Lista 1 – Equações Diferenciais Parciais

Prof. Diego Marcon

Lista de exercícios referente à primeira área do curso. Contempla:

- Definição, exemplos e primeiras propriedades de Espaços de Sobolev.
- Densidade das funções suaves.
- Extensões e o operador traço.
- Imersões compactas e desigualdades funcionais.
- Desigualdade de Poincaré.
- Diferenciabilidade em quase todo ponto.
- Definições e propriedades de soluções fracas para equações elípticas.
- Teorema de Lax-Milgram, existência de soluções fracas e a Alternativa de Fredholm.

Material da lista. Esta lista cobre quase todo o material do Capítulo 5 e até a Seção 6.2 do Capítulo 6 do Evans. Além disso, alguns poucos tópicos adicionais foram vistos de referências como Gilbarg-Trudinger ou Evans-Gariepy; estas podem ser acompanhadas por anotações de aula e notas de aula que estou preparando.

Conforme já mencionado em aula, os Exercícios do Evans, segunda edição, devem ser todos feitos, mas com exceção dos Exercícios 20 e 21, que precisam da Subseção 5.8.5 (Fourier transform methods) e esta não foi vista em aula. As únicas subseções do Capítulo 5 que não devem ser consideradas para esta lista são as Subseções 5.8.5 (Fourier transform methods) e 5.9.2 (Spaces involving time) Algumas poucas outras não consideradas em aula fazem parte de um roteiro nesta lista de exercícios; ver, por exemplo, Exercícios 8, 12, 13 e 14.

Exercício 1. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aberto. Mostre que $u \in W^1(\Omega)$ se, e somente se, todo $x \in \Omega$ possui uma vizinhança $V_x \subseteq \Omega$ em que $u \in W^1(V_x)$. Em outras palavras, uma função localmente integrável é fracamente diferenciável em um aberto se, e somente se, é fracamente diferenciável em alguma vizinhança de cada um dos pontos de seu domínio.

Exercício 2. Este exercício complementa o Exercício 17 do Capítulo 5 do Evans. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 por partes em $\mathbb{R}$ e tal que $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Mostre que, se $u \in W^1(\Omega)$, então $f \circ u \in W^1(\Omega)$ e que, além disso, denotando por L o conjunto de pontos em que f não é diferenciável, temos

$$\nabla(f \circ u) = \begin{cases} (f' \circ u)\nabla u, & \text{se } u \notin L \\ 0, & \text{se } u \in L. \end{cases}$$

<u>Dica:</u> Reduzir ao caso em que f possui somente um ponto de não-diferenciabilidade na origem, separar nos casos em que u é positiva e negativa, e utilizar os Exercícios 17 e 18 do Evans.

Exercício 3. Considere as normas de um vetor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ definidas como:

$$|x|_1 := |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_N|$$

$$|x|_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}$$

$$|x|_s := (|x_1|^s + |x_2|^s + \cdots + |x_N|^s)^{1/s}$$

$$|x|_\infty := \max\Big\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|\Big\}$$

onde $s \in (1, +\infty)$. Mostre que estas normas são equivalentes em $\mathbb{R}^N$, obtendo explicitamente as melhores constantes possíveis em cada caso.

Em seguida, fixados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aberto e $p > 1$, utilize o resultado acima para obter constantes explícitas de equivalência para as seguintes normas equivalentes do Espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\partial_1 u\|_{L^p(\Omega)} + \cdots + \|\partial_d u\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\sqrt{\|u\|^2_{L^p(\Omega)} + \|\partial_1 u\|^2_{L^p(\Omega)} + \cdots + \|\partial_d u\|^2_{L^p(\Omega)}}$$

$$\Big(\|u\|^s_{L^p(\Omega)} + \|\partial_1 u\|^s_{L^p(\Omega)} + \cdots + \|\partial_d u\|^s_{L^p(\Omega)}\Big)^{1/s}$$

$$\Big(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{1/p}$$

$$\max\Big\{\|u\|_{L^p(\Omega)}, \|\partial_1 u\|_{L^p(\Omega)}, \dots, \|\partial_d u\|_{L^p(\Omega)}\Big\}.$$

Observe que tais constantes devem depender apenas de p e de d.

Exercício 4. Mostre que, no espaço de Banach $W^{1,p}_0(\Omega)$, as normas

$$\|u\|_1 := \Big(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{1/p} \quad \text{e} \quad \|u\|_2 := \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

são equivalentes. Justifique que o mesmo resultado não é válido em $W^{1,p}(\Omega)$.

Exercício 5. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ um conjunto aberto. Nós dizemos que uma função $u \in L^1(\Omega)$ é de variação limitada quando

$$\sup\left\{\int_\Omega u(x)\,\mathrm{div}\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x;\ \varphi \in C^1_c(\Omega) \text{ e } \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \le 1\right\} < +\infty.$$

O supremo acima é denotado por $|\nabla u|(\Omega)$ e denominado variação total de u. Seja

$$\mathrm{VL}(\Omega) := \{u \in L^1(\Omega);\ |\nabla u|(\Omega) < +\infty\}$$

o conjunto das funções de variação limitada em Ω.

(i) Mostre que $\mathrm{VL}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{\mathrm{VL}(\Omega)} := \|u\|_{L^1(\Omega)} + |\nabla u|(\Omega).$$

(ii) Prove que o espaço de Sobolev $W^{1,1}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $\mathrm{VL}(\Omega)$.

(iii) Dada $u \in \mathrm{VL}(\Omega)$, mostre que existe $u_n \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$ tal que

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \int_\Omega |\nabla u_n(x)|\,\mathrm{d}x \longrightarrow |\nabla u_n|(\Omega).$$

Dica: Adaptar a prova de densidade feita para os Espaços de Sobolev.

Exercício 6. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ um aberto limitado e seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1(\Omega)$.

(i) Mostre que $f \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, isto é, f é localmente de Lipschitz em Ω.

(ii) Se, adicionalmente, $f \in C^1(\overline{\Omega})$, então $f \in C^{0,1}(\Omega)$.

Este exercício motiva a caracterização $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d) \iff u \in C^{0,1}(\mathbb{R}^d)$ vista em aula.

Exercício 7. Nós provamos em aula que, se $u \in W^1(\Omega)$ e $v \in C^1(\Omega)$ são funções tais que $uv \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e $u\nabla v + v\nabla u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, então $uv \in W^1$ com derivada fraca dada por

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u.$$

Mostre que o mesmo resultado vale com a hipótese $v \in W^1(\Omega)$.

Exercício 8. O objetivo deste exercício é generalizar as Desigualdades de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev e de Morrey para o caso $k > 1$. A ideia basicamente é iterar os resultados válidos para $k = 1$ que já foram provados em aula. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um aberto limitado com $\partial\Omega \in C^1$.

(i) Mostre que, se $u \in W^{k,p}(\Omega)$ com $kp < d$, então

$$u \in L^q(\Omega) \quad \text{onde} \quad q := \frac{pd}{d - kp}.$$

Note que $q = p^*$ no caso $k = 1$. Além disso, vale a estimativa

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c \cdot \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

com constante $c > 0$ independente de u.

Dica: Iterar a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev.

(ii) Seja $u \in W^{k,p}(\Omega)$ com $kp > d$. Supondo $d \cdot p^{-1} \notin \mathbb{N}$, denote por $k_0 \in \mathbb{N}$ sua parte inteira e por $\alpha \in (0,1)$ sua parte fracionária. Denotando ainda $\gamma := 1 - \alpha \in (0,1)$, mostre que

$$u \in C^{k-k_0-1,\gamma}(\Omega)$$

com estimativa

$$\|u\|_{C^{k-k_0-1,\gamma}(\Omega)} \leq c \cdot \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

cuja constante $c > 0$ independente de u.

Dica: Observe que $k_0 < d \cdot p^{-1} < k_0 + 1$ e combine o item anterior com a Desigualdade de Morrey.

(iii) Seja $u \in W^{k,p}(\Omega)$ com $kp > d$ e $k_0 := d \cdot p^{-1} \in \mathbb{N}$. Mostre que, para qualquer $\beta \in (0,1)$, tem-se

$$u \in C^{k-k_0-1,\beta}(\Omega)$$

com estimativa

$$\|u\|_{C^{k-k_0-1,\beta}(\Omega)} \leq c \cdot \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

cuja constante $c > 0$ independente de u.

Exercício 9. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ um aberto limitado com $\partial\Omega \in C^1$.

(i) Mostre que, para $kp < d$, tem-se $W^{k,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$, para todo $q < pd(d - kp)^{-1}$. Comparar com expoente do exercício anterior e com as relações obtidas em aula para o caso $k = 1$ (Desigualdade de Sobolev a Compacidade de Rellich-Kondrachov).

(ii) Mostre que, se $kp > d$ com $d \cdot p^{-1} \notin \mathbb{N}$, então $W^{k,p}(\Omega) \subset\subset C^{k-k_0-1,\alpha}(\Omega)$, para qualquer $\alpha < \gamma$, onde $\gamma > 0$ é como no item (ii) do Exercício 8.

Exercício 10. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aberto limitado com $\partial\Omega \in C^1$ e seja $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Mostre que, para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $\beta \in \mathbb{N}^d$ com $0 < |\beta| < k$, existe $c_\varepsilon = c(k, \Omega, \varepsilon) > 0$ tal que

$$\|\partial^\beta u\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + c_\varepsilon \|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Dica: Usar argumento por contradição e o exercício anterior.

Exercício 11. Mostre a seguinte versão da Desigualdade de Morrey. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ um aberto limitado com $\partial\Omega \in C^1$. Para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $p > d$, tem-se $u \in C^{0,1-\frac{d}{p}}(\overline{\Omega})$ e, para quaisquer $x \in \Omega$ e $r > 0$,

$$\operatorname*{osc}_{\Omega \cap B_r(x)} u \leq c\, r^{1-\frac{d}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(B_r(x))},$$

onde $c > 0$ depende apenas de p e de d, mas não de u nem de r.

Dica: Lembre que a oscilação de u em um subconjunto $A \subseteq \Omega$ é definida por

$$\operatorname*{osc}_A u := \sup \Big\{ u(x) - u(y);\ x, y \in A \Big\}.$$

Exercício 12. Conforme enunciamos em aula, se $p \in [1, +\infty)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ é um aberto limitado com $\partial\Omega \in C^1$, as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) O traço de $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é a função nula em $\partial\Omega$.

(b) Existe uma sequência de funções $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \longrightarrow u$ em $W^{1,p}$.

Em particular, este exercício implica que o espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ pode ser definido por qualquer das caracterizações abaixo:

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)} = \big\{u \in W^{1,p}(\Omega);\ Tu = 0 \in L^p(\partial\Omega)\big\} = \operatorname{Nuc} T.$$

Neste exercício, você deve seguir o roteiro abaixo para provar a equivalência destas afirmações. Este é o roteiro sugerido pela prova do Teorema 2 da Seção 5.5 do livro do Evans.

(i) Mostre diretamente que $(b) \implies (a)$; esta é a implicação "mais fácil".

(ii) Supondo que $Tu = 0$, mostre que é possível reduzir a demonstração de que $(a) \implies (b)$ ao caso em que $u \in W^{1,p}(\mathbb{H})$ é uma função de traço zero e suporte compacto em $\overline{\mathbb{H}}$, onde $\mathbb{H} := \mathbb{R}^d \cap \{x_d > 0\}$ é o semi-espaço superior.

(iii) Suponhamos que $u \in W^{1,p}(\mathbb{H})$ é uma função de traço zero e suporte compacto em $\overline{\mathbb{H}}$, como no item anterior. Escrevendo $x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^d \simeq \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$, mostre que, para quase todo $x_d > 0$, vale

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \big|u(x', x_d)\big|^p \,\mathrm{d}x' \le c x_d^{p-1} \int_0^{x_d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \big|\nabla u(x', x_d)\big|^p \,\mathrm{d}x' \,\mathrm{d}t.$$

<u>Dica:</u> Justificar que, para o caso do semi-espaço é possível aproximação por funções suaves $u_m \in C^1(\overline{\mathbb{H}})$. Utilizar o Teorema Fundamental do Cálculo para mostrar o resultado para u_m e, finalmente, justificar que se pode fazer $m \to +\infty$.

(iv) Considere uma função de corte $\xi \in C^\infty(\mathbb{R})$ com as propriedades

$$\begin{cases} \xi \equiv 1 \text{ em } [-1, 1], \\ \xi \equiv 0 \text{ em } \mathbb{R} \setminus [-2, 2], \\ 0 \le \xi \le 1. \end{cases}$$

Em seguida, para $x \in \mathbb{H}$, denote $\xi_m(x) = \xi(m x_d)$ e defina

$$w_m := u(x)\big(1 - \xi_m(x)\big).$$

Descreva esta função geometricamente e mostre que $w_m \longrightarrow u$ em $W^{1,p}(\mathbb{H})$.

(v) Finalmente, por molificação, mostre que existe $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \longrightarrow u$ em $W^{1,p}$.

Exercício 13. Lembra que a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev afirma que, para $p \in [1, d)$ e $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, tem-se

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le c\, \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

onde $p^* := pd(p-d)^{-1}$. No entanto, o resultado deixa de ser verdade no caso limite $p = d$, como pedimos para justificar no item (i) abaixo. O espaço das funções de oscilação média limitada (OML) é um possível substituto neste caso. Nós dizemos que uma função $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ tem oscilação média limitada, e escrevemos $u \in \mathrm{OML}(\mathbb{R}^d)$, quando

$$[u]_{\mathrm{OML}(\mathbb{R}^d)} := \sup_{B_r(x) \subset \mathbb{R}^d} \left\{ \fint_{B_r(x)} |u(y) - (u)_{x,r}| \,\mathrm{d}y \right\} < +\infty.$$

(i) Encontre $u \in W^{1,d}(\mathbb{R}^d)$ tal que $u \notin L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(ii) Mostre que, se $u \in W^{1,d}(\mathbb{R}^d)$, então $u \in \mathrm{OML}(\mathbb{R}^d)$ com a estimativa

$$[u]_{\mathrm{OML}(\mathbb{R}^d)} \le c\, \|\nabla u\|_{L^d(\mathbb{R}^d)}.$$

Exercício 14. Neste exercício, vamos obter uma variante das desigualdades obtidas em aula, conhecida como Desigualdade de Hardy. Este material pode ser encontrado na Subseção 5.8.4 da segunda edição do Evans, mas seria interessante você tentar seguir o roteiro antes de fazer a leitura da seção; em seguida, ler a seção e comparar com o que foi feito.

O objetivo é provar o seguinte: se $d \geq 3$, $r > 0$ e $u \in H^1\big(B_r(0)\big)$, então

$$x \in B_r(0) \longmapsto \frac{u(x)}{|x|} \in \mathbb{R}$$

pertence a $L^2\big(B_r(0)\big)$ e tem-se

$$\int_{B_r(0)} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2}\,\mathrm{d}x \leq c \int_{B_r(0)} \left(|\nabla u(x)|^2 + \frac{|u(x)|^2}{r^2}\right) \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Prove (1) seguindo os passos indicados abaixo:

(i) Suponha inicialmente que u é suave. Observe que, pelo Exercício $1(iv)$ da Lista Zero, temos

$$\nabla\left(\frac{1}{|x|}\right) = -\frac{x}{|x|^3} \quad \text{de modo que} \quad \frac{u(x)^2}{|x|^2} = -\nabla\left(\frac{1}{|x|}\right)\cdot\frac{u(x)^2}{|x|}.$$

Em seguida, aplique o Teorema da Divergência, Exercício $5(i)$ da Lista Zero, com $|x|^{-1}$ no lugar de u e com $u(x)^2 x/|x|$ no lugar de F para obter

$$(2-d)\int_{B_r(0)} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{B_r(0)} u(x)\nabla u(x)\cdot\frac{x}{|x|^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{r^2}\int_{\partial B_r(0)} |u(x)|^2\,\mathrm{d}\sigma(x).$$

Argumente por densidade que esta identidade vale para qualquer $u \in H^1\big(B_r(0)\big)$.

(ii) Inicialmente, suponha novamente u suave, aplique o Teorema da Divergência para o campo de vetores $F(x) := u(x)^2 x$ e utilize Cauchy-Schwarz para obter

$$r\int_{\partial B_r(0)} u(x)^2\,\mathrm{d}\sigma(x) \leq c\int_{B_r(0)} \Big(r^2|\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Em seguida, por densidade, justifique que esta última desigualdade vale para qualquer $u \in H^1\big(B_r(0)\big)$.

(iii) Juntando as desigualdades obtidas nos itens anteriores, prove (1).

Exercício 15. Neste problema, indicamos um método alternativo ao Teorema de Lax-Milgram para provar a existência de soluções fracas para equações diferenciais parciais como às que estudamos em aula (e até outras mais gerais). Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um aberto limitado com fronteira $\partial\Omega \in C^1$.

(i) Dada uma função $f \in L^2(\Omega)$, seja $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ o func(ional (não-linear) definido por

$$J(u) := \int_\Omega \Big(\tfrac{1}{2}\,|\nabla u(x)|^2 - f(x)u(x)\Big)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Suponhamos que u é um minimizante de J em $H_0^1(\Omega)$, isto é, suponhamos que $J(u) \leq J(v)$, para qualquer $v \in H_0^1(\Omega)$. Prove que u é uma solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

<u>Dica:</u> Fixados $\varepsilon > 0$ e $v \in H_0^1(\Omega)$, utilize que

$$\frac{J(u+\varepsilon v) - J(u)}{\varepsilon} \geq 0.$$

Simplificando a expressão e fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$, obtemos uma desigualdade, semelhante à igualdade que define soluções fracas, válida para qualquer $v \in H_0^1(\Omega)$. Conclua observando que a desigualdade obtida pode ser aplicada com a função $-v$ no lugar de v.

(ii) Generalize o item anterior, minimizando o funcional

$$J(u) := \int_\Omega \Big(\tfrac{1}{2} \Big\langle A(x)\nabla u(x), \nabla u(x) \Big\rangle - f(x)u(x) \Big) \, \mathrm{d}x \tag{3}$$

no espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$. Mais precisamente, prove que minimizantes são soluções fracas da equação linear

$$-\operatorname{div}\Big(A(x)\nabla u(x)\Big) = f(x) \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

(iii) Generalize ainda mais e mostre que minimizantes de

$$J(u) := \int_\Omega L\Big(\nabla u(x), u(x), x\Big) \, \mathrm{d}x,$$

onde $L : \mathbb{R}^d \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, denominada o Lagrangiano do sistema, são soluções fracas de

$$-\operatorname{div}_x \big(\partial_p L\big(\nabla u(x), u(x), x\big)\big) = \partial_z L\big(\nabla u(x), u(x), x\big) \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Este exercício de fato mostra uma maneira alternativa de provar a existência de soluções. Uma vez que se consegue mostrar a existência de minimizantes para o funcional, tipicamente através de técnicas do cálculo de variações, automaticamente este exercício mostra que tal minimizante é uma solução do respectivo problema. Este é estratégia é conhecida como método (ou técnica) variacional.