Lista 3 – Prof. Diego Marcon

Métodos Aplicados de Matemática I

29 de Maio de 2017

Lista de exercícios referente ao restante da primeira área da nossa disciplina:

- Equações lineares de ordem mais alta
- Sistemas lineares – teoria geral
- Sistemas lineares – método dos operadores
- Equações lineares – método matricial
- Plano de fase ou espaço de fase
- Equações lineares não homogêneos
- Exponencial de matrizes

1 Exercícios do livro do Zill

- **Seção 4.9:** 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 24, 25.
- **Seção 8.1:** todos os ímpares.
- **Seção 8.2:** ímpares do 1 ao 49.
- **Seção 8.3:** todos os ímpares.
- **Seção 8.4:** todos os ímpares.

2 Mais exercícios

É possível que alguns exercícios sejam muito parecidos ou repetidos com os do Zill.

Questão 1. Escolher alguns dos problemas da Seção 8.2 do livro do Zill e fazer a análise dos espaços de fase em pelo menos *um exemplo de cada uma* das situações:

- raízes reais distintas,
- raiz dupla,
- raízes complexas.

Quais são todos os possíveis retratos de fase em um sistema linear de primeira ordem com coeficientes constantes em dimensão 3? Isto é, sistemas da forma $\vec{x}\,' = A\vec{x}$ com $\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

Questão 2. No que segue, determine a solução geral de cada um dos sistemas de EDO

(a) $\begin{cases} x' - 4x + y'' = t^2 \\ x' + x + y' = 0 \end{cases}$;

(b) $\begin{cases} x'' + y' = -5x \\ x' + y' = -x + 4y \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} x' = -x + z \\ y' + y = z \\ z' = -x + y \end{cases}$;

(d) $\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = x \end{cases}$;

Questão 3. No que segue, determine a solução de cada um dos problemas de valor inicial

$$\vec{x}\,'(t) = Ax(t)\,, \qquad x(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

bem como o comportamento da solução quando $t \to \infty$ (fazer esboço do plano de fase).

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(d) $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Questão 4. No que segue, determine a solução de cada um dos problemas de valor inicial

$$\vec{x}\,'(t) = Ax(t)\,, \qquad x(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

bem como o comportamento da solução quando $t \to \infty$ (fazer esboço do espaço de fase).

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(e) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

3 Retirados de Lista do Professor Eduardo Brietzke

1. Resolva as seguintes equações de ordem superior:

(a) $y^{(4)} - 3\,y''' + 2\,y'' = 0$

(b) $y''' - 5\,y'' + 8\,y' - 4\,y = 0$

(c) $y^{(4)} - 2\,y''' + 2\,y' - y = 0$

(d) $y''' - y = 0$

2. Resolva as seguintes equações de ordem superior:

(a) $y^{(4)} - 5\,y'' + 4\,y = 0$

(b) $y^{(4)} - 2\,y''' + 2\,y'' = 0$

(c) $y''' + y = 0$

(d) $y''' - 3\,y'' + 3\,y' - y = 0$

(e) $y^{(4)} - 16\,y = 0$

(f) $y^{(4)} + 16\,y = 0$

(g) $y^{(4)} + 2\,y'' + y = 0$

(h) $y^{(4)} + y = 0$

Resolva os seguintes sistemas de EDOL pelo método dos operdores e, quando possível, também por substituição:

3. $\begin{cases} x' = 4x - 5y \\ y' = x + 2y \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 4x + 5y \\ y' = -4x - 4y \end{cases}$

5. $\begin{cases} x'' + y' = 2x \\ x' + y' = 3x + 3y \end{cases}$

6. $\begin{cases} x'' = -2x + 2y \\ y'' = 2x - 5y \end{cases}$

Resolva os seguintes sistemas de EDOLÑH pelo método dos operdores e, quando possível, também por substituição:

7. $\begin{cases} x' - 2\,y = \ 2\,t \\ -x + y' + y = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x'' + 8y = 4 \\ x + y' = 3e^t \end{cases}$

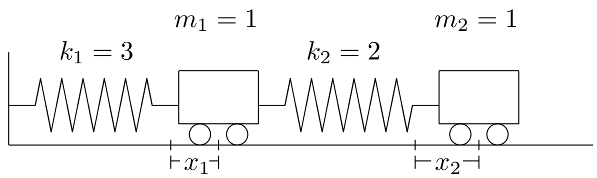
9. $\begin{cases} x'' - 3\,y'' = 12\,t \\ x'' + \ y'' = 9\cos 3t \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x' + y' - 2z' = 0 \\ -2y' + z' = 1 \\ 2y' - 4z' = -16 \end{cases}$

11. Para que valores de a o limite de todas as soluções do sistema é 0 quando $t \to \infty$ (assintoticamente estável)?

$$\begin{cases} x' = 2x + ay \\ y' = 3x - 4y \end{cases}$$

12. Considere oscilações livres não amortecidas (sem força externa e sem atrito) no sistema da figura abaixo, consistindo de duas massas unitárias, presas por molas com constantes de elasticidade, respectivamente, 3 e 2. O objetivo do exercício é determinar as freqüências naturais de oscilação do sistema.



(a) Deduza que os deslocamentos x_1 e x_2 das massas a partir de suas posições de equilíbrio satisfazem o sistema de duas EDO's de 2ª ordem

$$\begin{cases} x_1'' = -5\,x_1 + 2\,x_2 \\ x_2'' = 2\,x_1 - 2\,x_2 \end{cases}$$

(b) Isole x_2 em uma das equações e substitua na outra. Obtenha a equação

$$x_1^{(4)} + 7\,x_1'' + 6\,x_1 = 0$$

e encontre a solução geral desta última equação.

(c) Usando o resultado do item (b) obtenha a solução geral do sistema do item (a).

(d) Obtenha a solução do sistema do item (a) com as condições iniciais

$$x_1(0) = 1\ ,\quad x_1'(0) = 0\ ,\quad x_2(0) = 2\ ,\quad x_2'(0) = 0\ .$$

(e) Obtenha a solução do sistema do item (a) com as condições iniciais

$$x_1(0) = -2\ ,\quad x_1'(0) = 0\ ,\quad x_2(0) = 1\ ,\quad x_2'(0) = 0\ .$$

(f) Analisando as respostas encontradas nos itens (d) e (e), encontre as freqüências naturais do sistema.

13. Para um indutor $L = 5$ henry, uma resistência $R = 4\Omega$, um capacitor $C = 0.05$ faraday e uma fonte $E(t) = 17\mathrm{sen}t$. Deduza que as intensidades de corrente I_1, I_2 satisfazem o sistema de duas EDO's

$$\begin{cases} 5I_1' + 4I_1 - 4I_2 = 17\mathrm{sen}t \\ -4I_1' + 4I_2' + 20I_2 = 0 \end{cases}$$

Determine $I_1(t)$ e $I_2(t)$, sabendo que $I_1(0) = I_2(0) = 0$

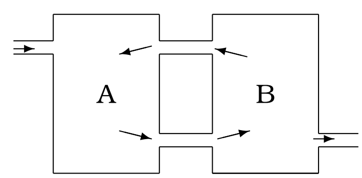
$E(t)$

14. Para um indutor $L_1 = 1$ henry, $L_2 = 5$ henry, um capacitor $C_1 = 4/5$ faraday $C_2 = 1/10$ faraday e uma fonte $E(t) = 20$ volt . Deduza que as cargas eletricas $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ satisfazem o sistema de duas EDO's

$$\begin{cases} Q_1'' + \dfrac{5}{4}(Q_1 - Q_2) = 20 \\ 5Q_2'' + 10Q_2 + \dfrac{5}{4}(Q_2 - Q_1) = 0 \end{cases}$$

Determine $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$.

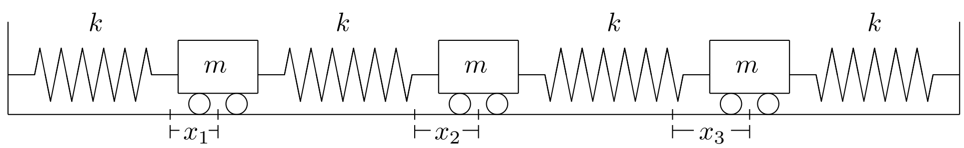
15. Inicialmente o tanque A como na figura contém 90 litros de uma solução de $10\,gr/l$ e o tanque B contém água 90 litros de água pura. No instante $t_0 = 0$, água pura entra no tanque A á razão de $8\,l/h$ e a mistura sai do tanque para o tanque B a uma razão de $9\,l/h$, e receve a mistura do tanque B a uma razão de $1\,l/h$. Sabendo que a mistura do tanque B sai para fora do sistema a uma razão de $8\,l/h$.



(a) Deduza as EDO's que representam $x(t)$ a quantidade de sal no tanque A no instante t e $y(t)$ a quantidade de sal no recipiente B no instante t.

(b) Determine $x(t)$.

16. Considere oscilações livres não amortecidas no sistema da figura abaixo, consistindo de 3 massas iguais a m, presas por molas iguais. O objetivo do exercício é determinar as frequências naturais de oscilação do sistema.



(a) Deduza que os deslocamentos x_1 , x_2 e x_3 das massas a partir de suas posições de equilíbrio satisfazem

$$\begin{cases} m\,x_1'' = -2\,k\,x_1 + k\,x_2 \\ m\,x_2'' = \quad k\,x_1 \; - \; 2\,k\,x_2 + k\,x_3 \\ m\,x_3'' = \qquad\qquad k\,x_2 - 2\,k\,x_3 \end{cases}$$

(b) Supondo as unidades escolhidas de tal forma que as constantes tenham os valores $m = 1$ e $k = 1$, procedendo como nos exercícios anteriores mostre que o sistema possui 3 freqüências naturais: $f_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2\,\pi}$, $f_2 = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\,\pi}$ e $f_3 = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2\,\pi}$.

Resolva pelo método matricial (dos autovalores e autovetores). Descreva o comportamento das soluções quando $t \longrightarrow +\infty$. Verifique se a solução $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (0,0)$ é ponto de equilíbrio estável ou instável, verificando se é sela, nó, foco (espiral) ou centro. Faça um esboço da família das soluções:

17. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 3x_1 - 4x_2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = 3x_1 - 2x_2 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = 4x_1 - 2x_2 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1' = -x_1 - 4x_2 \\ x_2' = \quad x_1 - x_2 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 5x_2 \\ x_2' = \quad x_1 - 2x_2 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1' = 4x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 8x_1 - 6x_2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1' = \ 3x_1 + 6x_2 \\ x_2' = -x_1 - 2x_2 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1' = \quad x_1 \ - 2x_2 \\ x_2' = -5x_1 - x_2 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 4x_1 - x_2 \end{cases}$

3.1 Respostas

1. (a) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3 + C_4\,x$

(b) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3\,xe^{2x}$

(c) $y = C_1e^x + C_2\,xe^x + C_3\,x^2e^x + C_4e^{-x}$

(d) $y = C_1e^x + C_2e^{-x/2}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_3e^{-x/2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

2. (a) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$

(b) $y = C_1 + C_2x + C_3e^x\cos x + C_4e^x\operatorname{sen} x$

(c) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{\frac{x}{2}}\cos\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right) + C_3e^{\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right)$

(d) $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x$

(e) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + C_3\cos 2x + C_4\operatorname{sen} 2x$

(f) $y = e^{x\sqrt{2}}\left(C_1\cos(x\sqrt{2}\,) + C_2\operatorname{sen}(x\sqrt{2}\,)\right) + e^{-x\sqrt{2}}\left(C_3\cos(x\sqrt{2}\,) + C_4\operatorname{sen}(x\sqrt{2}\,)\right)$

(g) $y = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x + C_3x\cos x + C_4x\operatorname{sen} x$

(h) $y = C_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x) + C_2 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\,\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{2}}{2}x) + C_3 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x) + C_4 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\,\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{2}}{2}x)$

3. $x(t) = e^{3t}(C_1\,\mathrm{sen}\,2t + C_2\cos 2t), \quad y(t) = \frac{1}{5}\,e^{3t}\Big((C_1+2C_2)\,\mathrm{sen}\,2t + (C_2 - 2C_1)\cos 2t\Big)$

4. $x(t) = C_1\,\mathrm{sen}\,2t + C_2\cos 2t, \quad y(t) = \Big(\frac{2}{5}\,C_1 - \frac{4}{5}\,C_2\Big)\cos 2t - \Big(\frac{2}{5}\,C_2 + \frac{4}{5}\,C_1\Big)\,\mathrm{sen}\,2t$

5. $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}, \quad y(t) = -C_1 e^{-t} - C_2 e^{2t} - \frac{7}{3}\,C_3 e^{3t}$

6. $x(t) = C_1\,\mathrm{sen}\,t + C_2\cos t + C_3\,\mathrm{sen}\,\sqrt{6}t + C_4\cos\sqrt{6}t$

$y(t) = \frac{1}{2}C_1\,\mathrm{sen}\,t + \frac{1}{2}C_2\cos t - 2C_3\,\mathrm{sen}\,\sqrt{6}t - 2C_4\cos\sqrt{6}t$

7. $x(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-2t} - \frac{3}{2} - t, \quad y(t) = \frac{1}{2}C_1 e^{t} - C_2 e^{-2t} - \frac{1}{2} - t$

8. $x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{3}t + C_3 e^{-t}\cos\sqrt{3}t + \frac{24}{7}e^{t},$

$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{7}e^{t} - \frac{1}{2}C_1 e^{2t} + \Big(\frac{1}{4}C_2 - \frac{1}{4}\sqrt{3}C_3\Big)e^{-t}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{3}t + \Big(\frac{1}{4}\sqrt{3}C_2 + \frac{1}{4}C_3\Big)e^{-t}\cos\sqrt{3}t$

9. $x(t) = \frac{t^3}{2} - \frac{3}{4}\cos 3t + C_1 t + C_2, \quad y(t) = -\frac{t^3}{2} - \frac{1}{4}\cos 3t + C_3 t + C_4,$

10. $x(t) = 2t + C_1, \quad y(t) = 2t + C_2, \quad z(t) = 5t + C_3$

11. $a < -\frac{8}{3}$

12. (b) $x_2(t) = C_1\cos t + C_2\,\mathrm{sen}\,t + C_3\cos(t\sqrt{6}) + C_4\,\mathrm{sen}(t\sqrt{6})$

(c) $x_1(t) = \frac{1}{2}\,C_1\cos t + \frac{1}{2}\,C_2\,\mathrm{sen}\,t - 2C_3\cos(t\sqrt{6}) - 2C_4\,\mathrm{sen}(t\sqrt{6})$

$x_2(t) = C_1\cos t + C_2\,\mathrm{sen}\,t + C_3\cos(t\sqrt{6}) + C_4\,\mathrm{sen}(t\sqrt{6})$

(d) $x_1(t) = \cos t, \qquad x_2(t) = 2\cos t.$

(e) $x_1(t) = -2\cos(t\sqrt{6}), \qquad x_2(t) = \cos(t\sqrt{6}).$

(f) As frequências naturais do sistema são $f_1 = \frac{1}{2\pi}$ e $f_2 = \frac{\sqrt{6}}{2\pi}$.

13. $x(t) = -\frac{34}{15}e^{-t} - \frac{1}{5}e^{-4t} + 2\mathrm{sen}\,t - \frac{-11}{5}\cos t$

$y(t) = -\frac{17}{30}e^{-t} + \frac{4}{15}e^{-4t} + \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,t + \frac{3}{10}\cos t$

14. $Q_1(t) = 18 + C_1\,\mathrm{sen}\,t + C_2\cos t + C_3\,\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{10}}{2}t + C_4\cos\frac{\sqrt{10}}{2}t$

$$Q_2(t) = 2 + \frac{1}{5}\, C_1 \operatorname{sen} t + \frac{1}{5} C_2 \cos t - C_3 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{10}}{2} t - C_4 \cos \frac{\sqrt{10}}{2} t$$

15. $x(t) = 450 e^{-\frac{1}{15} t} + 450 e^{-\frac{2}{15} t}$

17. $\vec{x}(t) = C_1 e^{-t}(1,2) + C_2 e^{2t}(2,1)$ Sela.

18. $\vec{x}(t) = C_1 e^{-t}(1,1) + C_2 e^{-2t}(2,3)$ Nó estável (é assitoticamente estável).

19. $\vec{x}(t) = C_1 e^{t}(1,1) + C_2 e^{-t}(1,3)$ Sela.

20. $\vec{x}(t) = C_1 e^{-3t}(1,-4) + C_2 e^{2t}(1,1)$ Sela.

21. $\vec{x}(t) = C_1 e^{-t}(2\cos 2t, \operatorname{sen} 2t) + C_2 e^{-t}(-2\operatorname{sen} 2t, \cos 2t)$ Foco (espiral) estável.

22. $\vec{x}(t) = C_1(5\cos t, 2\cos t + \operatorname{sen} t) + C_2(5\operatorname{sen} t, -\cos t + 2\operatorname{sen} t)$ Centro (é estável mas não assitoticamente estável).

23. $\vec{x}(t) = C_1(3,4) + C_2 e^{-2t}(1,2)$ É estável mas não assitoticamente estável.

24. $\vec{x}(t) = C_1(-2,1) + C_2 e^{t}(-3,1)$ Não é estável.

25. $\vec{x}(t) = C_1(-2\cos 3t, \cos 3t + 3\operatorname{sen} 3t) + C_2(-2\operatorname{sen} 3t, \operatorname{sen} 3t - 3\cos 3t)$ Centro

26. $\vec{x}(t) = C_1 e^{t}(\cos 2t, \cos 2t + \operatorname{sen} 2t) + C_2 e^{t}(\operatorname{sen} 2t, -\cos 2t + \operatorname{sen} 2t)$ Foco (espiral) instável.