Equações racionais e radicais

Enquanto que a resolução numérica e geométrica das equações numéricas remonta a milhares de anos, a resolução simbólica (= algébrica ou analítica) iniciou a se desenvolver somente nos últimos 400 anos, sendo o resultado da contribuição de inúmeros matemáticos. Dentre eles, destacamos a contribuição de Leonhard Euler, pois seu livro *Instrução Completa de Álgebra* (de c. 1770 e título modernamente abreviado como Elementos de Álgebra) muito simplificou as técnicas de resolução das equações, além de lhes dar a forma notacional que é essencialmente a que hoje aprendemos a usar desde a Escola Básica.

Quanto ao tipo de operações matemáticas envolvidas nas equações numéricas, essas se dividem em:
- equações polinomiais
- equações racionais (envolvem somente as quatro operações aritméticas)
- equações radicais ou irracionais (envolvem as quatro operações aritméticas mais radiciações)
- equações transcendentes (envolvem operações não algébricas, como trigonométricas, logarítmicas ou etc.)

Dedicaremos esta lição às racionais e radicais, na próxima trataremos das importantíssimas equações polinomiais.

Equações racionais

1). Exemplos típicos

$3x+\frac{1}{x-2}=6+\frac{1}{x-2}$, $\frac{x-9}{1+x^2}=x^2-3x+1-\frac{3}{3-x}$, etc. Em geral, são as que podem ser reduzidas (embora isso possa acabar complicando o processo de resolução) à forma: $P(x)/Q(x)=0$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios.

2). Cuidado maior para se garantir a equivalência

Ao transformarmos uma equação racional em um outra mais fácil de resolver, e *a ela equivalente*, fica **proibido** dividir ou multiplicar por alguma expressão que se anule no domínio da equação dada.

Podemos colocar esta proibição do seguinte modo. Denotando por A, B, C expressões algébricas:
- $AC=BC$ não se simplifica para $A=B$, se $C=0$ no domínio da equação;
- $A/C=B/C$ não se simplifica para $A=B$, se $C=0$ no domínio da equação.

Exemplo modelo
Calcular as raízes reais da equação racional $\dfrac{(x^2+3x)(x^2+2x)}{x^2-4}=\dfrac{8x+24}{2x-4}$.

– *Resolução com erro* provocado por não obedecer às proibições acima. Observe que a equação pode ser escrita $\frac{x(x+3)x(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{8(x+3)}{2(x-2)}$, logo se simplifica para $x^2=\frac{8}{2}=4$, de modo que $x=2$ e $x=-2$. Resta aplicar a regra dos cursinhos para testar se verificam a equação original. Constata-se que não, pois provocam divisão por zero, logo conclui que a equação dada não tem raízes.
Contudo, essa é uma conclusão falsa, pois é evidente que $x=-3$ é uma raiz da equação!
– *Resolução correta.* Iniciamos determinando o domínio dessa equação: são os $x\neq$ -2 e 2, pois que anulam denominador. Para tais x vale simplificar a equação dada para $x(x+3)x=\frac{8(x+3)}{2}$, ou seja: $x^2(x+3)=4(x+3)$. Contudo, a simplificação do fator comum $(x+3)$ só vale para $x\neq-3$. Isso significa que a equação original somente é equivalente à equação simplificada $x^2=4$ para $x\neq$ -3, -2, 2 (estes x formam o que, desde a lição anterior, estamos denotando por conjunto $\mathscr{D}_*$).
. Raízes da equação simplificada $x^2=4$ para $x\neq$ -3, -2, 2 (ou seja, em $\mathscr{D}_*$): nenhuma;
. Raízes da equação original para $x=-3$ (ou seja, em $\mathscr{D}\backslash\mathscr{D}_*$; equivale a: em $\mathscr{D}$, mas fora de $\mathscr{D}_*$): $x=-3$.
Conclusão: as raízes da equação dada ou original se resumem a $x=-3$.

Exercício
Determine todas as raízes de cada equação racional a seguir.

a). $\frac{1}{12-4x}=\frac{1}{x^2-5x+6}$

b). $\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x+1}$

c). $\frac{x-2}{x^2-3x}+\frac{19x}{x^2}=\frac{3x-4x^2-9}{x^2-3x}$

d). $\left(\frac{3x-3}{x^2-2x+1}\right)\cdot\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=\frac{(5x+2)2x}{10x+4}$

Equações radicais

1). Exemplos típicos

$\sqrt{x}=2x-6$, $\sqrt{5x^2-8}=2x$, $\sqrt{2+3x}=1+\sqrt{1+2x}$, etc.
Ao contrário das equações polinomiais e racionais, não podemos escrever o formato algébrico geral das equações radicais ou irracionais. Contudo, podemos caracterizá-las verbalmente: são equações algébricas nas quais aparece ao menos um termo envolvendo radiciação.

2). A técnica básica para resolver equações radicais

Consiste em procurar colocar no máximo um radical em cada membro da equação e, depois, eliminar todos os radicais elevando cada membro da equação ao quadrado, ao cubo, etc.

3). Cuidados maiores para garantir a equivalência

Podemos resumí-los com um exemplo: $x = 4 \Rightarrow x^2 = 16$, mas $x^2 = 16 \not\Rightarrow x = 4$ (= não implica), pois -4 também verifica $(-4)^2 = 16$. Em termos mais gerais, denotando por A e B expressões algébricas quaisquer (note que como tal, elas eventualmente podem assumir tanto valores positivos como negativos), temos:

- $\sqrt{A^2} = |A|$
- $\sqrt{A} = \sqrt{B} \iff A = B$, desde que $A, B \geqslant 0$ no domínio da equação
- $\sqrt{A} = B \Rightarrow A = B^2$, contudo $A = B^2 \not\Rightarrow \sqrt{A} = B$, a menos que valha $A, B \geqslant 0$ no domínio da equação.

A não observância desses cuidados facilmente leva tanto à obtenção de raízes falsas como à perda de raízes. Todo o cuidado será pouco! É recomendado procurar fazer gráficos cartesianos das funções que representam cada membro da equação.

Exemplo modelo 1

Determinar as raízes reais da equação radical: $\sqrt{5-x} = x - 3$.

Iniciamos determinando o domínio desta equação. O membro $\sqrt{5-x}$ tem sentido (no universo dos números reais) somente para $x \leqslant 5$. Embora $x - 3$ tenha sentido para todos os $x \leqslant 5$, o valor desse segundo membro tem de igualar o de uma raiz quadrada (o valor do primeiro membro), logo temos de ter $x - 3 \geqslant 0$. Resumindo, o domínio desta equação é o conjunto dos $3 \leqslant x \leqslant 5$. Em notação de conjuntos: $\mathscr{D} = [3, 5]$.

Como no domínio da equação tanto o argumento da raiz quadrada como o segundo membro são $\geqslant 0$, segue que para todos os $x \in \mathscr{D}$:

$$\sqrt{5-x} = x - 3 \iff 5 - x = (x-3)^2 \iff 5 - x = x^2 - 6x + 9 \iff x^2 - 5x + 4 = 0 \iff (x-1)(x-4) = 0.$$

Conclusão: $\text{Raízes}\big(\text{com } 3 \leqslant x \leqslant 5 \text{ de } \sqrt{5-x} = x-3\big) = \text{Raízes}\big(\text{com } 3 \leqslant x \leqslant 5 \text{ de } (x-1)(x-4) = 0\big) = \{4\}$.

Observação 1. Acima, provamos que, para $3 \leqslant x \leqslant 5$, vale $\sqrt{5-x} = x - 3$ quando, e somente quando, vale $5 - x = (x-3)^2$. Por outro lado, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, vale $5 - x = (x-3)^2$ quando, e somente quando, vale $(x-1)(x-4) = 0$. Tomando $x = 1$, vale $(x-1)(x-4) = 0$, logo também vale $5 - x = (x-3)^2$; contudo, como esse $x = 1$ não verifica $3 \leqslant x \leqslant 5$, não podemos afirmar que ele torne verdadeira a expressão $\sqrt{5-x} = x - 3$. Com efeito, para $x = 1$, ela fica: $\sqrt{4} = -2$, o que é falso no universo dos números reais.

Observação 2. Ignorando restrições de domínio, também se chega à equação simplificada $(x-1)(x-4) = 0$, a qual tem $x = 1$ e $x = 4$ como raízes; substituindo-as na equação original, se constata que $x = 1$ é raiz falsa da original e que $x = 4$ é raiz verdadeira. Ou seja, a regra dos cursinhos, neste caso, está levando a uma resposta final correta. Contudo, essa regra nem sempre funciona, pois pode ocorrer que uma simplificação descuidada *provoque perda de raízes*. Veremos isso no Exemplo 3, abaixo.

Exemplo modelo 2

Determinar as raízes reais da equação radical: $2 + \sqrt{7+x} - \sqrt{3-x} = 0$.

Iniciamos colocando os radicais em membros diferentes: $2 + \sqrt{7+x} = \sqrt{3-x}$. Domínio da equação? Por $\sqrt{7+x}$ temos de ter $x \geqslant -7$, e por $\sqrt{3-x}$ precisamos ter $x \leqslant 3$, de modo que o domínio da equação é $\mathscr{D} = [-7, 3]$.

No domínio da equação, como os argumentos dos radicais são $\geqslant 0$, valem as equivalências:

$$2 + \sqrt{7+x} - \sqrt{3-x} = 0 \iff 2 + \sqrt{7+x} = \sqrt{3-x} \iff 4 + 4\sqrt{7+x} + 7 + x = 3 - x \iff 2\sqrt{7+x} = -4 - x.$$

Como última etapa, precisamos elevar ao quadrado ambos os membros da última equação. Para isso, precisamos ter $-4 - x \geqslant 0$, o que vale para $x \leqslant -4$. Ora, tendo em vista o domínio da equação original, vemos que essa última etapa só vale para $-7 \leqslant x \leqslant -4$. Ou seja, na notação de conjuntos, *vamos ter de continuar numa parte* $\mathscr{D}_* = [-7, -4]$ de $\mathscr{D} = [-7, 3]$. Temos, então:

$$(\text{para } -7 \leqslant x \leqslant -4) \quad 2\sqrt{7+x} = -4 - x \iff 4(7+x) = 16 + 8x + x^2 \iff x^2 + 4x - 12 = 0.$$

Resumindo (observe cuidadosamente o que será escrito):

para os $-7 \leqslant x \leqslant -4$: $2 + \sqrt{7+x} - \sqrt{3-x} = 0 \iff x^2 + 4x - 12 = 0$, e a aplicação de Bhaskara dá $x = -6$ e $x = 2$, sendo que somente o primeiro valor está no intervalo $[-7, -4]$, logo a equação original tem apenas uma raiz, $x = -6$, no intervalo $[-7, -4]$ (ou seja: em $\mathscr{D}_*$).

Resta verificarmos se a original *também* tem raiz entre os $-4 < x \leqslant 3$ (na notação de conjuntos: em $\mathscr{D} \backslash \mathscr{D}_*$). Para tal, usemos que a equação original é equivalente (em todo seu domínio $\mathscr{D}$) à equação $2\sqrt{7+x} = -4 - x$. Ora, como o segundo membro desta é $-4 - x < 0$ para os $-4 < x \leqslant 3$, segue que ele nunca poderá igualar o primeiro membro, o qual é $\geqslant 0$ para tais x. Logo, tanto a equação $2\sqrt{7+x} = -4 - x$ como a original não têm nenhuma raiz entre os $-4 < x \leqslant 3$ (na notação de conjuntos, em $\mathscr{D} \backslash \mathscr{D}_*$).

Conclusão final: a equação original tem apenas uma raiz real: $x = -6$.

Observação 1. Tivemos aqui uma novidade. No caso das equações *racionais* tipicamente o conjunto $\mathscr{D} \backslash \mathscr{D}_*$ é finito, o que permite fazer a verificação por substituição direta na equação original. Contudo, no presente caso de equação *radical* o conjunto $\mathscr{D} \backslash \mathscr{D}_*$ é um intervalo, o dos $-4 < x \leqslant 3$, o que impossibilita decidir por verificação, caso a caso, quais desses infinitos candidatos são raízes da original.

Observação 2. As duas raízes, $x=-6$ e $x=2$, da equação $x^2+4x-12=0$ estão no domínio da equação original. Apesar disso, $x=2$ é raiz falsa da original. Explicação? Esta equação do segundo grau é equivalente à original *apenas* para os $-7\leqslant x\leqslant -4$. Também observe que, neste caso, a regra dos cursinhos também acabaria obtendo somente a raiz $x=-6$. O exemplo a seguir mostrará que essa regra nem sempre funciona.

Exemplo modelo 3
Calcular as raízes reais da equação $x+4+\sqrt{\dfrac{x+4}{x-4}}=\dfrac{12}{x-4}$.

• *Resolução errada*, pois ignora restrições de domínio. Multiplicando os dois membros por $(x-4)$ e usando a identidade clássica $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, obtemos $x^2-16+\sqrt{x^2-16}=12$. Fazendo $u=\sqrt{x^2-16}$, isso é o mesmo que $u^2+u-12=0$, ou seja: $(u+4)(u-3)=0$, de onde $u=\sqrt{x^2-16}=-4$ e $u=\sqrt{x^2-16}=3$. Ora, como o valor de u é uma raiz quadrada, a possibilidade $u=-4$ é falsa, restando $\sqrt{x^2-16}=3$, ou seja: $x^2-16=9$, logo $x^2=25$, e então $x=5$ e $x=-5$ seriam as possíveis raízes da equação original. Aplicando a regra dos cursinhos, vemos que $x=-5$ é raiz falsa. Conclusão: a equação teria uma única raiz: $x=5$.

– *Por que essa conclusão está errada?* Por verificação direta (exercício), se vê que $x=-4\sqrt{2}$ também é raiz.

– *Onde a resolução errou?* Supondo que $x\neq 4$, foi afirmado que

$$(x-4)\sqrt{(x+4)/(x-4)}=\sqrt{(x-4)^2}\sqrt{(x+4)/(x-4)}=\sqrt{(x-4)^2(x+4)/(x-4)}=\sqrt{(x-4)(x+4)}=\sqrt{x^2-16}.$$

Nesta sequência de igualdades, precisamos observar que a primeira somente vale para $x-4\geqslant 0$, ou seja $x\geqslant 4$. De modo que, continuando com a sequência, estaríamos jogando fora as possibilidades $x<4$, *como é o caso da raiz perdida* $x=-4\sqrt{2}$.

• *Resolução alternativa, correta desde o início.*
Domínio da equação? Precisamos ter $x\neq 4$ e $\frac{x+4}{x-4}\geqslant 0$, logo esse domínio é formado pelos $x\leqslant -4$ e pelos $x>4$. Assim que temos dois casos.

– *Primeiro caso:* $x>4$. Temos $(x-4)=\sqrt{(x-4)^2}$ e continuamos como no início da resolução errada, somente acrescentando que a condição $x>4$ garante que $u=\sqrt{x^2-16}$ está bem definida entre os números reais.

– *Segundo caso:* $x\leqslant -4$, o que dá $(x-4)=-\sqrt{(x-4)^2}$ e a sequência acima fica modificada como:

$$(x-4)\sqrt{(x+4)/(x-4)}=-\sqrt{(x-4)^2}\sqrt{(x+4)/(x-4)}=-\sqrt{(x-4)^2(x+4)/(x-4)}=\text{etc.}=-\sqrt{x^2-16},$$

o que nos leva à equação $x^2-16-\sqrt{x^2-16}=12$. Fazendo $u=\sqrt{x^2-16}$ (note que $x^2-16\geqslant 0$, para $x\leqslant -4$), a equação fica $u^2-u-12=0$, ou seja: $(u-4)(u+3)=0$, de onde $u=\sqrt{x^2-16}=4$ e $u=\sqrt{x^2-16}=-3$. Agora, como o valor de u é uma raiz quadrada, a possibilidade $u=-3$ é falsa, restando $\sqrt{x^2-16}=4$, ou seja: $x^2-16=16$, logo $x^2=32$, igualdade satisfeita para $x=\pm\sqrt{32}=\pm 4\sqrt{2}$, logo, como estamos trabalhando com o caso dos $x\leqslant -4$, segue que $x=-4\sqrt{2}$.

– *Conclusão final:* para $x>4$, só há uma raiz: $x=5$, e para $x\leqslant -4$ somente $x=-4\sqrt{2}$.

Revisão

Exercício
a). Escreva os principais cuidados para garantir equivalência no caso da simplificação de equações racionais.
b). Idem no caso de equações radicais.

Problema
Por que, no caso de equações racionais, o conjunto $\mathscr{D}\backslash\mathscr{D}_*$ *é finito, possivelmente vazio? Essa conclusão sempre vale no caso de equações radicais? Justifique-se.*

Problema
Resolver as seguintes equações radicais.
a). $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}=5$ b). $3-\sqrt{x-1}=x$ c). $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}=1$ d). $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-4}=2$ e). $\sqrt{5x^2-8}=2x$.

Problema
Relativamente à equação $\sqrt{1+3x}=\sqrt{2+\lambda x}$ *(onde o parâmetro* $\lambda=0,2,4,6,8$*), uma simplificação sem cuidados transformou a equação em* $1+3x=2+\lambda x$*, de onde se tirou a "solução"* $x=1/(3-\lambda)$*. Pede-se, a partir de exame cuidadoso de domínios, apontar os casos em que realmente tal expressão dá uma raiz da equação.*

Problema
Análogo para a equação $\sqrt{1+3x}=\sqrt{1+\lambda x}$ *(onde o parâmetro* $\lambda=0,2,4,6,8$*).*

Problema
Análogo para a equação $\sqrt{1+3x}=\sqrt{2+\lambda x}$ *(onde o parâmetro* $\lambda=-2,-4,-6,-8$*).*