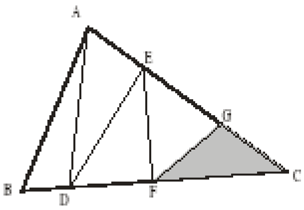
OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA – GRANDE PORTO ALEGRE, 2006
NÍVEL 1

PROBLEMA 1. Chamam-se palíndromos os números inteiros que não se alteram quando é invertida a ordem de seus algarismos (por exemplo, 383, 4224, 74547).
a) Qual é o número de palíndromos de 3 algarismos?

SOLUÇÃO. Um palíndromo de 3 algarismos tem a forma **aba**, em que **a**, **b** são algarismos e $a \neq 0$. Temos 9 possibilidades para **a** e 10 para **b**, então, o total de possibilidades é $9 \cdot 10 = 90$.

PROBLEMA 2. Um fazendeiro resolveu repartir sua fazenda para seus cinco filhos. O desenho abaixo (fora de escala) representa a fazenda e as partes dos herdeiros, que são da forma triangular, de modo que $BD = \frac{BC}{4}$, $AE = \frac{AC}{3}$, $DF = \frac{DC}{2}$ e $EG = GC$. O filho mais novo recebeu o terreno representado pelo triângulo escuro, de 40 alqueires. Quantos alqueires tinha a propriedade original?



SOLUÇÃO. Seja **S** a área do triângulo **ABC**.

Se $BD = \frac{BC}{4}$, então $\Delta ABD = \frac{S}{4}$.

Se $AE = \frac{AC}{3}$, então $\Delta AED = \frac{\Delta ADC}{3} = \frac{\Delta ABC - \Delta ABD}{3} = \frac{S - \frac{S}{4}}{3} = \frac{\frac{3 \cdot S}{4}}{3} = \frac{S}{4}$

Se $DF = \frac{DC}{2}$, então $\Delta DFE = \frac{\Delta DEC}{2} = \frac{\Delta ABC - \Delta ABD - \Delta AED}{2} = \frac{S - \frac{S}{4} - \frac{S}{4}}{2} = \frac{\frac{2 \cdot S}{4}}{2} = \frac{S}{4}$

Se $EG = EC$, então

$$\Delta GFC = \frac{\Delta EFC}{2} = \frac{\Delta ABC - \Delta ABD - \Delta AED - \Delta DEC}{2} = \frac{S - \frac{S}{4} - \frac{S}{4} - \frac{S}{4}}{2} = \frac{\frac{S}{4}}{2} = \frac{S}{8}$$

Como $GFC = 40$ temos $\frac{s}{8} = 40 \Leftrightarrow S = 320\, alqueires$.

OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA – GRANDE PORTO ALEGRE, 2006
NÍVEL 1

PROBLEMA 3. Seis times de futebol disputam um torneio onde todos jogam contra todos. Se houve um campeão isolado, responda:

a) Qual é o mínimo de pontos que ele pode ter obtido? Prove que esse número é realmente o mínimo.

SOLUÇÃO. Como cada time joga 5 partidas, o máximo de pontos que um time pode obter é 15.

Como são 6 times, no total são disputadas $\frac{6\cdot 5}{2}=15$ partidas. O total de pontos a repartir é $15\cdot 3=45$. Como são divididos entre 6 times, se há um ganhador absoluto, ele deve ter pelo menos 9 pontos. realmente, se o ganhador leva 8 pontos, fica 37 pontos para repartir entre 5 e não é possível que todos fiquem com menos de 7 pontos.

b) Se esse número é o mínimo, mostre o desenrolar do torneio onde o campeão obtém essa pontuação.

SOLUÇÃO. Um torneio onde isso ocorre é o torneio no qual A vence B, C, D e perde para E e F. B ganha de C e D, empata com E e F. C ganha de D e E, empata com F. D ganha de E e F. E ganha de F. A é ganhador isolado com 9 pontos, F é o último colocado com pontos 5.

TIMES	GANHA	EMPATA	PERDE	TOTAL DE PONTOS
A	BCD		EF	9
B	CD	EF	A	8
C	DE	F	AB	7
D	EF		ABC	6
E	AF	B	CD	7
F	A	BC	DE	5

Observação: Partida ganha vale 3 pontos, empates valem 1 ponto e derrotas valem zero ponto.

OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA – GRANDE PORTO ALEGRE, 2006
NÍVEL 1

PROBLEMA 4. Um pescador se perdeu no mar e notou que seu barco estava furado. A cada 15 minutos, entravam 180 litros de água. Com o balde, ele começou a despejar a água para fora, mas só conseguiu tirar 9 litros a cada 5 minutos. A lancha de socorro mais próxima estava a 50km do local e sua velocidade máxima era de 180km/h. Determine qual deveria ser a velocidade mínima para que a lancha chegasse a tempo, sabendo que o barco afundaria se entrasse 255 litros de água.

SOLUÇÃO. Entram 180 litros a cada 15 minutos. em 1 minuto, entram 12 litros. Saem 9 litros a cada 5 minutos. Em 1 minuto, saem 1,8 litros. logo, entram 10,2 litros a cada minuto. Se t=tempo para entrarem 255 litros no barco, temos:

Tempo (minutos)	Capacidade (litros)
t	255
1	10,2

t=25 minutos

Então, a lancha deve fazer pelo menos 50km em 25 minutos, ou 2km em 1 minuto ou 120km em 1 hora. Logo, a velocidade mínima necessária é 120km/h.

OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA – GRANDE PORTO ALEGRE, 2006
NÍVEL 1

PROBLEMA 5. Vamos mostrar um modo de definir o parentesco entre os números naturais.

<table>
<tr><td colspan="9">1</td></tr>
<tr><td colspan="3">2</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">4</td></tr>
<tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td></tr>
<tr><td colspan="9">...</td></tr>
</table>

No diagrama acima,

- todos os números naturais aparecem uma vez;
- 1 é pai de 2, 3 e 4 (2, 3 e 4 são, portanto, números irmãos);
- 2 é pai de 5, 6 e 7, 3 é pai de 8, 9 e 10, 4 é pai de 11, 12 e 13, e assim por diante;
- cada filho possui exatamente o mesmo número de filhos que o pai.

a) Quem é o pai de 2006?
b) Quem são seus filhos?
c) Qual a sua geração?

Observação: O número 1 é a 1ª geração; os números 2, 3 e 4 pertencem à 2ª geração e assim sucessivamente.

SOLUÇÃO. Notemos que, em cada bloco de 3 filhos do mesmo pai, o termo central é o triplo do número do pai. Então **os filhos de 2006 são** $2006 \cdot 3 = 6018$ **, que é o filho do meio, 6017 e 6019**.

Como 2006 não é múltiplo do 3, então ele não é filho do meio.

Para encontrar o filho do meio, devemos apenas somar ou subtrair uma unidade, se este número for múltiplo de 3 então dividimos por 3.

O irmão do meio de 2006 é o 2007.

O pai de 2006 é $(2006+1) \div 3 = 2007 \div 3 = 669$, o **669** é filho do meio.

O avô do 2006 é $669 \div 3 = 223$, o 223 não é filho do meio.

O bisavô é $(223-1) \div 3 = 222 \div 3 = 74$, o 74 não é filho do meio.

O trisavô é $(74+1) \div 3 = 75 \div 3 = 25$, o 25 não é filho do meio.

O tretavô é $(25-1) \div 3 = 24 \div 3 = 8$, que pertence à terceira geração.

Então, **2006 pertence à oitava geração**.