UFRGS – Instituto de Matemática
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT 01345 – Geometria II
Prof. Diego Marcon Farias

1	2	3	4	Total

Nome: ________________________________ **Cartão:** __________ **Turma:** U

Prova Unidade II – 26 de Junho de 2015

Questão 1. (2,0 pontos) Prove que o volume $V(a,b,c)$ de um paralelepípedo de arestas a, b e c é o produto das medidas das arestas

$$V(a,b,c) = a \cdot b \cdot c,$$

para quaisquer números reais a, b e c. Enuncie todos os axiomas necessários e utilize (sem demonstração) o seguinte lema fundamental:

Lema. Suponhamos que $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ satisfaz

(i) $f(x) < f(y)$, para todos $x, y \in [0, +\infty)$ e

(ii) $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in [0, +\infty)$.

Então

$$f(r \cdot x) = r \cdot f(x), \text{ para todo } r > 0 \text{ e todo } x \in [0, +\infty).$$

Axioma 1. Sólidos congruentes têm volumes iguais.

Axioma 2. Se um sólido S é união de dois outros S_1 e S_2 que não têm pontos interiores em comum (mas podem possivelmente ter interseção na superfície), então o volume de S é a soma dos volumes de S_1 e S_2.

Sejam a, b e c números reais quaisquer. Inicialmente, fixe b e c. Pelos axiomas, temos que $V(2, b, c) = V(1, b, c) + V(1, b, c) = 2V(1, b, c)$. O segundo axioma é utilizado quando decompomos o paralelepípedo de arestas $2, b$ e c em dois de arestas $1, b$ e c e somamos os volumes. O Axioma 1 é utilizado quando escrevemos que cada uma das partes tem o mesmo volume $V(1, b, c)$. Repetindo n vezes esse processo, obtemos que

$$V(n, b, c) = n \cdot V(1, b, c).$$

Os axiomas também garantem que a função volume, como acima, é crescente (adicionar qualquer "pedaço" de sólido aumentará o volume). Portanto, podemos aplicar o lema acima, que garante que n pode ser substituido por qualquer valor real. Em particular,

$$V(a, b, c) = a \cdot V(1, b, c),$$

para qualquer a real.

O argumento acima não é particular da primeira variável. Podemos repetir nas duas seguintes e obtemos

$$V(a, b, c) = a \cdot V(1, b, c) = a \cdot b \cdot V(1, 1, c) = a \cdot b \cdot c \cdot V(1, 1, 1),$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. O valor $V(1, 1, 1)$ é nossa unidade de medida. Por exemplo, se nossa medida de comprimento é cm (centímetro), definimos $V(1, 1, 1) = 1\ cm^3$ e temos

$$V(a, b, c) = a \cdot b \cdot c\ cm^3.$$

Questão 2. (2,0 pontos) Pediu-se para calcular o volume de um cone circular reto, sabendo-se que as dimensões da geratriz, do raio da base e da altura são, respectivamente, $r + a$, r e $r - a$, para valores $r > a > 0$. Por engano, ao se calcular o volume do cone, usou-se a fórmula do volume do cilindro circular reto de mesmo raio e de mesma altura do cone. O erro obtido foi de $4\pi\ m^3$. Encontre o raio e a altura do cone.

A partir das informações dadas, podemos concluir:

1. $h = r - a, r$ e $g = r + a$ formam um triângulo retângulo; logo,

$$(r+a)^2 = r^2 + (r-a)^2 \ \Rightarrow\ 4ra = r^2 \ \overset{r \neq 0}{\Rightarrow}\ r = 4a.$$

2. Volume do cone (como se deve calcular): $V_{\text{cone}} = \dfrac{\pi r^2 h}{3} = \dfrac{\pi r^2 (r-a)}{3}$.

3. Volume do cone (calculado errado como se fosse um cilindro): $V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h = \pi r^2 (r-a)$.

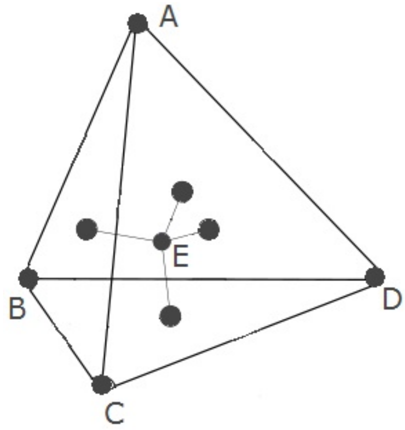
Como o erro obtido foi $4\pi\ m^3$, tem-se

$$V_{\text{cilindro}} - V_{\text{cone}} = 4\pi \ \Rightarrow\ \frac{2\pi r^2 (r-a)}{3} = 4\pi.$$

$$\Rightarrow r^2(r-a) = 6 \ \overset{r=4a}{\Rightarrow}\ (4a)^2 3a = 6 \ \Rightarrow\ a^3 = \frac{1}{8} \ \Rightarrow\ a = \frac{1}{2}.$$

Portanto, $r = 2$, $h = r - a = 3/2$ e $g = r + a = 5/2$.

Questão 3. (2,0 pontos) Prove que em um tetraedro regular, a soma das distâncias de um ponto interior qualquer às quatro faces é igual à altura do tetraedro.



Sugestão: A distância do ponto interior E a uma das faces é a altura de uma pirâmide que está contida no tetraedro.

A partir do ponto E e de uma das faces, podemos construir uma pirâmide, que por definição de distância de ponto a plano, tem por altura a distância de E até a face.

Dessa forma, construimos quatro pirâmides: $ABCE$, $ACDE$, $ABDE$ e $BCDE$. Introduzimos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} a &= d(E, ABCE), \\ b &= d(E, ACDE), \\ c &= d(E, ABDE), \\ d &= d(E, BCDE). \end{aligned}$$

Agora, cada uma dessas pirâmides têm bases congruentes (faces de tetraedro que é regular) de área S. A soma dos volumes das pirâmides é igual ao volume do tetraedro. Se a altura do tetraedro é denotada por h, temos

$$\frac{S \cdot a}{3} + \frac{S \cdot b}{3} + \frac{S \cdot c}{3} + \frac{S \cdot d}{3} = \frac{S \cdot h}{3}.$$

Portanto,

$$a + b + c + d = h.$$

Questão 4. (2,0 pontos)

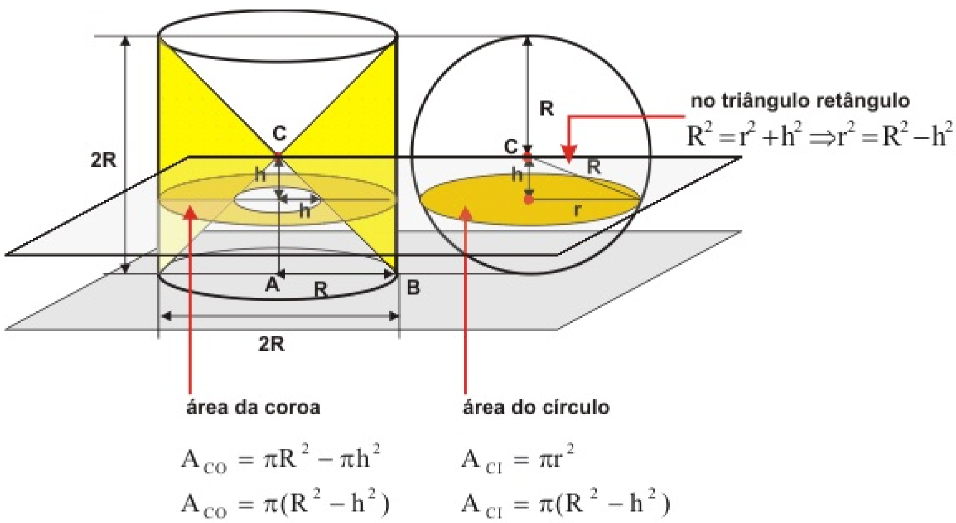
(a) Enuncie o Princípio de Cavalieri.

(a) Prove que o volume de uma esfera de raio R é

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

(a) Sejam dois sólidos S_1 e S_2. Suponhamos que ambos estão situados sobre um mesmo plano α. Não perdemos generalidade, pois o Axioma 1 (enunciado no exercício 1) garante que sólidos congruentes tem o mesmo volume. Logo, é possível transladar os sólidos de modo a tê-los sobre um mesmo plano, sem alterar o volume. O Princípio de Cavalieri afirma que: Se qualquer plano paralelo a α interseciona S_1 e S_2 em regiões do plano de mesma área, então o volume de S_1 é igual ao volume de S_2.

(b) Vamos utilizar o Princípio de Cavalieri. Consideramos uma esfera de raio R. A afirmação é que o volume será igual ao volume do sólido que é construido retirando dois cones de um cilindro, como na figura. É importante que a base do cilindro seja um círculo de raio R (igual ao da esfera) e que altura do cilindro seja igual a $2R$. Os cones tem base igual à do cilindro e altura R. Considere uma seção paralela à base do cilindro. Então as áreas das seções são iguais, como segue:



Isso mostra que qualquer seção corta os sólidos em figuras de mesma área. Pelo Princípio de Cavalieri, os volumes devem ser os mesmos. Portanto:

$$\begin{aligned} V_{\text{esfera}} &= V_{\text{cilindro}} - 2V_{\text{cone}} \\ &= \pi R^2 \cdot 2R - 2\frac{\pi R^2 \cdot R}{3} \\ &= 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3} \\ &= \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned}$$