Aula sobre funções de transferência

Matemática Aplicada II - MAT01168

maio de 2012

Sumário

Sistemas

Um sistema possui entradas e saídas.

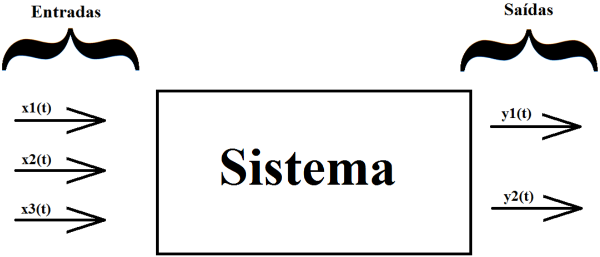

Figura : Modelo caixa-preta de um sistema.

Sistemas - modelo matemático

A descrição matemática de um sistema é normamelmente chamada de operador:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}\right)$$

Sistemas - modelo matemático

A descrição matemática de um sistema é normamelmente chamada de operador:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}\right)$$

- Aqui T é o operador que modela um sistema de três entradas e duas saídas.

Sistemas - modelo matemático

A descrição matemática de um sistema é normamelmente chamada de operador:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}\right)$$

- Aqui T é o operador que modela um sistema de três entradas e duas saídas.
- As entradas e saídas são funções reais, números reais, inteiros etc.

Exemplos de sistemas: Derivador

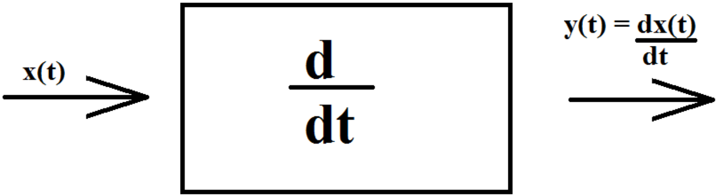

Figura : Derivador.

- Neste sistema a saída é a derivada da entrada.
- Exemplo: Se $x(t) = \sin(t)$ então $y(t) = \cos(t)$

Exemplos de sistemas: Amplificador

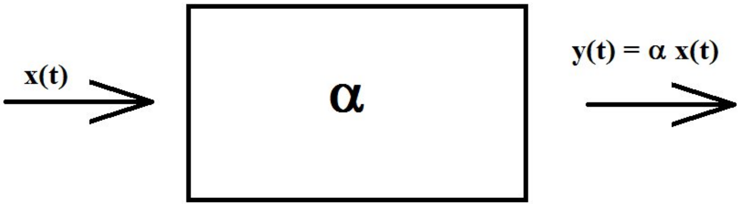

Figura : Amplificador ideal.

- Neste sistema a saída é a entrada multiplicada por uma constante.
- A constante α é chamada de ganho do amplificador.

Classificação dos sistemas

- Vamos nos concentrar no caso mais simples, quando o sistema tem uma única entrada e uma única saída.

Classificação dos sistemas

- Vamos nos concentrar no caso mais simples, quando o sistema tem uma única entrada e uma única saída.
- Linearidade: Sistemas podem ser lineares ou não lineares.

Classificação dos sistemas

- Vamos nos concentrar no caso mais simples, quando o sistema tem uma única entrada e uma única saída.
- Linearidade: Sistemas podem ser lineares ou não lineares.
- Variância no tempo: Sistemas podem se alterar no tempo ou não.

Classificação dos sistemas

- Vamos nos concentrar no caso mais simples, quando o sistema tem uma única entrada e uma única saída.
- Linearidade: Sistemas podem ser lineares ou não lineares.
- Variância no tempo: Sistemas podem se alterar no tempo ou não.
- Causalidade: Sistemas podem ser causais ou não.

Sistema lineares

- Um sistema é dito linear se para todos α e β, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, temos:
- $T\left(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\right) = \alpha T x_1(t) + \beta T x_2(t)$

Sistema causal

- Um sistema é dito causal se saída em determinado instante de tempo t_0 só depende dos valores entrada até t_0:
- Se $x_1(t) = x_2(t), \quad t < t_0$ então $y_1(t) = y_2(t), \quad t < t_0$.
- Onde $y_1(t) = Tx_1(t)$ e $y_2(t) = Tx_2(t)$.

Sistema causal

- Um sistema é dito causal se saída em determinado instante de tempo t_0 só depende dos valores entrada até t_0:
- Se $x_1(t) = x_2(t), \quad t < t_0$ então $y_1(t) = y_2(t), \quad t < t_0$.
- Onde $y_1(t) = Tx_1(t)$ e $y_2(t) = Tx_2(t)$.
- "Sistemas causais não advinham o futuro."

Sistema invariantes no tempo

- Um sistema é dito invariante no tempo se um deslocamento na entrada acarreta o mesmo deslocamento na saída.
- Se $y(t) = Tx(t)$ então $y(t-a) = Tx(t-a)$ para qualquer deslocamento a.

Resposta de sistemas lineares invariantes no tempo causais

- Da propriedade da linearidade, sabemos que se $x(t) = 0$ então $y(t) = 0$.

Resposta de sistemas lineares invariantes no tempo causais

- Da propriedade da linearidade, sabemos que se $x(t) = 0$ então $y(t) = 0$.
- Da propriedade acima e da causalidade, temos que se $x(t) = 0$ para $x < 0$ então $y(t) = 0$ para $t < 0$

Resposta impulso de sistemas lineares invariantes no tempo causais

- Um caso particular muito importante é quando a entrada $x(t) = \delta(t)$.

Resposta impulso de sistemas lineares invariantes no tempo causais

- Um caso particular muito importante é quando a entrada $x(t) = \delta(t)$.
- A solução do sistema quando $x(t) = \delta(t)$ é chamada de resposta impulso do sistema.

Resposta impulso de sistemas lineares invariantes no tempo causais

- Um caso particular muito importante é quando a entrada $x(t) = \delta(t)$.
- A solução do sistema quando $x(t) = \delta(t)$ é chamada de resposta impulso do sistema.
- A resposta impulso é tradicionalmente denotada por $h(t)$.

Resposta impulso de sistemas lineares invariantes no tempo causais

- Um caso particular muito importante é quando a entrada $x(t) = \delta(t)$.
- A solução do sistema quando $x(t) = \delta(t)$ é chamada de resposta impulso do sistema.
- A resposta impulso é tradicionalmente denotada por $h(t)$.
- Como $\delta(t) = 0$ para $t < 0$, $h(t) = 0$ para $t < 0$.

Resposta impulso de sistemas lineares invariantes no tempo causais

- Um caso particular muito importante é quando a entrada $x(t) = \delta(t)$.
- A solução do sistema quando $x(t) = \delta(t)$ é chamada de resposta impulso do sistema.
- A resposta impulso é tradicionalmente denotada por $h(t)$.
- Como $\delta(t) = 0$ para $t < 0$, $h(t) = 0$ para $t < 0$.
- Da invariância no tempo, sabemos que a resposta do sistema à entrada $\delta(t - a)$ é $h(t - a)$.

Propriedade muito importante

- Se $x(t)$ é uma função causal, ou seja, $x(t) = 0$ para $t < 0$, então vale a identidade

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_0^t x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Propriedade muito importante

- Se $x(t)$ é uma função causal, ou seja, $x(t) = 0$ para $t < 0$, então vale a identidade

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_0^t x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

- A resposta $y(t)$ à entrada $x(t)$ será dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= Tx(t) = T\left[\int_0^t x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right] \\ &= \int_0^t x(\tau)\,T\left[\delta(t-\tau)\right]d\tau \\ &= \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= x(t) * h(t) \end{aligned}$$

Propriedade muito importante - II

- Se $x(t)$ é uma função causal, então a resposta $y(t)$ à entrada $x(t)$ será dada por

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Propriedade muito importante - II

- Se $x(t)$ é uma função causal, então a resposta $y(t)$ à entrada $x(t)$ será dada por

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

- Aplicando a transformada de Laplace e o teorema da convolução, temos:

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

Propriedade muito importante - II

- Se $x(t)$ é uma função causal, então a resposta $y(t)$ à entrada $x(t)$ será dada por

$$y(t) \quad = \quad x(t) * h(t)$$

- Aplicando a transformada de Laplace e o teorema da convolução, temos:

$$Y(s) \quad = \quad X(s)H(s)$$

- Aqui $H(s)$ é a tranformada de Laplace da resposta impulso e é chamada de função de transferência.