Lista 2 – Prof. Diego Marcon

Métodos Aplicados de Matemática I

26 de Abril de 2017

Lista de exercícios referente ao restante da primeira área da nossa disciplina:

- Campos de direções e análise de equações autônomas
- Teoria de Existência e Unicidade de soluções
- Modelagem com equaçõe de primeira ordem
- Equações lineares de segunda ordem
- EDOLH com coeficientes constantes
- Método dos Coeficientes a determinar e de variação dos parâmetros
- Equação de Cauchy-Euler

1 Exercícios do livro do Zill

- **Seção 2.1:** 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 39.
- **Seção 1.3:** 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 24, 25, 31.
- **Seção 3.1:** 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 41, 42, 43, 44, 45.
- **Seção 3.2:** 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 31, 35.
- **Seção 4.1:** 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 21, 22, 23, 25, 29, 31, 33, 35, 37, 39.
- **Seção 4.2:** 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21.
- **Seção 4.3:** 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 51.
- **Seção 4.4:** 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41.
- **Seção 4.6:** 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 30, 31, 33.
- **Seção 4.7:** 1, 3, 7, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 31, 33, 34.

2 Exercícios adicionais

É possível que alguns exercícios sejam muito parecidos ou repetidos com os do Zill.

Questão 1. (Paraquedista) Um modelo mais preciso de queda de corpos inclui a resitência do ar; nesse caso, a EDO que obteremos a partir da segunda lei de Newton é

$$m\frac{dv}{dt} = mg - F_r$$

onde g é a aceleração da gravidade (que podemos supor ser constante e igual a $9.8\,m/s^2$) e F_r representa a força de resistência do ar.

Se um paraquedista pula de uma grande altura (uma ponte ou um prédio muito alto, por exemplo) e se ele abre seu paraquedas após 10 segundos, determine:

1. a velocidade do paraquedista após 15 segundos e
2. a velocidade terminal do paraquedista,

sabendo que:

- A massa do paraquedas somada com a massa do paraquedista é de $80kg$;
- A resistência do ar com o paraquedas fechado vale $\dfrac{1}{2}v$ e com o paraquedas aberto vale $10v$.

Questão 2. Em cada um dos problemas de valor inicial abaixo, determine o maior intervalo possível onde a solução pode existir:

a. $t(t-4)y'' + 3ty + 4y = 2\,, \quad y(3) = 0\,, \quad y'(3) = -1$;

b. $t(t-2)y'' - 3ty + 4y = \cos(t)\,, \quad y(-2) = 0\,, \quad y'(-2) = 1$;

c. $(x-3)y'' + xy' + (\ln|x|)y = 0\,, \quad y(1) = 0\,, \quad y'(1) = 1$;

Questão 3. Mostre que $y_1(t) = t^2$ e $y_2(t) = t^{-1}$ são ambas soluções da EDO

$$t^2y'' - 2y = 0$$

para $t > 0$. Determine se elas são linearmente independentes e a solução geral da EDO.

Questão 4. Verifique se as funções indicadas são soluções da EDO associada e obtenha, em cada item, a solução geral da EDO via o Método de d'Alambert.

a. $y'' + 4y = 0$ e $y_1(x) = \cos(x)$;

b. $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$ e $y_1(x) = x$ (para $x > 0$);

Questão 5. Em cada um dos itens abaixo, determine a solução geral da EDOLH:

a. $y'' + 4y = 0$;

b. $y'' - 4y = 0$;

c. $y'' + 4y' = 0$;

d. $y'' - 8y' + 16y = 0$;

e. $y'' - y' - y = 0$;

f. $y'' - \sqrt{14}y' - 15y = 0$;

g. $20y'' - 12y' + 5y = 0$;

Questão 6. Em cada um dos itens abaixo, determine se o Problema de Valor de Contorno (PVC) possui solução e, quando possuir, determine esta solução:

a. $y'' + 4y = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y(\pi/2) = 0$;

b. $y'' - 4y = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y(4) = 0$;

c. $y'' + 4y' = 0\,,\quad y(0) = 0\,,\quad y(1) = 1;$

d. $y'' - 8y' + 16y = 0\,,\quad y(0) = 0\,,\quad y(-1) = 1;$

e. $y'' - y' - y = 0\,,\quad y(1) = 1\,,\quad y(-1) = 1;$

f. $20y'' - 12y' + 5y = 0\,,\quad y(0) = 0\,,\quad y(\pi/2) = -1.$

Questão 7. Determine a solução geral de cada uma das EDOL:

a. $y'' - 2y' + y = e^x \log(x);$

b. $y'' - 8xy' + 16y = x^{-2}e^{4x};$

c. $y'' + 4y' + 4y = (1 + x^2)^{-1}e^{-2x};$

d. $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2x};$

e. $y'' + 2y' = 3 + 4\,\mathrm{sen}(2x);$

f. $y'' - y' - 2y = 1 + \mathrm{sen}(2x) + e^{-x}.$

Questão 8. Determine a solução dos PVI abaixo:

a. $y'' + w^2 y = f(x)$, onde $y(0) = y'(0) = 0$, $w > 0$ e onde $f(x)$ é uma função contínua;

b. $y'' - w^2 y = e^{wt}$, onde $y(0) = y'(0) = 0$ e $w > 0$;

c. $y'' + 4y' = 1 + e^{4t}$, onde $y(0) = y'(0) = 0$;

d. $y'' + y = \mathrm{sen}(x)$, onde $y(0) = 2$ e $y'(0) = -1$;

e. $y'' + 4y = \cos(2t)$, onde $y(0) = y'(0) = 0$;

f. $y'' - 2y' + y = te^{4t} - 5$, onde $y(0) = y'(0) = 1$.

Utilize a continuidade das soluções nos parâmetros ou os métodos de determinação de soluções particulares vistos em aula, para resolver cada um dos problemas abaixo:

Questão 9. Considere o seguinte problema de valor inicial (onde $F_0, b \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} y'' + by' = F_0 \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Determine o comportamento assintótico das soluções quando $t \to +\infty$ conforme b varia para cada F_0 fixado.

Questão 10. Considere o seguinte problema de valor inicial (onde $F_0, b, \gamma \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} y'' + b^2 y = F_0 \cos(\gamma t) \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Determine o comportamento assintótico das soluções quando $t \to +\infty$ conforme b varia para cada F_0 e γ fixados.

Questão 11. Considere o seguinte problema de valor inicial (onde $F_0, b, \gamma \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} y'' - b^2 y = F_0 e^{\gamma t} \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Determine o comportamento assintótico das soluções quando $t \to \infty$ conforme b varia para cada F_0 e γ fixados.