e. $\displaystyle\int_C \frac{\cos(z)}{3z-\pi} \, \mathrm{d}z$ onde C é o círculo $|z| = \dfrac{10}{11}$;

f. $\displaystyle\int_C \frac{z^2}{z^2+4} \, \mathrm{d}z$ onde C é o círculo $|z - i| = 2$;

g. $\displaystyle\int_C \frac{z}{(9-z^2)(z+i)} \, \mathrm{d}z$ onde C é o círculo $|z| = 2$;

h. $\displaystyle\int_C \frac{e^{2z}}{z^4} \, \mathrm{d}z$ onde C é o círculo $|z| = 1$.

Questão 5. Calcule as integrais abaixo:

a. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\theta + \operatorname{sen}\theta)\, d\theta;$

b. $\displaystyle\int_0^{\infty} \operatorname{sen}(x^2)\ \mathrm{d}x;$

c. $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos(x^2)\ \mathrm{d}x;$

Questão 6. Sendo f uma função inteira que satisfaz $Im(f(z)) > 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, mostre que $f(z)$ é constante.

Questão 7. Sendo f uma função inteira que satisfaz $Re(f(z)) > 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, mostre que $f(z)$ é constante.

Questão 8. Sendo f uma função inteira que satisfaz $|f(z)| \geq 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$, mostre que $f(z)$ é constante.

Questão 9. Obtenha a expansão em série de Taylor de cada uma das funções abaixo na região indicada:

a. $f(z) = e^z$ para $|z-1| < \infty$;

b. $f(z) = \dfrac{z}{z^4+9}$ para $|z| < \sqrt{3}$;

c. $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ para $|z-i| < \sqrt{2}$;

d. $f(z) = \cos(z)$ para $|z-\pi/2| < \infty$ (Dica: $\cos(z) = -\operatorname{sen}(z-\pi/2)$);

e. $f(z) = \cosh(z)$ para $|z| < \infty$.

Questão 10. Obtenha a expansão em série de Laurent de cada uma das funções abaixo na região indicada:

a. $f(z) = e^{1/z}$ para $0 < |z| < \infty$;

b. $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)^2}$ para $0 < |z-i| < \infty$;

c. $f(z) = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z-2}$ para $1 < |z| < 2$;

d. $f(z) = z^2 \operatorname{sen} z$ para $0 < |z| < \infty$;

e. $f(z)\dfrac{e^z}{(z+1)^2}$ para $0 < |z+1| < \infty$;

f. $f(z)\dfrac{z+1}{z-1}$ para $1 < |z| < \infty$.

Questão 11. Obtenha duas expansões em série de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{z^2(1-z)}$, indicando a região de validade de cada uma delas.

Questão 12. Obtenha duas expansões em série de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{z(1+z^2)}$, indicando a região de validade de cada uma delas.

Questão 13. Classifique o tipo de singularidades isoladas de cada uma das funções que aparecem nas questões 10, 11 e 12.

Questão 14. Para cada uma das funções abaixo, verifique que a singularidade isolada é removível.

a. $f(z) = \dfrac{e^{2z} - 1}{z}$;

b. $f(z) = \dfrac{z^3 - 4z^2}{1 - e^{z^2/2}}$;

c. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(4z) - 4z}{z^2}$;

d. $f(z) = z\cos(1/z)$.

Questão 15. Determine quem são os zeros de cada uma das funções e a respectiva ordem:

a. $f(z) = (z - i + 2)^2$;

b. $f(z) = z^4 + z^2$;

c. $f(z) = \operatorname{sen}^2(z)$;

d. $f(z) = ze^z - z$;

e. $f(z) = z - \operatorname{sen}(z)$;

f. $f(z) = z(1 - \cos^2(z))$;

g. $f(z) = 1 - e^{(z-1)}$.

Questão 16. Determine os pólos de cada uma das funções e a respectiva ordem:

a. $f(z) = \tan(z)$;

b. $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$;

c. $f(z) = 5 - \dfrac{6}{z^2}$;

d. $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2}$;

e. $f(z) = \dfrac{\cos(z) - \cos(2z)}{z^6}$;

f. $f(z) = \dfrac{1}{1 + e^z}$;

g. $f(z) = \dfrac{3z - 1}{z^2 + 2z + 5}$.

Questão 17. Calcule as integrais abaixo:

a. $\displaystyle\int_C z^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) \mathrm{d}z$ onde C é o círculo $|z| = 1$ orientado positivamente;

b. $\displaystyle\int_C e^{\frac{1}{z}} \mathrm{d}z$ onde C é o círculo $|z| = 1$ orientado positivamente;

c. $\displaystyle\int_C \frac{1}{z(z-2)^4} \mathrm{d}z$ onde C é o círculo $|z-2| = 1$ orientado positivamente;

d. $\displaystyle\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} \mathrm{d}z$ onde C é o círculo $|z-2| = 1$ orientado positivamente;

e. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} \mathrm{d}x$;

f. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} \mathrm{d}x$, com $n \in \mathbb{N}$;

g. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+b^2} \mathrm{d}x$, onde $a, b > 0$;

4 Exercício adicional

O objetivo deste exercício é comparar o Teorema visto em aula:

Teorema 1. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ contínua, onde Ω é aberto e conexo. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) f *possui um primitiva;*

(ii) $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ *para qualquer caminho fechado simples (nem precisa ser simples);*

(iii) $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ *é independente do caminho C, depende apenas dos pontos inicial e final.*

No caso de f possuir uma primitiva, podemos calcular

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F\big(B\big) - F\big(A\big). \tag{1}$$

com o seu equivalente no Cálculo Vetorial de duas (ou mais) variáveis.

A integral de linha de um campo de vetores $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definida como: para C uma curva parametrizada por $\vec{r}(t)$, para $t \in [a, b]$, definimos (o ponto denota o produto escalar)

$$\int_C \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \vec{f}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \vec{r}\,'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Escrevendo explicitamente,

$$\int_C \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b \Big(f_1\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + f_2\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\Big)\,\mathrm{d}t.$$

Outra forma ainda seria

$$\int_C \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b f_1 \mathrm{d}x + f_2 \mathrm{d}y.$$

Quando a curva C é fechada, também escrevemos

$$\oint_C \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r}. \qquad \Big[\text{intuitivamente } \mathrm{d}\vec{r} = \vec{r}\,'(t)\,\mathrm{d}t\Big]$$

Interpretação como o trabalho realizado por uma força

O trabalho realizado por uma força constante $\vec{f}$ no deslocamento de um corpo ao longo de um segmento de reta parametrizado por $\vec{d}$ é

$$W = \|\vec{f}\|\|\vec{d}\|\cos\theta = \vec{f} \cdot \vec{d}, \qquad \text{onde } \theta = \text{ ângulo entre } \vec{f} \text{ e } \vec{d}.$$

Se pensamos no movimento ao longo de uma curva parametrizada por $\vec{r}(t)$, a potência instantânea (ou taxa do trablaho) realizada por uma força não necessariamente constante é calculada na direção do tangente como $\vec{f}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \vec{r}\,'(t)$ e o trabalho:

$$W = \int_a^b \vec{f}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \vec{r}\,'(t)\,\mathrm{d}t = \int_C \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

Campos conservativos e a independência do caminho

Em geral, a integral de linha pode depender do caminho que liga dois pontos (e não simplesmente dos extremos da curva).

Exercício 1. Consideramos duas curvas

$$C_1 = \{\vec{r}_1(t) = (t,t), \quad t \in (0,1]\}$$

$$C_2 = \{\vec{r}_2(t) = (t,t^2), \quad t \in (0,1]\}$$

e o campo vetorial $\vec{f}(x,y) = (0,xy)$. Calcule as integrais e veja que são diferentes.

A dependência do caminho do exemplo acima nunca ocorreria em um campo conservativo.

Teorema 2. *Suponhamos que $\vec{f}$ é um campo cujas componentes e suas derivadas parciais são contínuas. Então são equivalentes:*

(i) *$\vec{f}$ é um campo conservativo, isto é, $\vec{f} = \vec{\nabla}\varphi$ para alguma função potencial $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;*

(ii) *$\displaystyle\oint_C \vec{f}(x,y) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$ para qualquer caminho fechado;*

(iii) *$\displaystyle\int_C \vec{f}(x,y) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ é independente do caminho C, depende apenas dos pontos inicial e final.*

No caso de f possuir uma primitiva, podemos calcular

$$\int_C \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A). \tag{2}$$

Exercício 2. Imitar o raciocínio visto em aula, na prova do Teorema 1, para provar este teorema.

Você precisará da regra da cadeia do Cálculo Vetorial:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\varphi\big(\vec{r}(t)\big)\Big) = \nabla\varphi\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \vec{r}\,'(t)$$