

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

# Métodos de Matemática Aplicada

Professor Dr. Mark Thompson

Esequia Sauter

Porto Alegre, Março de 2009.

# Prefácio

As presentes notas tratam com aqueles aspectos de análise vetorial e tensorial essencial para o estudo de modelos matemáticos clássicos em diversas áreas, como mecânica do contínuo, dinâmica dos fluidos e para futuros estudos de equações diferenciais parciais. Em parte formam um complemento às disciplinas tradicionais de cálculo. No contexto das particularidades de um curso de bacharelado em matemática aplicada é preciso dar uma formação ao mesmo tempo rápida e completa nos tópicos necessários nas aplicações dando, ao mesmo tempo, alguma exposição de noções geométricas crescentemente importantes. Uma disciplina baseada nestas notas foi ministrada em suas ocasiões desde 1997 e é factível completar os primeiros três capítulos em uma disciplina de 60 horas (4 horas por semana). Um número considerável de exercícios está agregado ao texto no fim das seções. Também, uma discussão relativamente completa é dada de tensores homogêneos isotrópicos e aplicações em elasticidade e fluidos no capítulo 5.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Cálculo Vetorial e Teoria do Potencial</b>	<b>1</b>
1.1	Superfícies . . . . .	1
1.2	Curvas sobre superfícies . . . . .	3
1.3	Métricas sobre superfícies . . . . .	4
1.3.1	Ângulo de intersecção de curvas paramétricas . . . . .	5
1.3.2	Elementos de área na superfície . . . . .	5
1.4	*Observações sobre superfícies e orientações . . . . .	6
1.5	Integração sobre superfícies: heurísticas . . . . .	9
1.6	Os Teoremas da Divergência e de Stokes . . . . .	14
1.6.1	O Teorema de Stokes . . . . .	15
1.7	Definição intrínseca de operadores vetoriais . . . . .	18
1.8	Aplicações do Teorema de Divergência a teoria do potencial . . . . .	21
1.8.1	As identidades de Green . . . . .	21
1.9	Estimativas a priori e princípio do máximo . . . . .	23
1.10	Diversos Exemplos na Teoria Potencial . . . . .	24
1.11	Linhas de Campo e Tubos de Força . . . . .	30
1.12	Cinemática dos Fluidos . . . . .	31
1.13	Leis de conservação de um fluido . . . . .	32
1.14	Teorema de Transporte de Reynolds . . . . .	33
1.15	Circulação e Teorema de Kelvin . . . . .	34
1.16	Dinâmica de Vórtices . . . . .	35
1.17	Eletromagnetismo . . . . .	37
1.17.1	As equações de Maxwell . . . . .	40
1.18	*Potenciais de Retardamento . . . . .	41
1.19	Energia do campo eletromagnético . . . . .	42
1.20	*Reflexão e Refração de ondas eletromagnéticas em uma interface plana de dielétricos . . . . .	45
1.21	*Dipolo Elétrico Oscilante . . . . .	47
1.22	*Relações entre Mecânica clássica e Mecânica Quântica . . . . .	50
1.23	*Comutadores e Simetria para Certos Operadores de Schrödinger . . . . .	52
1.24	A equação de Calor e Invariança de Grupo . . . . .	58
1.24.1	O método de Similitude e a equação de calor . . . . .	59
	Referências Bibliográficas . . . . .	66
<b>2</b>	<b>Problemas de Fronteira e Evolutivos</b>	<b>68</b>
2.1	Simetria e soluções especiais do problema de Dirichlet para o Laplaciano . . . . .	68
2.2	Relações de recorrência para harmônicas esféricas . . . . .	72
2.3	Ortogonalidade . . . . .	73
2.3.1	Esféricas Harmônicas em geral . . . . .	74

2.3.2	Unicidade . . . . .	84
2.3.3	*Analiticidade . . . . .	84
2.3.4	Polinômios Harmônicos (sólidos) . . . . .	88
2.4	Exemplos de Problemas de Fronteira . . . . .	89
2.4.1	Gravitação . . . . .	89
2.4.2	Movimento Irrotacional de um Fluido . . . . .	89
2.4.3	Eletrostática . . . . .	89
2.4.4	Dielétricos . . . . .	90
2.4.5	Magnetostática . . . . .	90
2.4.6	Correntes Estacionários . . . . .	90
2.4.7	Fluxo de Calor . . . . .	91
2.4.8	Coordenadas Cartesianas . . . . .	93
2.4.9	Equação de Laplace em Coordenadas Cilíndricas . . . . .	94
2.4.10	Exemplo . . . . .	95
2.4.11	*O espectro do átomo de Hidrogênio . . . . .	98
2.5	Equação do Calor . . . . .	100
2.5.1	Regiões Infinitas: Heurísticas . . . . .	101
2.5.2	A equação do calor em separação de variáveis . . . . .	103
2.6	A equação da onda . . . . .	106
2.7	Exemplos miscelâneos avançados . . . . .	110
	Referências Bibliográficas . . . . .	126
<b>3</b>	<b>Séries de Fourier e Transformadas</b>	<b>128</b>
3.1	O Fenômeno de Gibbs . . . . .	132
3.2	Somatório de Séries Usando Médias Aritméticas . . . . .	134
3.3	Integração da Séries de Fourier . . . . .	136
3.4	Funções não Diferenciáveis . . . . .	140
3.5	Transformadas Integrais . . . . .	142
3.5.1	Convoluções . . . . .	144
3.5.2	Transformadas de Derivadas . . . . .	145
3.5.3	Transformadas de Fourier em Várias Variáveis . . . . .	145
3.5.4	* Teorema de Inversão de Hankel . . . . .	147
3.5.5	Aplicações da Transformada de Fourier . . . . .	149
3.5.6	*Transformada de Fourier e Hankel na teoria de dinâmica dos fluidos . . . . .	154
3.5.7	A transformada de Laplace . . . . .	157
3.5.8	Frações Parciais . . . . .	161
3.5.9	Aplicação da Transformada de Laplace a equações Diferenciais-Integrais e Sistemas . . . . .	165
3.5.10	Aplicação da Transformada de Laplace a Equação do Calor . . . . .	168
3.5.11	*Aplicação da transformação de Laplace à atração de Van der Waals entre partículas esféricas . . . . .	169
3.5.12	*Transformada de Mellin . . . . .	171
3.5.13	*Aplicação: equações integrais duais . . . . .	173
	Referências Bibliográficas . . . . .	181
<b>4</b>	<b>Existência e Unicidade para as equações da onda e do calor</b>	<b>183</b>
4.1	Equação da Onda . . . . .	183
4.1.1	Um princípio (fraco) de máximo (domínios de dependência e influência) . . . . .	184
4.1.2	A equação da onda em dimensões maiores que um . . . . .	185

4.2	Equação do Calor . . . . .	191
4.2.1	O contraexemplo de Tychonov . . . . .	194
	Referências Bibliográficas . . . . .	199
<b>5</b>	<b>Algebra Tensorial e Cálculo Tensorial</b>	<b>201</b>
5.1	Tensores . . . . .	201
5.2	Tensores Associados . . . . .	208
5.3	Tensores Relativos . . . . .	210
5.4	Operador de Hodge . . . . .	210
5.5	Variedades Diferenciais . . . . .	211
5.6	Conexões Afim e Diferenciação Covariante . . . . .	218
5.7	Variedades Riemannianas . . . . .	221
5.8	A formulação tensorial dos teoremas de Green e Stokes . . . . .	225
5.9	Tensores Homogêneos e Isotrópicos . . . . .	227
5.10	As equações constitutivas e dinâmicas para meios contínuos e fluidos . . . . .	230
5.10.1	Elasticidade Linear . . . . .	232
5.10.2	Fluidos perfeitos . . . . .	234
5.10.3	Tensões em Fluidos . . . . .	234
5.11	Consequências físicas da viscosidade . . . . .	236
5.11.1	A fórmula de Stokes . . . . .	236
5.12	Relatividade e Gravitação . . . . .	240
5.12.1	A teoria de Relatividade Especial . . . . .	240
5.12.2	Propriedades do Tensor de Curvatura . . . . .	244
5.12.3	Teoria Elementar de Relatividade Geral . . . . .	247
5.13	As equações de Einstein e o funcional de Hilbert . . . . .	252
	Referências Bibliográficas . . . . .	258
<b>A</b>	<b>Teoria de Sturm-Liouville</b>	<b>260</b>
<b>B</b>	<b>Variáveis Complexas</b>	<b>265</b>
<b>C</b>	<b>Método de Frobenius e Desigualdade de Cauchy</b>	<b>270</b>
<b>D</b>	<b>Aplicações de Método de Frobenius</b>	<b>275</b>
D.1	A equação hypergeométrica generalizada . . . . .	275
D.2	A equação de Bessel . . . . .	275
D.3	Polinômios de Legendre . . . . .	278
<b>E</b>	<b>Polinômios Ortogonais</b>	<b>280</b>
E.1	A desigualdade de Bessel . . . . .	280
E.2	Polinômios de Legendre . . . . .	281
E.3	Os Polinômios de Hermite . . . . .	282
E.4	Os Polinômios de Laguerre . . . . .	282
<b>F</b>	<b>Noções Algébricas: Frações Parciais</b>	<b>284</b>
<b>G</b>	<b>Tabelas de Transformadas</b>	<b>286</b>
G.1	Transformadas de Fourier . . . . .	287
G.2	Transformadas Cosseno . . . . .	288
G.3	Transformadas Seno . . . . .	289

G.4	Transformadas de Laplace . . . . .	290
G.5	Transformadas de Mellin . . . . .	291
G.6	Transformadas de Hankel . . . . .	292
G.7	Transformadas Cosseno Fourier Finita . . . . .	293
G.8	Transformadas Seno Fourier Finita . . . . .	294
G.9	Transformadas Hankel Finita . . . . .	294

\*: Seções marcadas com \* podem ser omitidas em uma primeira leitura.

# Capítulo 1

## Cálculo Vetorial e Teoria do Potencial

### 1.1 Superfícies

Uma superfície pode ser descrita como um conjunto de pontos satisfazendo uma equação da forma  $F(x, y, z) = 0$  (implícita) ou via equações paramétricas

$$\begin{aligned}x &= f(u, v) \\y &= g(u, v) \quad , \quad (u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2. \\z &= h(u, v)\end{aligned}\tag{1.1}$$

Normalmente  $f, g$  e  $h$  são  $C^r(D)$  em  $(u, v)$ . Os parâmetros  $u$  e  $v$  são chamados de "coordenadas curvilíneas".

#### Exemplo 1.

$$\begin{aligned}x &= u + v \\y &= u - v \quad , \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2. \\z &= 4uv\end{aligned}$$

Via eliminação de  $u$  e  $v$ ,  $x^2 - y^2 = z$ . A superfície é representada na figura 1.

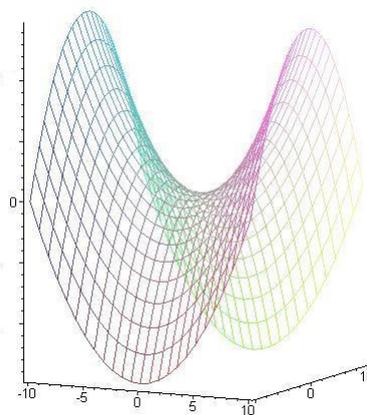


Figura 1.1: Representação geométrica das equações 1.2

Como no caso das curvas, as equações paramétricas das superfícies não são únicas. Por exemplo, se  $x = u \cosh v$ ,  $y = u \sinh v$  e  $z = u^2$ , então eliminando  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  resulta na equação

$$x^2 - y^2 = z \quad , \quad z \geq 0$$

Estas observações motivam a seguinte definição: Duas representações paramétricas são relacionadas por uma transformação de parâmetros da forma

$$u' = \phi(u, v) \quad v' = \psi(u, v). \quad (1.2)$$

Essa transformação é não singular se  $\phi$  e  $\psi$  são injetoras e

$$\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, v)} \neq 0 \quad \text{em } D \text{ (domínio de definição de } (u, v)) \quad (1.3)$$

Se  $D'$  corresponde a  $D$  sob a transformação (1.2), (1.3) é uma condição necessária e suficiente para que a transformação (1.2) admita inversão perto de cada ponto de  $D'$ . A transformação é localmente injetora, mas pode não existir globalmente.

Seja

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v)) \quad (1.4)$$

e denotamos

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \\ \mathbf{r}_2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}. \end{aligned}$$

Um ponto ordinário é definido como um ponto  $\mathbf{r}$  em que

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \neq 0 \quad \text{ou} \quad \text{posto} \begin{pmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{pmatrix} = 2.$$

Isto significa que  $u$  e  $v$  são determinados unicamente na vizinhança de um ponto ordinário. Transformações não singulares levam pontos ordinários em pontos ordinários. De fato,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 &= \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u'} \phi_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u'} \psi_1 \right) \times \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v'} \phi_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v'} \psi_2 \right) \\ &= \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, v)} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u'} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v'} \right) = \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, v)} \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}'_2 \end{aligned}$$

e, como  $\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, v)} \neq 0$ , então  $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \neq 0 \implies \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}'_2 \neq 0$ .

Um ponto que não é ordinário é chamado singular.

**Definição 1.** Uma representação  $R$  em  $\mathbb{R}^3$  é de classe  $r$  ( $C^r(R)$ ) se a superfície representada por  $R$  pode ser coberta por um conjunto de domínios  $\{V_j\}$  tal que cada  $V_j$  é dado por equações paramétricas de classe  $r$ .

**Definição 2.** Duas representações  $R_1$  e  $R_2$  são  $r$ -equivalentes se em cada  $V_j \cap V_k$  existe uma mudança de parâmetros de  $R_1$  a  $R_2$  não singular. Esta relação é uma relação de equivalência.

**Definição 3.** Uma superfície  $S$  de classe  $r$  em  $\mathbb{R}^3$  é uma  $r$ -equivalência na classe de representações.

## 1.2 Curvas sobre superfícies

Suponha que  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  é a equação de superfície de classe  $r$  definida sobre  $D$  e  $u = U(t)$ ,  $v = V(t)$  é uma curva de classe  $s$  em  $D$ . Então,  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(U(t), V(t))$  é uma curva sobre a superfície com classe  $\min(r, s)$ . As equações  $u = U(t)$  e  $v = V(t)$  chamam-se as equações curvilíneas da curva.

Suponha que  $v = c$  (constante). Então,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, c)$  descreve uma curva, a curva paramétrica  $r = c$ . Existe uma curva para cada valor de  $c$ . Similarmente,  $u = c$  da origem as curvas  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(c, v)$ . Sobre cada ponto da superfície existe uma e somente uma curva paramétrica de cada sistema. Seja  $P \equiv (u_0, v_0)$ , então  $(u_0, v_0)$  é unicamente determinado por  $P$  e existe somente duas curvas paramétricas  $u = u_0$  e  $v = v_0$  sobre  $P$ . O vetor tangente a  $v = c$  com  $u \uparrow$  está na direção  $\mathbf{r}_1$  e o vetor tangente  $u = c$  com  $v \uparrow$  na direção  $\mathbf{r}_2$ .

É uma consequência do fato que  $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \neq 0$  que as curvas paramétricas de sistemas diferentes não tem contato tangencial. Duas curvas paramétricas sobre  $P$  são ortogonais se  $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0$  em  $P$ . Se esta condição é satisfeita em cada ponto  $(u, v) \in D$ , os dois sistemas de curvas são ortogonais.

Para curva geral  $u = U(t)$ ,  $v = V(t)$  o vetor tangente está na direção

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}_1 \frac{du}{dt} + \mathbf{r}_2 \frac{dv}{dt} \quad (1.5)$$

Conseqüentemente, levando em conta o fato que  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  são não nulos e independentes ( $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \neq 0$ ), o vetor tangente à curva sobre a superfície em  $P$  pertence ao plano contendo os vetores  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  em  $P$ . Este é o plano tangencial.

O vetor normal à superfície em  $P$  é o vetor normal ao plano tangencial em  $P$  e é perpendicular a  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ . A orientação é fixada via a convenção que se  $\mathbf{N}$  for o vetor normal unitário,  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  e  $\mathbf{N}$  têm orientações a mão direita (positiva). Segue-se que

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{H}, \quad \text{onde } H = |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2| \neq 0. \quad (1.6)$$

Observamos que a mudança de parâmetros como em (1.2) implica que  $\mathbf{N}' \parallel \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u'} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v'}$  e a orientação é a mesma se  $\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, v)} > 0$  e oposto se  $\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, v)} < 0$ . O Jacobiano é contínuo em  $D$  e não nulo, o que significa que tem o mesmo sinal e a mudança de parâmetros preserva a orientação se  $\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, v)} > 0$  em um ponto em  $D$  (ou não preserva se  $\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, v)} < 0$  em um ponto).

**Exemplo 2.** A esfera descrita em coordenadas polares de raio  $a$  e centro  $O$  é

$$\mathbf{r} = a(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

Os pólos  $u = 0$  e  $u = \pi$  são singularidades artificiais e o domínio de  $u, v$  é  $0 < u < \pi$  e  $0 < v < 2\pi$ . As curvas

$$\begin{aligned} v = \text{constante} &\Rightarrow \text{são meridianais} \\ u = \text{constante} &\Rightarrow \text{são paralelos,} \end{aligned}$$

Os sistemas são ortogonais, isto é,  $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0$  em cada ponto. A direção  $\mathbf{N}$  está na direção para fora da esfera.

**Exemplo 3.** Superfície de revolução com eixo de revolução  $OZ$ .

Curva geradora no plano  $XOZ$ ,

$$x = g(u), \quad y = 0, \quad z = f(u)$$

$v$  é o ângulo de revolução em volta de  $OZ$ . As equações paramétricas são

$$\mathbf{r} = (g(u) \cos v, g(u) \sin v, f(u)).$$

O domínio é  $0 \leq v \leq 2\pi$  e imagem de  $u$ .

$$v = \text{constante} \Rightarrow \text{são meridianais,}$$

$$u = \text{constante} \Rightarrow \text{são paralelas,}$$

$$\mathbf{r}_1 = (g' \cos v, g' \sin v, f'),$$

$$\mathbf{r}_2 = (-g \sin v, g \cos v, 0),$$

e  $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0 \quad \forall u, v$ . O vetor normal  $\mathbf{N}$  é dado por

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{H} = \frac{(-f' \cos v, -f' \sin v, g')}{(f'^2 + g'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

### 1.3 Métricas sobre superfícies

Dado  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ , considere a curva  $\varphi: u = U(t), v = V(t)$ . Então  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(U(t), V(t))$  descreve  $\varphi$  e a distância  $s$  sobre  $\varphi$  é dada por

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 = \left(\mathbf{r}_1 \frac{du}{dt} + \mathbf{r}_2 \frac{dv}{dt}\right)^2 \quad (1.7)$$

$$= E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \left(\frac{du}{dt}\right) \left(\frac{dv}{dt}\right) + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \quad (1.8)$$

onde  $E = \mathbf{r}_1^2$ ,  $F = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$  e  $G = \mathbf{r}_2^2$ . (1.7) pode ser escrita na forma compacta

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2, \quad (1.9)$$

que é a primeira forma quadrática fundamental.

Geometricamente isto pode ser dado a interpretação de "distância infinitesimal" de  $(u, v)$  a  $(u + du, v + dv)$ . Lembrando que

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)^2 = \mathbf{r}_1^2 \mathbf{r}_2^2 - (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^2 \quad (1.10)$$

temos que  $E > 0$ ,  $G > 0$  e  $H^2 = EG - F^2 > 0$ .

**Exemplo 4.** Considere  $z = u^2 - v^2$ ,  $x = u$  e  $y = v$ , então

$$\mathbf{r}_1 = (1, 0, 2u),$$

$$\mathbf{r}_2 = (0, 1, -2v),$$

$$E = \mathbf{r}_1^2 = 1 + 4u^2,$$

$$F = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = -4uv,$$

$$G = \mathbf{r}_2^2 = 1 + 4v^2,$$

$$H = \sqrt{(EG - F^2)} = (1 + 4u^2 + 4v^2)^{\frac{1}{2}}$$

### 1.3.1 Ângulo de intersecção de curvas paramétricas

As direções paramétricas são dadas por  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ . O ângulo  $\Omega$  ( $0 < \Omega < \pi$ ) de intersecção é dado por

$$\cos \Omega = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2|} = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad (1.11)$$

$$\text{sen } \Omega = \frac{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2|} = \frac{H}{\sqrt{EG}} \quad (1.12)$$

### 1.3.2 Elementos de área na superfície

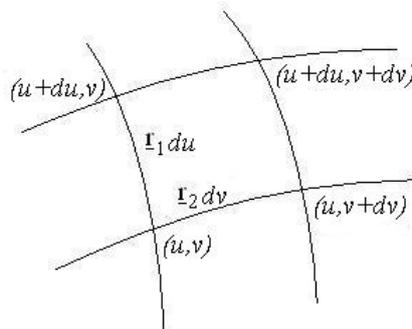


Figura 1.2: Elemento de área da superfície

Na figura 1.3.2, a área aproximada de um elemento é dada por

$$|\mathbf{r}_1 du \times \mathbf{r}_2 dv| = Hdudv$$

Isto mostra a introdução do elemento de área  $dS^1$  via

$$dS = Hdudv \quad (1.13)$$

**Exemplo 5.** *Dados*

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= ((b + a \cos u) \cos v, (b + a \cos u) \text{sen } v, a \text{sen } v), \\ E &= a^2, \quad F = 0, \quad G = (b + a \cos u)^2, \\ H &= a(b + a \cos u), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi \end{aligned}$$

então a área é

$$\text{Área} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a(b + a \cos u) dudv = 4\pi^2 ab$$

<sup>1</sup>É difícil definir precisamente o conceito de área via aproximação, por exemplo, via triangulação interior e exterior, como foi demonstrado por Schwarz, Werke p.309.

Veja Vol. II Theory of Function of Real Variable, J. Pierpont, Dover Publications, p.603.

## 1.4 \*Observações sobre superfícies e orientações

Considere um conjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  com a seguinte propriedade:  $\forall x \in M \exists$  um  $W$  aberto  $\subseteq \mathbb{R}^n$  e  $\phi \in C^k(W)$  tal que  $M \cap W = \{x \in W; \phi(x) = 0\}$  e  $D_x\phi$  tem posto  $n \forall x \in W$ . Então, dizemos que  $M$  define uma variedade de dimensão  $r = m - n$  e classe  $C^q$ . De fato, podemos escrever

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+r}) \\ \vdots \\ \phi_m(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+r}) \end{pmatrix}$$

tal que

$$\frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)} \neq 0$$

Utilizando o teorema da função implícita,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(x_{m+1}, \dots, x_{m+r}), \\ &\vdots \\ x_m &= x_m(x_{m+1}, \dots, x_{m+r}), \end{aligned} \quad x \in U \subset W$$

Claramente, o espaço tangencial  $T_x\phi = N(D_x\phi)$ . Um vetor  $\mathbf{n}$  é normal a  $M$  em  $x_0$  se  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{h} = 0 \forall \mathbf{h} \in T_{x_0}\phi$ .

Considere um aberto  $D$  com fronteira  $\partial D$  tal que  $x_0 \in \partial D$  e  $U$  é uma vizinhança de  $x_0$  tal que  $\partial D \cap U$  é uma variedade de dimensão  $n - 1$ . Dizemos que  $D$  é situado em um lado da fronteira  $\partial D$  em  $U$  se existe uma função  $\phi$  de classe  $C^1$  em  $U$  tal que  $D_x\phi \neq 0 \forall x \in U$  e

$$\partial D \cap U = \{x \in U : \phi(x) = 0\}$$

e

$$D \cap U = \{x \in U : \phi(x) < 0\}.$$

Se  $\partial D$  é uma variedade de dimensão  $n - 1$  e cada  $x_0 \in D$  possui uma vizinhança de forma anteriormente descrita, então dizemos que  $D$  está situada em um lado de sua fronteira.

Suponha que  $\mathbf{n} \neq 0$  é um vetor normal a fronteira  $\partial D$  em  $x$ .  $\mathbf{n}$  é o vetor normal exterior no ponto  $x$  se existe  $\delta > 0$  tal que  $x + t\mathbf{n} \in D$ , para  $-\delta < t < 0$  e  $x + t\mathbf{n} \in \overline{D}^c$  para  $0 < t < \delta$ . Suponha que  $D$  está situado a um lado de sua fronteira, então  $\mathbf{n}(x) = \nabla\phi$  é o vetor normal unitário exterior a  $D$  no ponto  $x$ .

Coloque  $\varphi(t) = \phi(x + t\mathbf{n}(x))$ , então  $\varphi(0) = 0$  e  $\varphi'(0) = \nabla\phi(x) \cdot \mathbf{n}(x) = |\nabla\phi|^2 > 0$ . Existe  $\delta > 0$  tal que  $\varphi(t) < 0$  para  $-\delta < t < 0$  e  $\varphi(t) > 0$  para  $0 < t < \delta$ . Segue-se que  $\nabla\phi$  é um vetor normal exterior no ponto  $x$  e  $\mathbf{n}(x) = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$  é um vetor normal unitário exterior a  $D$  no ponto  $x$ . Do fato que  $\phi$  é  $C^1$ ,  $\mathbf{n}$  é contínuo em  $\partial D \cap U$ .

**Observação 1.** (Na linguagem de formas)

Introduzindo a orientação  $(e_1, \dots, e_n)$  em  $\mathbb{R}^n$ , defina  $*\nu$  por  $\beta \times \nu = (\beta, *\nu)e_1 \times \dots \times e_n \forall \beta$ , onde  $(\beta, \lambda) = \sum_{[\lambda]} \beta^\lambda x^\lambda$ ,  $\beta = \sum_{[\lambda]} \beta^\lambda e_\lambda$ ,  $x = \sum_{[\lambda]} x^\lambda e_\lambda$ . De fato, se  $\nu = \sum \nu^i e_i$  e  $*\nu = \sum \alpha^i * e_i$ ,  $\alpha^i = (-1)^{n+i} \nu^i$ , então  $*\nu$  define uma orientação induzida na fronteira  $\partial D$  e  $(*\nu, \nu)$  define uma orientação em  $D$ .

Considere  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $\overline{D}$  compacto, com  $\partial D$  uma curva de Jordan  $\gamma$  (homeomorfa a um círculo) que é seccionalmente diferenciável. Seja  $D_0$  o interior de tal curva (isto existe pelo

teorema de Jordan e Brouwer). Suponha que o vetor normal  $\mathbf{n}(\tau)$  e vetor tangente  $\mathbf{t}(x)$  são positivamente orientados  $(e_1, e_2)$ , onde  $\mathbf{n}(\tau)$  é o vetor normal exterior. Lembre-se do termo de índice

$$I(x, x_0) = \begin{cases} +1 & x_0 \in D^0 \\ 0 & x_0 \in D^c \end{cases}$$

Considere um campo vetorial  $(a_1(x), a_2(x)) = \mathbf{a}(x) \in C^1(D)$ , tal que  $\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}$  é integrável a Riemann em  $D$  e tal que  $\mathbf{a}(x) \in C^0(\overline{D})$ .

**Teorema 1.** (*Teorema de Green*)

$$\int_{+\gamma} a_1 dy - a_2 dx = \int_{+\gamma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} d\tau = \int_D \operatorname{div} \mathbf{a} dx dy \quad (1.14)$$

*Demonstração.* Restringimos a demonstração a uma caso em que  $x$  é cortado em cada linha paralela aos eixos  $OX, OY$  em dois pontos

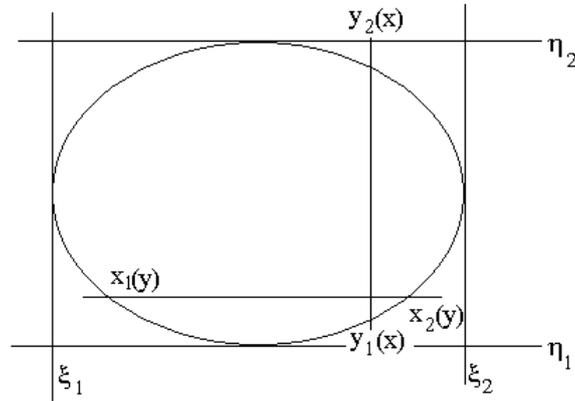


Figura 1.3: Representação da curva  $\gamma$ .

Observe que

$$\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial a_1}{\partial x} dx = a_1(x_1(y), y) - a_1(x_2(y), y)$$

e

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\partial a_1}{\partial x} dx dy &= \int_{x_1}^{x_2} a_1(x_1(y), y) dy - \int_{x_1}^{x_2} a_1(x_2(y), y) dy \\ &= \int_{x_1}^{x_2} a_1(x_1(y), y) dy + \int_{x_2}^{x_1} a_1(x_2(y), y) dy \\ &= \int_{+\gamma} a_1 dy, \end{aligned}$$

utilizando resultados sobre cálculos de integrais múltiplas de Riemann por integrais iteradas de Riemann.

Similarmente

$$\int_D \frac{\partial a_2}{\partial y} dx dy = - \int_{+\gamma} a_2 dx$$

e o resultado é estabelecido.

**Exemplo 6.** Coloque  $a_1 = x$  e  $a_2 = 0$ , segue-se que

$$|D| = \int \int_D dx dy = \int_{\gamma} x dy$$

Similarmente,

$$|D| = \int_{\gamma} y dx$$

**Observação 2.** Considere uma aplicação de  $D \hookrightarrow D'$  via  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  tal que a aplicação é injetora e  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} > 0$ .

Segue-se que se  $\gamma' = \partial D'$  a orientação de  $\gamma$  é

$$|D'| = \int_{+\gamma'} u dv = \int_{+\gamma} u(v_x dx + v_y dy) = \int_D \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} dx dy$$

aplicando o Teorema de Green.

**Observação 3.** As idéias básicas de geometria diferencial e superfícies evoluíram no século XIX nas mãos de Gauss, Riemann e Darboux, para assumir formulações mais modernas na noção de variedade de Weyl no contexto de superfície de Riemann. Esta noção de variedade envolve o conceito de um atlas de cartas. A versão semi-clássica dada aqui funciona adequadamente. Resumimos a seguir aspectos centrais.

Consideramos um espaço vetorial finito  $X$  (Sobre  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) com base  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Tal base determina uma orientação. Duas bases  $\{e_1, \dots, e_n\}$  e  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$  são equivalentes sob orientação definindo  $L : X \rightarrow X$  por  $Le_j = e'_j$ ,  $\det L > 0$ . Uma aplicação  $C^k f : U \subset X \hookrightarrow X$ ,  $U$  aberto, preserva orientação se  $\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} > 0$ .

Em geral uma  $C^k$ -variedade real de dimensão  $n$  é descrita por um atlas de cartas  $(U, \varphi)$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . No caso que duas cartas admissíveis  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  em  $M$  satisfazem ou  $U \cap V = \emptyset$  ou que  $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \hookrightarrow \psi(U \cap V)$  preserva orientação, dizemos que as cartas são compatíveis sob orientação. Se todas as cartas são compatíveis sob orientação o atlas de  $M$  é orientado.

Considere  $\mathbb{R}^n_- = \{\xi : \xi \leq 0\}$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^n_-$  é relativamente aberto se existe um aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  tal que  $A = U \cap \mathbb{R}^n_-$ . A definição de um  $C^k$ -variedade real de dimensão  $n$  com fronteira  $\partial M$  é feito em termos da existência de um atlas de cartas  $(U, \varphi)$  tal que  $\varphi(U)$  é relativamente aberto em  $\mathbb{R}^n_-$ . Um ponto  $x \in M$  é um ponto de fronteira ou um ponto interior se  $\phi(x)$  se é um ponto de fronteira ou um ponto interior de  $\mathbb{R}^n_-$ .

Existe o seguinte resultado técnico:

Suponha que  $M \in \mathbb{R}^n$  é uma  $C^k$ -variedade orientado de dimensão  $n$  com fronteira  $\partial M$ . Então o atlas orientado para  $M$  induz um atlas orientado para  $\partial M$ .

De fato, localmente uma vizinhança de  $x \in \partial M$  é descrito por  $\phi \circ \psi^{-1}$  da forma

$$(0, \xi_2, \dots, \xi_n) \hookrightarrow (0, \eta_2(\xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \eta_n(\xi_1, \dots, \xi_n)).$$

Sabemos do fato que  $M$  é orientado que

$$\frac{\partial(\eta_1, \dots, \eta_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} > 0.$$

Claramente, em  $\partial M$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \eta_1(0, \xi_2, \dots, \xi_n), \\ \eta_j &= \eta_j(0, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad j = 2, \dots, n, \end{aligned}$$

segue-se que

$$\begin{aligned} 0 &< \left. \frac{\partial(\eta_1, \dots, \eta_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right|_{\partial M} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\eta_2}{\partial\xi_1} & \dots & \frac{\partial\eta_n}{\partial\xi_1} \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \frac{\partial\eta_2}{\partial\xi_n} & \dots & \frac{\partial\eta_n}{\partial\xi_n} \end{vmatrix}, \\ &= \frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_n} \frac{\partial(\eta_2, \dots, \eta_n)}{\partial(\xi_2, \dots, \xi_n)} \quad (\text{dentro e sobre a fronteira}). \end{aligned}$$

Agora, observamos que

$$\eta_1 \leq 0 \quad \text{para todo} \quad \xi_1 \leq 0 \Rightarrow \frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_1} \geq 0.$$

Mas a relação acima implica que  $\frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_1} > 0$  e assim  $\frac{\partial(\eta_2, \dots, \eta_n)}{\partial(\xi_2, \dots, \xi_n)} > 0$  ou que  $(\xi_2, \dots, \xi_n) \rightarrow (\eta_2, \dots, \eta_n)$  preserva orientação.

Com estas preliminares sobre variedades e orientação introduzidas apresentamos uma versão clássica do Teorema de Stokes, sendo essencialmente aquela do livro de Courant.

## 1.5 Integração sobre superfícies: heurísticas

O contra-exemplo de Schwarz dá um aviso dos cuidados que uma teoria geral de integração sobre superfícies requer. Aqui superamos estas dificuldades supondo um relativamente alto grau de regularidade utilizando uma definição analítica de área.

Considere a área da superfície  $S$  representada por

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

$D$  contido numa curva de Jordan e  $f \in C^1(D)$ . Considere uma cobertura de  $D$  por uma grade  $(mh, nk)$  e superfícies contidas nas curvas  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$ ,

$$\begin{aligned} C_1 &= f(x, nk) & mh \leq x \leq (m+1)h \\ C_2 &= f((m+1)h, y) & nk \leq y \leq (n+1)k \\ C_3 &= f(x, (n+1)k) & mh \leq x \leq (m+1)h \end{aligned}$$

e

$$C_4 = f(nh, y) \quad nk \leq y \leq (n+1)k$$

A área  $S_{mn}$  é aproximada pela área do quadrilátero  $\Delta_{mn}$  com vetores  $P_1 = (mh, nk, f(mh, nk))$ ,  $P_2 = ((m+1)h, nk, f((m+1)h, nk))$ ,  $P_3 = ((m+1)h, (n+1)k, f((m+1)h, (n+1)k))$  e  $P_4 = (mh, (n+1)k, f(mh, (n+1)k))$ . Colocando  $\tau_{mn} = f(mh, nk)$ , o plano tangente  $T$  em  $P_1$  é

$$z - \tau_{mn} = \frac{\partial f}{\partial x}(mh, nk)(x - \xi_m) + \frac{\partial f}{\partial y}(mh, nk)(y - \eta_n)$$

pondo  $\xi_m = mh$  e  $\eta_n = nk$ .

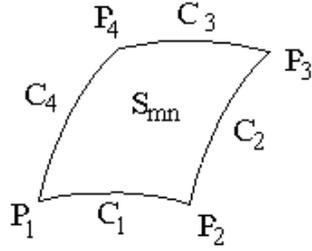


Figura 1.4: Representação de um segmento de área  $S_{mn}$ .

Supondo que  $T$  faz o ângulo  $\alpha_{mn}$  com o plano- $xy$  e que  $D_{mn}$  é a área da projeção de  $\Delta_{mn}$  no plano- $xy$ . Segue-se que

$$D_{mn} = \Delta_{mn} \cos(\alpha_{mn}).$$

Mas é fácil calcular que

$$\cos(\alpha_{mn}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial f(\xi_m, \eta_n)^2}{\partial x^2} + \frac{\partial f(\xi_m, \eta_n)^2}{\partial y^2}}}$$

e assim que

$$\Delta_{mn} = D_{mn} \sqrt{1 + \frac{\partial f^2}{\partial x^2}(\xi_m, \eta_n) + \frac{\partial f^2}{\partial y^2}(\xi_m, \eta_n)}.$$

Somando estas áreas sobre os pontos da grade interno a  $D$  no limite  $m, n \rightarrow \infty$ , temos

$$\sum_{m,n} \Delta_{mn} \rightarrow A = \int \int_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx dy$$

Esta argumentação heurística sugere que definimos a área da superfície  $S$  por

$$|S| = \int \int_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx dy,$$

e definimos a

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx dy$$

como o elemento de área da superfície  $z = f(x, y)$ .

Suponha que  $S$  é representada implicitamente por

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

e sobre  $S$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$ , por exemplo  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} > 0$ . Assim, localmente  $z = z(x, y)$  sobre  $S$  e segue-se que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} / \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} / \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

dando a expressão e

$$|S| = \int \int_D \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2} / \frac{\partial \varphi}{\partial z} dx dy$$

Nesta discussão, um papel especial foi dado à coordenada  $z$ , mas podemos igualmente ter representado a área por integrais da forma

$$\iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dydz \quad \text{ou} \quad \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz,$$

levando no caso implícito a

$$\iint \sqrt{|\nabla\varphi|^2} / \frac{\partial\varphi}{\partial y} dx dz \quad \text{e} \quad \iint \sqrt{|\nabla\varphi|^2} / \frac{\partial\varphi}{\partial x} dy dz$$

Estas expressões definidas de fato dão a mesma área.

Aplique a transformação

$$\begin{aligned} x &= x(y, z) \\ y &= y \end{aligned}$$

a integral

$$\iint_D \sqrt{|\nabla\varphi|^2} / \frac{\partial\varphi}{\partial z} dx dy$$

onde  $x = x(y, z)$  é obtida da equação  $\varphi(x, y, z) = 0$ . Mas  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(y, z)} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} / \frac{\partial\varphi}{\partial x}$  e segue-se que

$$\iint_D \frac{\sqrt{|\nabla\varphi|^2}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}} dx dy = \iint_{D'} \frac{\sqrt{|\nabla\varphi|^2}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}} dy dz$$

É mais elegante supor que  $S$  é uma superfície com uma representação paramétrica regular:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v),$$

$(u, v) \in R \subseteq \mathbb{R}^2$ , tal que

$$\left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right) \neq 0, \quad (u, v) \in R$$

Suponha que em  $\mathbb{R}$ ,  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} > 0$ . Do teorema da função Inversa,

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial\psi}{\partial v} / \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial\psi}{\partial u} / \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial v} / \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial\varphi}{\partial u} / \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}. \end{aligned}$$

Utilizando,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y},\end{aligned}$$

obtemos que

$$\sqrt{1 + |\nabla z|^2} = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}} \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2}.$$

Por mudança de variáveis,

$$\begin{aligned}\int \int_D \sqrt{1 + |\nabla z|^2} dx dy &= \int \int_R \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}} \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} dudv \\ &= \int \int_R \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2} dudv \\ &= \int \int_R \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2} dudv\end{aligned}$$

Observe que dado que a representação é regular, um  $J_i \neq 0$  e a apropriada integral projetada é igual ao valor da representação paramétrica.

A primeira forma quadrática fundamental de geometria diferencial,

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

com

$$\begin{aligned}E &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)^2, \\ F &= \frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial u} \frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\chi}{\partial u} \frac{\partial\chi}{\partial v}, \\ G &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)^2,\end{aligned}$$

resulta na representação

$$EG - F^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2.$$

Vale a pena observar que considerando o produto vetorial  $\underline{r}_u du \times \underline{r}_v dv = (J_1, J_2, J_3)dudv$ , temos a noção da área orientada com valor absoluto

$$|\underline{r}_u du \times \underline{r}_v dv| = \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2} dudv$$

Até o presente momento restringimos nossa atenção ao caso de superfícies de dimensão dois imersas em  $\mathbb{R}^3$ . Podemos generalizar isso da seguinte maneira:

Considere uma superfície representada por

$$\begin{aligned}x_1 &= \varphi_1(u_1, \dots, u_r) \\ &\vdots \\ x_n &= \varphi_n(u_1, \dots, u_r)\end{aligned}, \quad (u_1, \dots, u_r) \in D \subseteq \mathbb{R}^r, \quad r \leq n,$$

tal que  $x = \varphi(u) \in C^1(D)$ . Considere a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_r} & \frac{\partial x_2}{\partial u_r} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_r} \end{pmatrix}$$

É possível formar desta matriz menores  $D_\nu$ ,  $\nu = 1, \dots, \binom{n}{r}$ , e é possível considerar que uma aproximação quadrilateral  $\Delta$  da área da superfície tem projeções em  $r = 1, \dots, \binom{n}{r}$  direções. Isto leva-nos a uma definição da área  $A$  de uma  $r$ -dimensional superfície

$$A = \int \cdots \int_D \sqrt{\sum (D_\nu)^2} du_1 \cdots du_r$$

Vamos demonstrar que essa definição é totalmente apropriada para o caso  $r = n - 1$ .

Suponha que  $S$  pode ser representado como

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \neq 0,$$

com área

$$|S| = \int \cdots \int \frac{|\nabla \varphi|}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}} dx_1 \cdots dx_{n-1}.$$

(com a mesma argumentação heurística usada no caso  $n = 3$ ), ou por

$$x_i = \psi_i(u_1, \dots, u_{n-1}), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad u \in D,$$

Observe que

$$D_i = \frac{\partial(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_{n-1})} = \frac{1}{\frac{\partial(u_1, \dots, u_{n-1})}{\partial(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n)}}.$$

Sabendo que

$$\begin{aligned} \frac{D_\nu}{D_n} &= \frac{\partial(x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_{n-1})} / \frac{\partial(x_1, \dots, x_{n-1})}{\partial(u_1, \dots, u_{n-1})} \\ &= \frac{\partial(x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n)}{\partial(x_1, \dots, x_{n-1})} \end{aligned}$$

e que  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , concluímos que

$$\frac{D_\nu}{D_n} = \pm \frac{\partial x_n}{\partial x_\nu} = \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} / \frac{\partial \varphi}{\partial x_n},$$

expandindo em termos da mesma fila.

Observe que

$$\begin{aligned} |S| &= \int \cdots \int_D \frac{|\nabla \varphi|}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}} \frac{\partial(x_1, \dots, x_{n-1})}{\partial(u_1, \dots, u_{n-1})} du_1 \cdots du_{n-1} \\ &= \int \cdots \int_D \frac{|\nabla \varphi|}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}} D_n du_1 \cdots du_{n-1}. \end{aligned}$$

O resultado é válido se

$$\frac{|\nabla\varphi|}{\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}} D_n = \sqrt{\sum D_i^2}$$

ou se

$$|\nabla\varphi|^2 = \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)^2}{D_n^2} \sum D_i^2,$$

o que é o caso, lembrando do Teorema de Binet-Cauchy (Archbold [2], § 8.2,5.2 ou Littlewood [9] página 154) que afirma que

$$\sum_{i=1}^n D_i^2 = \left| \left( \frac{\partial x}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u_{n-1}} \right)^T \left( \frac{\partial x}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u_{n-1}} \right) \right|$$

## 1.6 Os Teoremas da Divergência e de Stokes

Suponha que uma região  $V$  com fronteira  $\partial V$  admite uma disseção regular relativa aos eixos  $(OX, OY)OZ$  no seguinte sentido:  $V = \cup_{i=1}^F V_i$ , onde cada  $V_i$  tem fronteira  $\partial V'_{i3}$ ,  $\partial V''_{i3}$  descrita por  $x_3 = \varphi_1^{(3)}(x_1, x_2)$ ,  $z = \varphi_2^{(3)}(x_1, x_2)$  e uma superfície cilíndrica com geradores paralelos a  $OZ$  e tal que o plano tangencial existe e não é perpendicular ao plano  $XOY$ , salvo talvez na curva  $\partial V'_2 \cap \partial V''_2$ . Similarmente para disseções relativas a  $OX$  e  $OY$ . Também, supomos que  $V$  tem conteúdo de Jordan finito.

Podemos introduzir como nas seções anteriores as integrais de superfície  $\int_{\partial V_3} f dx_1 dx_2$ , etc.

**Teorema 2.** *Teorema da Divergência:*

Suponha que  $(X_1, X_2, X_3) \in C^1(V \cap C^0(\bar{V}))$  e  $V$  tem uma disseção regular com respeito aos eixos  $(OX_1, OX_2, OX_3)$ . Então,

$$\int \int_{\partial V} X_1 dx_2 dx_3 + X_2 dx_1 dx_3 + X_3 dx_1 dx_2 = \int \int \int_V \operatorname{div}(X_1, X_2, X_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

*Demonstração.* É suficiente demonstrar que

$$\int \int \int_{V_i} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 = \int \int_{\partial V_i} X_1 dx_2 dx_3$$

Seja  $\Sigma_i^{(1)}$  a projeção do elemento da disseção  $V_i$  no plano  $X_2OX_3$ . Entre por um teorema conhecido do teorema da integral de Riemann, temos que

$$\begin{aligned} \int \int \int_{V_i} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 &= \int \int_{\Sigma_2^{(1)}} dx_2 dx_3 \int_{\varphi_2^{(1)}}^{\varphi_2^{(2)}} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} dx_1 \\ &= \int \int_{\Sigma_2^{(1)}} \left[ X_1(x_2, x_3, \varphi_2^{(1)}(x_2, x_3)) - X_1(x_2, x_3, \varphi_1^{(1)}(x_2, x_3)) \right] dx_2 dx_3 \\ &= \int \int_{\partial V_i} X_1 dx_2 dx_3, \end{aligned}$$

com relações semelhantes para as disseções com respeito aos outros eixos. Somando em  $i$  obtemos o resultado.

A seguir demonstraremos uma versão clássica do teorema de Stokes reduzindo a demonstração essencialmente a uma aplicação do teorema de Green em duas dimensões, o mesmo sendo uma consequência do Teorema Fundamental do Cálculo.

### 1.6.1 O Teorema de Stokes

Considere  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  compacto com  $\partial D$  uma curva de Jordan (homeomorfo a um círculo), que é seccionalmente diferenciável. Seja  $D^0$  o interior de  $\partial D$  e suponha que  $(\mathbf{n}(\tau), \mathbf{t}(\tau))$  são positivamente orientados,  $\mathbf{n}(\tau)$  sendo o vetor normal exterior,  $\tau \in [0, 1]$ . Considerem superfícies  $S$  compostas de imagem da região  $D$ , limitadas por curvas fechadas  $C = \partial S$ ,

$$S = \varphi(D), \quad \varphi \text{ injetora e diferenciável}$$

$$\varphi(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)),$$

tal que a orientação é preservada coerentemente. Isto é dizer que se  $S = \varphi_1(D_1)$  e  $S = \varphi_2(D_2)$ ,  $D_2 = \varphi_2^{-1}\varphi_1(D_1)$ , então  $\frac{\partial(\varphi_2^{-1}, \varphi_1)}{\partial(u, v)} > 0$  e  $(D_1, \partial D_1)$  tem orientação positiva.

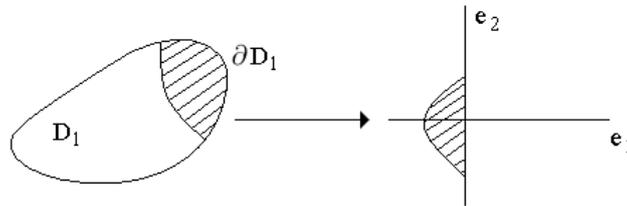


Figura 1.5: Representação geométrica

Considere o campo vetorial  $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$  e a integral de superfície  $\int \int_S \mathbf{A} \cdot \nu dS$ , com  $\nu$  o vetor normal de  $S$  (positivamente orientado).

$$\int \int_S \mathbf{A} \cdot \nu dS = \int \int_S a_1 dx_2 dx_3 + a_2 dx_3 dx_1 + a_3 dx_1 dx_2$$

Pelo resultado sobre transformações de integrais

$$\int \int_S \mathbf{A} \cdot \nu dS = \int \int_D \left( a_1 \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(u, v)} + a_2 \frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(u, v)} + a_3 \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)} \right) dudv$$

Agora vamos escolher

$$\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

e escrever  $\frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(u, v)} = \Delta_1$ , etc.

Segue que

$$\int \int_S \nabla \times \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int \int_D \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} dudv$$

Observe que agrupando termos em  $B_1$  obtemos

$$-\frac{\partial B_1}{\partial x_2} \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial B_1}{\partial x_3} \frac{\partial(x_1, x_3)}{\partial(u, v)}$$

e somando

$$0 \equiv \frac{\partial B_1}{\partial x_1} \frac{\partial(x_1, x_1)}{\partial(u, v)},$$

equivale a

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial v} \left( \frac{\partial B_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial B_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u} + \frac{\partial B_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial u} \right) - \frac{\partial x_1}{\partial u} \left( \frac{\partial B_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial B_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial v} + \frac{\partial B_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) \\ = \frac{\partial(B_1, x_1)}{\partial(u, v)}, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\int \int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \int_D \left( \frac{\partial(B_1, x_1)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial(B_2, x_2)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial(B_3, x_3)}{\partial(u, v)} \right) dudv$$

Mas aplicando o Teorema de Green em duas dimensões (Teorema de Stokes!) obtemos que, por exemplo,

$$\begin{aligned} \int \int_D \frac{\partial(B_1, x_1)}{\partial(u, v)} dudv &= \int_{\partial D} B_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} du + B_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} dv \\ &= \int_C B_1 \frac{\partial x_1}{\partial \tau} d\tau \end{aligned}$$

e similarmente para os termos envolvendo  $B_2, B_3$ . Somando, finalmente concluimos que

$$\begin{aligned} \int \int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= \int_C \mathbf{B} \cdot \left( \frac{\partial x_1}{\partial \tau}, \frac{\partial x_2}{\partial \tau}, \frac{\partial x_3}{\partial \tau} \right) d\tau \\ &= \int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned}$$

Demonstramos o teorema de Stokes:

**Teorema 3. Teorema de Stokes**

Suponha que  $S$  é uma superfície  $C^1$  bordada pela curva  $C$  seccionalmente diferenciável,  $S$  e  $C$  sendo coerentemente orientadas e  $\mathbf{B} \in C^1(D)$ ,  $D$  aberto,  $D \supset S$ . Então

$$\int \int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{B} \cdot ds.$$

## Aplicação

Considere o círculo  $C = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  no plano  $xy$  e seja  $\Omega$  o ângulo sólido gerado pelo disco  $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ , no ponto  $P = (x, y, z) = \mathbf{r}$ . Suponha que  $P$  descreve a curva fechada orientada  $\Gamma$  que não cruza o círculo  $C$  e seja  $p$  o número de vezes que  $\Gamma$  cruza o disco  $x^2 + y^2 < 1, z = 0$  de cima ( $z > 0$ ) para baixo ( $z < 0$ ) e  $n$  o número de vezes que cruza de baixo ( $z < 0$ ) para cima ( $z > 0$ ). Supondo que  $P$  começa no ponto  $P_0$  em  $\Gamma$  com  $\Omega = \Omega_0$ , mostre que  $P$  movendo em  $\Gamma$  voltará a  $P_0$  com um valor  $\Omega = \Omega_1$  satisfazendo  $\Omega_1 - \Omega_0 = 4\pi(p - n)$ . Utilizando o exercício 3 observe que

$$\nabla \Omega = - \int_C \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad \mathbf{r}' \in C$$

e

$$\begin{aligned}
\Omega_1 - \Omega_0 &= \int_{\Gamma} d\Omega = \int_{\Gamma} \nabla\Omega \cdot d\mathbf{r} \\
&= - \int_{\Gamma} d\mathbf{r} \int_C \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \\
&= - \int_{\Gamma} \int_C \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot (d\mathbf{r} \times d\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3}.
\end{aligned}$$

Finalmente concluímos que

$$- \int_{\Gamma} \int_C \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot (d\mathbf{r} \times d\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} = 4\pi(p - n) \quad (\text{Gauss}).$$

Este resultado pode ser interpretado como o número de voltas que  $\Gamma$  faz ao redor de  $C$ . Considerando  $\Gamma$  e  $C$  como linhas obtemos como uma condição necessária que  $\Gamma$  e  $C$  possam ser separadas, mas esta condição não é suficiente.

Existem outras interpretações físicas alternativas da fórmula acima. Recordamos que conforme a lei de Biot-Savart, o campo magnético induzido por uma corrente unitária  $I$  fluindo em  $C$  é dado por

$$H(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_C \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Segue-se que

$$\frac{1}{4\pi} c \int_{\Gamma} \mathbf{H}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{c}{4\pi} \int_{S(\Gamma)} (\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S(\Gamma)} \bar{\nu} \cdot d\mathbf{S},$$

sendo  $S(\Gamma)$  é uma superfície com borda  $\Gamma$ , e a contribuição ao fluxo é dado somente aos pontos onde  $C$  intersepta  $S(\Gamma)$ .

Nós, estruturas com elos e entrelaçamentos ocorrem em diversas áreas da ciência, tal como física de plasmas (contenção de plasmas), física de polímeros, biologia molecular e a teoria de cordas cósmicas e tem origem nos resultados originais de Kelvin sobre a invariança de nós de tubos de vórtices entrelaçados em fluxos de fluidos governados pelas equações de Euler.

Considere um campo magnético  $\mathbf{B}(x, t)$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , carregado por advecção de um fluido com velocidade  $\mathbf{v}$ ,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

e se

$$\begin{aligned}
\frac{d\gamma}{dt} &= \mathbf{v}(\gamma(x, t), t) \\
\gamma(x, 0) &= \mathbf{x}, \\
\mathbf{B}(\gamma(x, t), t) &= \Pi_0^t e^{u(\gamma(x, s), s)} \mathbf{B}_0(x), \quad (\text{Cauchy}) \\
u &= \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right).
\end{aligned}$$

Esta expressão para  $\mathbf{B}$  estabelece uma correspondência topológica entre  $\mathbf{B}_0(x)$  e  $\mathbf{B}(\gamma, t)$  preservando nós e entrelaçamentos na estrutura do campo magnético. Se  $\mathbf{A}$  é um vetor potencial para  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , então a helicidade  $H$  do campo  $\mathbf{B}$ ,  $H = \int \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{A} dx$ , é uma generalização de invariante de Hopf, chamado por Arnold o "invariante assintótica de Hopf".  $H \neq 0$  significa que há entrelaçamento em média das linhas de forças.

Novas invariantes foram introduzidas por H. K. Moffatt (The Energy spectrum of knots e links, Nature, 347, 1990, 367-369).

Em biopolímeros, é considerado que um anel fechado de DNA pode ser caracterizado por duas invariantes topológicas: o tipo de nó formado pela dupla hélice como um todo e o entrelaçamento de uma corda com outra.

Descrevemos um parâmetro de torsão  $T_w$  pelo número de voltas que uma corda faz em torno da outra. J. White demonstrou que

$$L_k = T_w + W_r,$$

onde  $L_k$  coincide com a integral de Gauss para as duas cordas e é uma invariante topológica e

$$W_r = \frac{1}{4\pi} \int_C \int_C \frac{(d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

Veja seção 42 de livro de A. Yu. Grosberg A. R. Khokhlov (Statistical Physics of Macromolecular, AIP, New York, 1994).

## 1.7 Definição intrínseca de operadores vetoriais

Os teoremas de divergência e de Stokes são úteis na medida que podemos dar definições invariantes de operadores como div, curl e  $\Delta$ . Heuristicamente, temos do enunciado do teorema de Stokes que

$$\int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \nabla \times \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} \sim |S|(\nabla \times \mathbf{u})(P_0), P_0 \in S,$$

se diâmetro de  $S$  é pequeno e  $\nabla \times \mathbf{u}$  é contínua em  $S$ . Similarmente,

$$\int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} \sim (\text{div } \mathbf{u})(P_0)|V|,$$

se diâmetro de  $V$  é pequeno. Isto sugere a definição de div e curl via

$$\text{curl } \mathbf{u} = \lim_{|S| \rightarrow 0} \frac{\int_S \nabla \times \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}}{|S|}$$

e

$$\text{div } \mathbf{u} = \lim_{|V| \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}}{|V|},$$

que são claramente independentes do sistema de coordenadas.

Considere o sistema de coordenadas curvilíneas definido via

$$x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad \mathbf{a} : D_1 \rightarrow D,$$

onde  $u$  é sobrejetora e injetora, com  $D_1$  e  $D$  regiões abertas de conteúdo de Jordan finito. Suponha que associado com  $\mathbf{x}$  há a primeira forma quadrática fundamental,

$$ds^2 = h_1^2 d\xi_1^2 + h_2^2 d\xi_2^2 + h_3^2 d\xi_3^2.$$

Isto é dizer que o sistema é ortogonal.

Evidentemente,

$$\nabla_\xi = \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \right).$$

Suponha que o paralelepípedo

$$T_1 = \begin{cases} u_1 \leq \xi_1 \leq u_2, \\ v_1 \leq \xi_2 \leq v_2, \\ w_1 \leq \xi_3 \leq w_2, \end{cases}$$

é mapeado na região  $T$  definida pelas superfícies

$$\begin{aligned} U_1 &= \{x_1 = u_1\} & V_1 &= \{x_2 = v_1\} & W_1 &= \{x_3 = w_1\} \\ U_2 &= \{x_1 = u_2\} & V_2 &= \{x_2 = v_2\} & W_2 &= \{x_3 = w_2\}. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \int \int_{\partial T} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} &= \int \int \int_T \operatorname{div} \mathbf{a} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int \int \int_{T_1} \operatorname{div} \mathbf{a} \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ &= \int \int \int_{T_1} \operatorname{div} \mathbf{a} h_1 h_2 h_3 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \end{aligned}$$

onde  $\partial T = U_1 \cup V_1 \cup W_1 \cup U_2 \cup V_2 \cup W_2$ .

Mas

$$\begin{aligned} \int \int_{\partial T} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} &\sim \int \int_{\partial T_1} (a_1 h_2 h_3 d\xi_2 d\xi_3 + a_2 h_1 h_3 d\xi_1 d\xi_3 + a_3 h_1 h_2 d\xi_1 d\xi_2) \\ &= \int \int \int_{T_1} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_1} (a_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (a_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (a_3 h_1 h_2) \right] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Divergência, continuidade e a arbitrariedade do paralelepípedo  $T_1$ ,

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial}{\partial \xi_1} (a_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (a_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (a_3 h_1 h_2) \right).$$

No caso que  $\mathbf{a} = \nabla \varphi$ , obtemos

$$\operatorname{div} \nabla \varphi = \Delta \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_3} \right) \right].$$

Podemos tratar similarmente com curl.

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{a} d\mathbf{S} &= \sum_{j=1}^3 \int_{S^{(j)}} \mathbf{a}^{(j)} \cdot d\mathbf{S}^{(j)} \\ &= \sum_{j=1}^3 \operatorname{curl} \mathbf{a}^j |S^j| \end{aligned}$$

O cálculo  $\operatorname{curl} \mathbf{a}$  pode ser efetuado na seguinte maneira: Considere

$$\lim_{|S^j| \rightarrow 0} \int_{C_j} \frac{\mathbf{a}^{(j)} \cdot d\mathbf{S}}{|S^j|}, \quad C_j = \partial S^j \quad \text{formado, por exemplo, por } (W_1, U_2, V_2, W_2).$$

Em particular considere a integral curvilínea do vetor  $(a_2 h_2, a_3 h_3)$  na borda de

$$S_1^j = \begin{cases} v_1 \leq \xi_2 \leq v_2 \\ w_1 \leq \xi_3 \leq w_2 \end{cases}$$

com  $|S_1^j| \sim h_2 h_3 \Delta v \Delta w$ . Segue-se que

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0, \Delta w \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial S^j} (a_2 h_2, a_3 h_3) \cdot (d\xi_2, d\xi_3)}{\Delta v \Delta w h_2 h_3} = \frac{\frac{\partial}{\partial \xi_2}(a_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial \xi_3}(a_2 h_2)}{h_2 h_3} = (\text{curl } \mathbf{a}^j)_1,$$

onde  $\Delta v = v_2 - v_1$  e  $\Delta w = w_2 - w_1$ . Os outros componentes podem ser calculados da mesma maneira. Vamos resumir alguns casos especiais importantes:

1. Coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ .

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2, \\ h_1 &= 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1, \\ \nabla \varphi &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \\ \nabla \mathbf{a} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r}(a_r r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(a_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(a_z r) \right), \\ \Delta \varphi &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right) \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \\ \nabla \times \mathbf{a} &= \left( \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} a_z - \frac{\partial}{\partial z} a_\theta r \right], \frac{\partial}{\partial z} a_r - \frac{\partial}{\partial r} a_z, \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} a_\theta r - \frac{\partial}{\partial \theta} a_r \right] \right). \end{aligned}$$

2. coordenadas esféricas.

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\psi^2, \\ h_1 &= 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \text{sen} \theta, \\ \nabla \varphi &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right), \\ \nabla \mathbf{a} &= \frac{1}{r^2 \text{sen} \theta} \left( \frac{\partial}{\partial r}(a_r r^2 \text{sen} \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(a_\theta r \text{sen} \theta) + \frac{\partial}{\partial \psi}(a_\psi r) \right), \\ \Delta \varphi &= \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \text{sen} \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{sen} \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{1}{\text{sen} \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right) \right), \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2}, \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{L_B \varphi}{r^2}, \end{aligned}$$

onde

$$L_B = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2}$$

é o operador de Laplace-Beltrami na esfera.

$$\nabla \times \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta}(a_\psi r \text{sen}^2 \theta) - \frac{\partial}{\partial \psi}(a_\theta r) \right) \\ \frac{1}{r \text{sen} \theta} \left( \frac{\partial a_r}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial r}(a_\psi \text{sen} \theta) \right) \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r}(a_\theta r) - \frac{\partial}{\partial \theta} a_r \right) \end{pmatrix}$$

## 1.8 Aplicações do Teorema de Divergência a teoria do potencial

### 1.8.1 As identidades de Green

Suponha que  $V$  satisfaz as condições do teorema de divergência e  $\varphi, \psi \in C^2(\bar{V})$ , então

$$\int_V \operatorname{div}(\varphi \nabla \psi) dx = \int_{\partial V} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS$$

Também,  $\operatorname{div}(\varphi \nabla \psi) = \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \Delta \psi$ , ou

$$\int_V \nabla \varphi \cdot \nabla \psi dx + \int_V \varphi \Delta \psi dx = \int_{\partial V} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS$$

(Primeira identidade de Green).

Trocando o papel de  $\varphi$  e  $\psi$ , obtemos:

$$\int_V \nabla \psi \cdot \nabla \varphi dx + \int_V \psi \Delta \varphi = \int_{\partial V} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \quad (1.15)$$

e subtraindo

$$\int_V \varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi dx = \int_{\partial V} \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)$$

(Segunda identidade de Green)

Suponha que  $P_0 \in V^0$  (interior de  $V$ ) e que  $r = |x - x_0|$ ,  $\mathbf{x}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ . Considere a esfera  $\sigma = B(\mathbf{x}_0, \epsilon)$ ,  $\epsilon < \operatorname{dist}(P_0, \partial V)$ , e a região exterior a bola  $\hat{V} = V \setminus \sigma$ . Claramente,

$$\Delta \left( \frac{1}{r} \right) = 0 \quad \text{em } \hat{V} \quad (\text{cálculo direto})$$

e podemos aplicar a segunda identidade de Green a  $(\frac{1}{r}, \varphi)$ , obtendo

$$-\int_V \frac{1}{r} \Delta \varphi dx = \int_{\partial V} \left( \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS + \int_{\partial \sigma} \left( \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS$$

Mas em  $\partial B$ ,  $r = \epsilon$ ,  $\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \Big|_{r=\epsilon} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \Big|_{r=\epsilon} = \frac{1}{r^2} \Big|_{r=\epsilon} = \frac{1}{\epsilon^2}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}$  (direção do vetor normal externo a  $\partial B$  está na direção  $-\hat{\mathbf{r}}$ ),  $dS = \epsilon^2 dw$ . Segue-se que

$$\int_{\partial B} \left( \frac{\varphi}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \epsilon^2 dw = \int_{\Omega} \left( \varphi + \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) dw \rightarrow 4\pi \varphi(P_0)$$

se  $\epsilon \rightarrow 0$ , utilizando a continuidade de  $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ .

Também

$$\int_{\hat{V}} \frac{1}{r} \Delta \varphi \rightarrow \int_V \frac{\Delta \varphi}{r}$$

(é aqui que precisamos de  $\varphi \in C^2(\bar{V})$  e não  $\varphi \in C^2(V) \cap C^1(\bar{V})$ ).

Consequentemente, obtemos

$$4\pi\varphi(P_0) = - \int_V \frac{\Delta\varphi}{r} dx + \int_{\partial V} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) dS, \quad P_0 \in V^0 \quad (1.16)$$

(Terceira Identidade de Green).

No caso que  $P_0 \in \overline{V}^C$ , a segunda identidade de Green pode ser aplicada diretamente a  $\left( \frac{1}{r}, \varphi \right)$  dando

$$0 = - \int_V \frac{\Delta\varphi}{r} dx + \int_{\partial V} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) dS.$$

Suponha que  $\delta = \text{dist}(0, \partial V) \rightarrow +\infty$  e

$$\limsup_{\delta \rightarrow \infty} \int_{\partial V} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) dS \rightarrow 0$$

então

$$4\pi\varphi(P_0) = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\Delta\varphi}{r} dx$$

dado que a última integral existe.

Suponha que  $\varphi$  é harmônica: ( $\Delta\varphi \equiv 0$  em  $V$ ). Colocando  $\varphi = \psi$  na primeira identidade de Green obtemos que

$$\int_V |\nabla\varphi|^2 dx = \int_{\partial V} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS$$

e se  $\varphi = 0$  em  $\partial V$  ou  $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$  em  $\partial V$  concluímos que  $\nabla\varphi = 0$  em  $V$  (via continuidade). No caso que  $V$  é simplesmente conexo, concluímos que  $\varphi = \text{constante}$  em  $V$  e se  $\varphi = 0$  em  $\partial V$ , então  $\varphi = 0$  em  $V$ .

Este resultado dá um resultado de unicidade para o problema de Dirichlet. De fato, supondo que  $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = 0$  em  $V$  e  $\varphi_1 = \varphi_2$  em  $\partial V$ . Colocando  $\tau = \varphi_1 - \varphi_2$ , então  $\Delta\tau = 0$  em  $V$  e  $\tau = 0$  em  $\partial V$  e assim  $\tau \equiv 0$  em  $V$ .

Se  $\varphi$  e  $\psi$  são harmônicas, da segunda identidade de Green:

$$\int_{\partial V} \left( \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) dS = 0$$

e pondo  $\psi = 1$ , obtemos que

$$- \int_{\partial V} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = 0.$$

Observamos também que da terceira identidade de Green,

$$\begin{aligned} 4\pi\varphi(P_0) &= \int_{\partial V} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) dS, \quad P_0 \in V^0 \\ 0 &= \int_{\partial V} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) dS, \quad P_0 \in \overline{V}^C \end{aligned}$$

(Teorema de representação de Poisson)

Considere a bola  $B(P_0, r)$ , segue-se que

$$4\pi\varphi(P_0) = \frac{1}{r} \int_{\partial B} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS + \frac{1}{r^2} \int_{\partial B} \varphi dS = \frac{1}{r^2} \int_{\partial B} \varphi dS \quad (\text{Teorema do valor médio}),$$

ou

$$\varphi(P_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B} \varphi dS,$$

utilizando que  $\int_{\partial B} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = 0$  para  $\varphi$  harmônica. (O teorema de Gauss)

Considerando a região  $V_2 \setminus V_1$  com fronteiras  $\partial V_2, \partial V_1$ , com vetores normais exteriores  $\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1$  e supondo  $\varphi$  harmônica em  $V_2 \setminus V_1$ , sendo válida as condições do teorema da divergência, segue-se que

$$0 = \int_V \operatorname{div} \nabla \varphi dx = - \int_{\partial V_1} \frac{\partial\varphi}{\partial n_1} dS + \int_{\partial V_2} \frac{\partial\varphi}{\partial n_2} dS$$

ou

$$\int_{\partial V_1} \frac{\partial\varphi}{\partial n_1} dS = \int_{\partial V_2} \frac{\partial\varphi}{\partial n_2} dS.$$

Do teorema da Representação, pondo  $\varphi \equiv 1$ ,

$$\int_{\partial V} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS = \begin{cases} -4\pi, & P_0 \in V^0 \\ 0, & P_0 \in \bar{V}^C \end{cases}$$

Considere a bola  $B(0, R)$ . Observe que  $\frac{1}{r}, r = |x - x_0|, x_0 \in B(0, R)$  e  $\frac{1}{|x|}$  são harmônicas em  $B(0, R)^C$ . Assim

$$\int_{\partial B} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{|x|} \right) - \frac{1}{|x|} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS = 0.$$

Segue-se que

$$-\frac{1}{R^3} \int_{\Omega} dw = \frac{1}{R} \int_{\partial B} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS = -\frac{4\pi}{R}$$

ou

$$\int_{\partial B} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS = -4\pi.$$

## 1.9 Estimativas a priori e princípio do máximo

**Teorema 4.** *Suponha que  $\varphi$  harmônica em  $V^0$  e  $\varphi \in C^0(\bar{V})$ , então o máximo e o mínimo de  $\varphi$  são assumidos em  $\partial V$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $\varphi$  assuma seu valor máximo em  $x_0 \in V^0$ , ou seja,  $\varphi(x) \leq \varphi(x_0), \forall x \in V$ .

Considere  $B(x_0, \rho) \subset V^0$ . Pelo teorema do valor médio para funções harmônicas, sabemos que

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{S(x_0, \rho)} \varphi(x) dS \leq \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{S(x_0, \rho)} \varphi(x_0) dS = \varphi(x_0).$$

Se pelo menos num ponto  $y \in S(x_0, \rho)$  valer  $\varphi(y) < \varphi(x_0)$ , pela continuidade de  $\varphi$  segue que  $\varphi(x_0) < \varphi(x_0)$ , que é uma contradição. Assim, em  $S(x_0, \rho), \varphi(y) \equiv \varphi(x_0)$ . Suponha que  $\bar{\rho} = \rho(x_0, \partial V)$ , então  $\varphi(x) = \varphi(y), x \in B(x_0, \rho)$  (rho)). Concluimos que: para  $y \in \partial V \cap S(x_0, \bar{\rho}) \neq \emptyset, \varphi(y) = \varphi(x_0)$ .

**Teorema 5.** *Suponha que  $\varphi$  é harmônica em  $V^0$  e  $\varphi \in C^0(\bar{V})$  e  $V$  é conexo. Se o máximo ou o mínimo de  $\varphi$  assumido em  $V^0$ , então  $\varphi$  é uma constante.*

*Demonstração.* Suponha que o máximo é assumido em um ponto  $x_0 \in V^0$ . Tome um ponto  $y \in V^0$  tal que  $y \neq x_0$ . Ligue  $x_0$  a  $y$  por um caminho poligonal  $L$  (Isso é possível, pois  $V$  é conexo). Coloque  $\bar{\rho}_0 = \text{dist}(x_0, \partial V)$  e suponha que  $x_1$  é a última intersecção de  $L$  com  $B(x_0, \bar{\rho}_0)$  na direção  $x_0$  a  $y$ . Como no teorema anterior,  $\varphi(x_1) = \varphi(x_0)$ . Coloque  $\bar{\rho}_1 = \text{dist}(x_1, \partial V)$  e  $x_2$  a última intersecção de  $L$  com  $B(x_1, \bar{\rho}_1)$ , novamente  $\varphi(x_2) = \varphi(x_0)$ . Segundo esta maneira, para  $m \leq \lceil |L|/\text{dist}(L, \partial V) \rceil + 1$ ,  $y \in B(x_m, \bar{\rho}_m)$ ,  $\bar{\rho}_m = \text{dist}(x_m, \partial V)$  e  $\varphi(y) = \varphi(x_0)$ . Segue-se que  $\varphi(x) \equiv \max_{y \in \partial V} \varphi(y)$ ,  $x \in V$ .

O valor deste resultado reside no seguinte:

**Teorema 6.** *Suponha que  $\varphi_1, \varphi_2$  são harmônicas em  $V^0$ ,  $\varphi_1 \leq \varphi_2$ ,  $x \in \partial V$ ,  $\varphi_1, \varphi_2 \in C^0(\bar{V})$  e  $V$  é conexa. Então  $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$  em  $V$ .*

*Demonstração.* Coloque  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ , então  $\varphi \leq 0$  em  $\partial V$  e  $\varphi$  é harmônica em  $V^0$ . Segue-se que

$$\varphi \leq \max_{x \in \partial V} \varphi \leq 0$$

e o resultado é demonstrado.

Similarmente se  $\varphi_1 \geq \varphi_2$  em  $\partial V$  concluímos  $\varphi_1 \geq \varphi_2$  em  $V$  (Considere  $-\varphi_1$  e  $-\varphi_2$ ).

Recordamos um número de identidades vetoriais de freqüente utilização:

1.  $\nabla \times \nabla \varphi = 0$ ;
2.  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{a} = 0$ ;
3.  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a}$ ;
4.  $\nabla(\lambda \mathbf{a}) = \nabla \lambda \mathbf{a} + \lambda \nabla \mathbf{a}$ ;
5.  $\nabla \cdot (\lambda \mathbf{a}) = \nabla \lambda \cdot \mathbf{a} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{a}$ ;
6.  $\nabla \times (\lambda \mathbf{a}) = \nabla \lambda \times \mathbf{a} + \lambda \nabla \times \mathbf{a}$ ;
7.  $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}$ ;
8.  $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} + \mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \nabla \cdot \mathbf{a}$ ;
9.  $\nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \nabla \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \nabla \times \mathbf{b}$ .

Estas identidades podem ser estabelecidas por cálculo direto e ficam como exercício.

## 1.10 Diversos Exemplos na Teoria Potencial

a) Temos  $\nabla r^2 = 2r \nabla r = 2\mathbf{r}$  ou  $\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ ,  $r \neq 0$  e  $\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \nabla r = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ ,  $r \neq 0$ . Segue-se que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right) &= \Delta \left( \frac{1}{r} \right) = -\text{div} \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \\ &= - \left( \frac{1}{r^3} \text{div} \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla \frac{1}{r^3} \right) \\ &= - \left[ \frac{3}{r^3} + \mathbf{r} \cdot \left( -\frac{3}{r^4} \hat{\mathbf{r}} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

b) A velocidade  $\mathbf{v}$  de qualquer ponto  $P(\mathbf{r})$  de um corpo rígido rodando com velocidade angular  $\omega$  em volta de um ponto  $O$  movimentando com velocidade  $v_0$  é dada por

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \omega \times \mathbf{r}.$$

Segue-se que

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\omega \times \mathbf{r}) = 2\omega.$$

c) Vamos colocar  $\varphi \equiv 1$  no teorema de representação de Poisson. Assim, concluímos que

$$\begin{aligned} 4\pi &= - \int_{\partial V} \mathbf{n} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \cdot d\mathbf{S} && \text{Integral de Gauss} \\ &= - \int_{\partial V} \frac{\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dS = - \int_{\partial V} \frac{dS \cos \theta}{r^2} && P_0 \in V^0. \end{aligned}$$

Mas  $\cos \theta dS$  é a área projetada no plano  $\perp \mathbf{r}$  e  $\frac{\cos \theta}{r^2}$  é a área interceptada na esfera unitária com centro  $P_0$  cone elementar com vértice em  $P_0$  e linhas geradoras passando na fronteira de  $dS$ . Isto é dizer o ângulo sólido gerado em  $P_0$  por  $dS$ .

d) Suponha que  $\mathbf{F} = \nabla \varphi$  e  $\Delta \varphi = -4\pi \rho$  em  $V$ . Aplicando o teorema da divergência temos que

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{F} dx = -4\pi \int_V \rho dx$$

Lembrando por exemplo na teoria de Gravitação de Newton a força  $\mathbf{F}$  exercida por uma partícula de massa  $m$  em  $\mathbf{O}$  e de massa unitária no ponto  $\mathbf{r}$  é

$$\mathbf{F} = -\frac{m\mathbf{r}}{r^2} = \nabla \left( \frac{m}{r} \right),$$

onde  $\frac{m}{r}$  é chamado o potencial em  $\mathbf{r}$  da partícula  $m$  em  $\mathbf{O}$ .

Tendo diversas partículas  $m_1, m_2, \dots, m_k$  em  $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2, \dots, \mathbf{O}_k$ , com distâncias  $r_1 = |\mathbf{r} - \mathbf{O}_1|$ , ...,  $r_k = |\mathbf{r} - \mathbf{O}_k|$ , o efeito é aditivo:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^k \nabla \left( \frac{m_i}{r_i} \right) = \nabla \left( \sum_{i=1}^k \frac{m_i}{r_i} \right)$$

Ponha

$$V = \sum_{i=1}^k \frac{m_i}{r_i}$$

e observe que

$$\begin{aligned} \Delta V &= \sum_{i=1}^k m_i \Delta \left( \frac{1}{r_i} \right), && r_i \neq 0, \quad i = 1, \dots, k \\ &= 0 \end{aligned}$$

Observe que o trabalho feito no campo de força movendo a partícula  $m$  do  $\infty$  a um ponto de referência  $P$  em um caminho  $C$

$$\int_{\infty}^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\infty}^P \nabla \left( \frac{m}{r} \right) \cdot d\mathbf{r} = \left[ \frac{m}{r} \right]_{\infty}^P = \frac{m}{r}$$

independe do caminho  $C$ . Um exemplo de força conservativa.

e) Suponha que temos uma distribuição de massa contínua em uma região com densidade  $\rho$ . Tratamos com uma aproximação a distribuição  $\rho_i \Delta_i$  em células com centro  $O_i$  e com potencial

$$\sum_i \frac{\rho_i \Delta_i}{|r - O_i|}.$$

Supondo que  $\rho$  é contínua em  $\tilde{V}$  e  $V$  tem conteúdo de Jordan Finito<sup>2</sup>, podemos formar a integral (generalizada) de Riemann:

$$I = \int_V \frac{\rho(y) dy}{|x - y|}.$$

Claramente, para  $\mathbf{F} = m \nabla \left( \frac{1}{r} \right)$ ,

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -m \int_{\partial V} \frac{\cos \theta dS}{r^2} = -4\pi m$$

e para  $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^k \nabla \left( \frac{m_i}{r_i} \right)$ ,

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi \sum_{i=1}^k m_i$$

e com  $m_i = \rho_i \Delta_i$ ,

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi \sum_{i=1}^k \rho_i \Delta_i.$$

No limite temos heurísticamente que

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi \int_V \rho dx,$$

e utilizando a equação  $\mathbf{F} = \nabla \varphi$  e o teorema da divergência

$$\int_V \Delta \varphi dx = -4\pi \int_V \rho dx.$$

Podemos supor o mesmo resultado para subregiões regulares  $U \subset V$  e utilizando continuidade de  $\Delta \varphi$  e  $\rho$

$$\Delta \varphi = -4\pi \rho \quad (\text{a equação de Poisson}).$$

---

<sup>2</sup>Coincide com Volume definido pela Integral de Riemann

f. Seja  $P_R$  um ponto de referência e considere dois caminhos  $C_1$  e  $C_2$  ligando  $P_R$  a  $P$  e tal que  $C_1 \cup (-C_2)$  formam a fronteira de uma superfície  $S$  regular. Então

$$\begin{aligned} \int_{C_1} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} - \int_{C_2} \nabla \left( \frac{m}{r} \right) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_S \nabla \times \nabla \left( \frac{m}{r} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0 \end{aligned}$$

Mais geralmente,

$$\begin{aligned} \int_{C_1} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} - \int_{C_2} \nabla \Phi \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_S \nabla \times \nabla \Phi dS = 0 \end{aligned}$$

g) Em dinâmica de fluidos, para fluxos irrotacionais é costumeiro introduzir o potencial  $\varphi$  de velocidade

$$\mathbf{u} = -\nabla \varphi$$

e similarmente em eletrodinâmica

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

em certas circunstâncias.

h) Em física clássica é considerado que pólos magnéticos isolados não acontecem, mas estão encontrados em pares  $m$  e  $-m$  separados por uma distância  $l$ ,  $ml$  é chamado o momento dipólo.

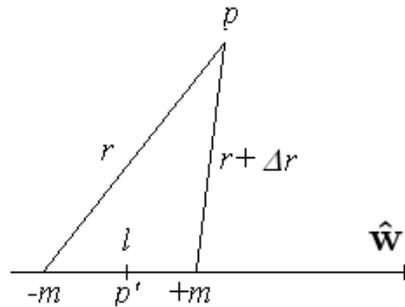


Figura 1.6: Aqui  $p' = (x', y', z')$  e  $p = (x, y, z)$

O potencial  $\varphi$  em  $P$  é dado por

$$\varphi = -\frac{m}{r} + \frac{m}{r + \Delta r} = ml \left( \frac{1}{r + \Delta r} - \frac{1}{r} \right) / l.$$

Segue que

$$\varphi \sim \hat{\mathbf{w}} \mu \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = \mu \hat{\mathbf{w}} \left[ \frac{\partial x'}{\partial l} \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial y'}{\partial l} \frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial z'}{\partial l} \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{1}{r} \right) \right],$$

onde  $\mu = ml$ . Mas

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial x'} ((x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2) \\ &= -\frac{2}{r^2} \frac{x' - x}{2r} = \frac{x - x'}{r^3}, \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

Também  $\hat{\mathbf{w}} = \left( \frac{\partial x'}{\partial l}, \frac{\partial y'}{\partial l}, \frac{\partial z'}{\partial l} \right)$  e  $\varphi = -\mu \frac{\hat{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$ , considerando  $\mathbf{r}$  na direção de  $P$  a  $P'$ , é o potencial em  $P$ .

Se existe uma densidade de dipolos magnéticos  $\mathbf{p}$ , o potencial  $\varphi$  em  $P$  é  $-\int_V \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dx$ . Observe que

$$\begin{aligned}\int_{\partial V} \frac{\mathbf{p} \cdot d\mathbf{S}}{r} &= \int_V \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{p}}{r} \right) dx \\ &= \int_V \frac{\nabla \cdot \mathbf{p} dx}{r} - \int_V \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dx\end{aligned}$$

Segue-se que

$$\varphi = -\int_V \frac{\text{div } \mathbf{p} dx}{r} + \int_{\partial V} \frac{\mathbf{p} \cdot d\mathbf{S}}{r}.$$

Uma distribuição superficial de dipolos cuja direção é sempre normal a superfície  $S$  é chamada uma casca (ou camada) magnética. Se  $\tau$  é a densidade de dipolos por unidade de área, o potencial associado ao dipolo  $\tau d\mathbf{S}$  é  $-\tau \frac{d\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$  e se  $d\mathbf{S} \cdot \mathbf{r} = dS r \cos \theta$ , então

$$\varphi = -\tau \frac{\cos \theta dS}{r^3} = -\tau \frac{r^3 d\omega}{r^3} = -\tau d\omega$$

com  $d\omega$  sendo o ângulo sólido subtendido em  $P$  por  $dS$ . O potencial da camada é assim ( $\tau$  uniforme)

$$-\int \tau d\omega = -\tau \Omega$$

com  $\Omega$  sendo o ângulo gerado pela camada em  $P$ . Observe que  $\varphi$  cresce de  $-2\pi\tau$  a  $+2\pi\tau$  passando do lado (poço) ao lado (fonte).

Do exemplo e) resolvemos:

$$\nabla \cdot b' = -4\pi t$$

com

$$b' = \nabla \left( \int \frac{tdx}{r} \right)$$

e segue-se que

$$\nabla \times b' = \nabla \times \nabla \left( \int \frac{tdx}{r} \right) = 0$$

j) Considere o problema de construir  $\mathbf{b}^0$  tal que

$$\nabla \times \mathbf{b}^0 = \mathbf{a}, \quad \text{div } \mathbf{a} = 0.$$

Suponha que  $\text{div } \mathbf{a} = 0$  em um paralelepípedo. Construa

$$\alpha = \left( \int_{z_0}^z a_2 dz - \vartheta(x, y) \right) \mathbf{i} + \left( - \int_{z_0}^z a_1 dz \right) \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}.$$

Então

$$(\nabla \times \alpha)_1 = a_1, \quad (\nabla \times \alpha)_2 = a_2$$

e

$$\begin{aligned} (\nabla \times \alpha)_3 &= - \int_{z_0}^z \left( \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} \right) dz + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \\ &= \int_{z_0}^z \frac{\partial a_3}{\partial z} dz + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \\ &= a_3(x, y, z) - a_3(x, y, z_0) + \frac{\partial \vartheta(x, y)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Se escolhermos

$$\vartheta(x, y) = \int_{y_0}^y a_3(x, y, z_0) dy$$

então,

$$(\nabla \times \alpha)_3 = a_3.$$

Assim,

$$\mathbf{b} = \left( \int_{z_0}^z a_2(x, y, z) dz - \int_{y_0}^y a_3(x, y, z_0) dy \right) \mathbf{i} - \int_{z_0}^z a_1(x, y, z) dz \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}$$

é uma solução de  $\nabla \times \mathbf{b} = \mathbf{a}$ .

Mas em geral  $\text{div } \mathbf{b} \neq 0$ . Coloque  $t = \frac{\text{div } \mathbf{b}}{4\pi}$ . Do exemplo i) construímos  $\mathbf{b}'$  satisfazendo

$$\nabla \times \mathbf{b}' = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \mathbf{b}' = -4\pi t$$

Coloque  $\mathbf{b}^0 = \mathbf{b} + \mathbf{b}'$ , então

$$\nabla \times \mathbf{b}^0 = \nabla \times \mathbf{b} + \nabla \times \mathbf{b}' = \mathbf{a}$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{b}^0 = \nabla \cdot \mathbf{b} + \nabla \cdot \mathbf{b}' = 0.$$

$\mathbf{b}^0$  é chamado o potencial vetorial de  $\mathbf{a}$ .

k) Da terceira identidade de Green e exemplo c)

$$\varphi(P_0) = \int_V \frac{\rho}{r} dx + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) dS, \quad P_0 \in V^0$$

Por outro lado,  $\frac{\varphi}{4\pi}$  pode ser interpretado como a distribuição superficial de uma camada dupla (ou dipolos) de densidade  $\varphi \underline{\Omega}$ . Também do exemplo e), o termo envolvendo  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n}$  pode ser interpretado como a distribuições superficiais de camada simples de densidade  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ . Segue-se que a terceira identidade de Green tem uma interpretação física bastante transparente e tal representação poderia ter sido postulada nesta base.

## 1.11 Linhas de Campo e Tubos de Força

Considere um campo vetorial  $\mathbf{a}(x)$  definido em uma região  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ . Uma linha de campo é uma curva  $\gamma$  tal que

$$\frac{d\gamma_1}{a_1} = \frac{d\gamma_2}{a_2} = \dots = \frac{d\gamma_n}{a_n}.$$

No caso que  $\mathbf{a}$  é um campo de velocidade, referimos a linhas de fluxo. Se  $\mathbf{a} : x \in V \mapsto \mathbb{R}^n$  é uma função, duas linhas de campo não podem ter intersecções sem coincidirem.

As linhas de campo juntas definem um tubo de campo (ou tubo de força).

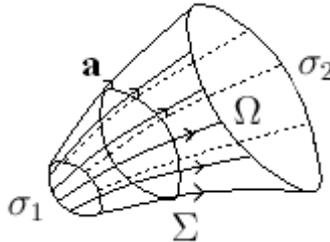


Figura 1.7: Volume  $\Omega$  definido pelo tubo de força e as seções  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ .

Considere o volume  $\Omega$  definido pelo tubo de força e as seções  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Se  $\text{div } \mathbf{a} = 0$  em  $\Omega$ , pelo teorema de Gauss,

$$\int_{\Sigma} \mathbf{a} \cdot d\Sigma = 0.$$

Nas paredes do tubo  $\mathbf{a} \cdot d\Sigma = 0$  e assim

$$\int_{\sigma_1} \mathbf{a} \cdot d\Sigma + \int_{\sigma_2} \mathbf{a} \cdot d\Sigma = 0$$

ou

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \mathbf{a} \cdot d\Sigma &= \text{constante em uma seção } \sigma \text{ de } \Sigma. \\ &= \text{a força do tubo (Conceito devido a Faraday)}. \end{aligned}$$

Um tubo unitário é um tubo de força unitária.

$\int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$  calculada sobre uma superfície fechada  $S$  define o excesso de força dos tubos de saída sobre aqueles de entrada. No caso que  $\text{div } \mathbf{a} = 0$  em  $S^0$ ,  $\int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = 0$ , o que implica a força de entrada é igual a força de saída. Em outros termos: tubos de força não podem originar nem terminar em uma região onde  $\text{div } \mathbf{a} = 0$ .

Um ponto onde tubos de força tem origem é chamado uma fonte e onde termina um sorvedouro. Uma fonte onde tubos de força total  $4\pi m$  originam é chamada uma fonte de força  $m$  e um sorvedouro onde tubos unitários de força total  $4\pi m$  terminam é chamado um sorvedouro de força  $m$ . Podemos encarar um sorvedouro de força  $m$  como sendo uma fonte de força  $-m$ .

Suponha que  $\text{div } \mathbf{a} = 0$  em  $S^0$  exceto em uma fonte  $P_0 \in S^0$  de força  $m$ , então  $\int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi m$  (medindo o excesso de força dos tubos de saída sobre os tubos de entrada).

Considere um campo de velocidade  $\mathbf{u}$  definido em uma região  $V$ ,  $\mathbf{u} \in C_B^1(V)$ . As linhas de fluxo são definidas por

$$\frac{dx_1}{u_1} = \frac{dx_2}{u_2} = \frac{dx_3}{u_3}$$

e as linhas de vorticidade por

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}} = \frac{dx_3}{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}}.$$

## 1.12 Cinemática dos Fluidos

Existem essencialmente duas descrições de cinemática de fluidos:

1. Aquela de Euler que especifica em cada ponto  $P = (x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3$  e tempo  $t$ , um campo de velocidades  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ ; a massa específica  $\rho(x, y, z, t)$ ; as forças resultantes  $\mathbf{f}(x, y, z, t)$  atuando no fluido e o tensor de tensões  $\tau_{ij}(u)$ .
2. Matematicamente a descrição de Lagrange consiste em observar o movimento de um elemento fixo de um fluido e seguir sua evolução: Isto é descrever a trajetória  $\gamma(t)$  de um elemento inicialmente localizado no ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  em  $t = 0$ , ou seja

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \mathbf{u}(\gamma, t) \\ x_i(0) &= x_{0i}, \quad x_{01} = x, \quad x_{02} = y, \quad x_{03} = z. \end{aligned}$$

Em geral, uma quantidade  $H$  descrevendo alguma propriedade do fluido pode ser descrita nas formulações Euleriana e Lagrangeana:

$$\begin{array}{ll} H_L(x, y, z, t) &= H_E(\gamma(x, y, z, t), t) \\ \text{(Lagrangeana)} &\quad \text{(Euleriana)} \end{array}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{dH_L(x, y, z, t)}{dt} &= \left( \frac{\partial H_L}{\partial x} \right)_\gamma \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \left( \frac{\partial H_L}{\partial y} \right)_\gamma \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} + \left( \frac{\partial H_L}{\partial z} \right)_\gamma \frac{\partial \gamma_3}{\partial t} + \left( \frac{\partial H_L}{\partial t} \right)_\gamma \\ &= \mathbf{u}(\gamma, t) \cdot \frac{\partial H_L}{\partial \mathbf{x}}(\gamma, t) + \frac{\partial H_L}{\partial t}, \end{aligned}$$

leva a relação

$$\frac{DH}{dt} = \left( \mathbf{u} \cdot \nabla H + \frac{\partial H}{\partial t} \right) (\gamma, t).$$

Observe que salvo que  $\mathbf{u}$  não depende explicitamente do tempo, as trajetórias do fluido definidas por

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= u_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3 \\ x_i(0) &= x_{i0} \end{aligned}$$

não coincidem necessariamente com as linhas do fluxo.

Para conveniência vamos escrever a solução das equações não-autônomas acima por  $\gamma_i(x_0, t)$ , assim

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_i}{dt} &= u_i(\gamma_i(x_0, t), t), \quad i = 1, 2, 3 \\ x_i(0) &= x_{i0}. \end{aligned}$$

Suponha que  $u_i$  é  $C^1$ , então

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j} \right) = \left( \frac{\partial u_i}{\partial \gamma_k} \right) \left( \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_j} \right)$$

$$\left( \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j} \right) (0) = \delta_{ij}$$

e vamos escrever a matriz Jacobiana  $J = \left[ \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j} \right]$ . Assim,

$$\frac{dJ}{dt} = \left[ \frac{\partial u_i}{\partial \gamma_k} \right] (\gamma_i(x_0, t), t) J$$

$$J(0) = [\delta_{ij}].$$

Um teorema bem conhecido de Liouville <sup>3</sup> afirma que

$$\frac{d(\det J)}{dt} = \text{traço} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial \gamma_k} \right] \det J$$

$$\det J(0) = 1,$$

e segue-se que

$$\det J = \exp \left( \text{traço} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial \gamma_k} \right] t \right)$$

$$= \exp(\text{div } u) t.$$

Por exemplo, a aceleração  $\mathbf{a}$  de um fluido é dada por

$$\mathbf{a}(x, y, z, t) = \frac{D\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t),$$

onde  $\frac{D\mathbf{u}}{dt}$  é chamada derivada material por razões evidentes.

Da identidade (9) da seção (1.9)

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\nabla(\mathbf{u}^2) - 2\mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{u}}{2} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$$

e introduzindo a vorticidade  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\nabla(\mathbf{u}^2)}{2} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}.$$

## 1.13 Leis de conservação de um fluido

Considere o volume  $V_0$ . A massa do fluido neste volume é  $\int \int \int_{V_0} \rho dx$  e a massa do fluido que atravessa um elemento de área de superfície por unidade de tempo é  $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$ . Segue-se por conservação de massa que:

$$\int \int_{\partial V_0} \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_{V_0} \rho dx = - \int \int \int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx.$$

<sup>3</sup>Hale, Jack K.. Ordinary differential equations. 2 and. New York: Robert E. Krieger, 1980. xvi, 361 p. : il.

Pelo teorema da divergência,

$$\int \int_{\partial V_0} \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \int \int \int_{V_0} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) dx = - \int \int \int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx.$$

Sob adequadas condições de continuidade concluímos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{D\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

No caso que há uma fonte no interior de  $V_0$ , temos que

$$\frac{D\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 4\pi\tau.$$

O fluido é chamado incompressível se  $\frac{D\rho}{dt} = 0$ .

Considere um elemento do fluido contido no volume  $V$  com superfície  $\partial V$ , sujeito a forças de volume  $\mathbf{F}$  por unidade de massa, que movimenta com o fluido. A massa do elemento é constante e igual a  $\int_V \rho dx$  e a taxa de aumento de momento é  $\int_V \frac{d\mathbf{u}}{dt} \rho dx$ . No caso de fluidos clássicos e não viscosos, o fluido exerce uma força  $-\int_{\partial V} p \mathbf{n} dS$ , com  $p$  a pressão e  $\mathbf{n}$  o vetor normal a  $\partial V$ . Utilizando mecânica newtoniana, segue-se que

$$\begin{aligned} \int_V \frac{d\mathbf{u}}{dt} \rho dx &= \int_V \mathbf{F} \rho dx - \int_{\partial V} p \mathbf{n} dS \\ &= \int_V (\rho \mathbf{F} - \nabla p) dx. \end{aligned}$$

Sob adequadas condições de regularidade segue-se que

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \quad (\text{equação de Euler}).$$

No caso barotrópico com  $p = p(\rho)$ ,

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla(P) \quad , \quad P(p) = \int^p \frac{dp}{\rho}.$$

Suponha que  $\mathbf{F}$  é conservativa, ou seja

$$\mathbf{F} = -\nabla V.$$

Segue-se que

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla(V + P).$$

## 1.14 Teorema de Transporte de Reynolds

Seja  $D$  uma região simplesmente conexa que contém uma região  $V$  com força de volume  $\mathbf{F}$  por unidade de massa. A força total agindo sobre partículas movimentando em  $V$  é

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) &= \int \int \int_{V(t)} F(y, t) dy, \quad V(t) = \gamma(V) \\ &= \int \int \int_V F(\gamma(x, t), t) \cdot J dx, \end{aligned}$$

onde  $J$  é o determinante Jacobiano. Segue-se que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{F}(t) &= \frac{d}{dt} \int \int \int_V \mathbf{F}(x, t) J dx \\ &= \int \int \int_V \left( \frac{d\mathbf{F}(x, t)}{dt} J + \mathbf{F}(x, t) \frac{dJ}{dt} \right) dx.\end{aligned}$$

Se lembrarmos o resultado da seção (1.11),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{F}(t) &= \int \int \int_V \left( \frac{d\mathbf{F}}{dt}(x, t) J + \mathbf{F} \operatorname{div} \mathbf{u} J \right) dx \\ &= \int \int \int_{V(t)} \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{F} + \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{F} \right) dx \\ &= \int \int \int_{V(t)} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} dx + \int \int \int_{\partial V(t)} \mathbf{F} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS.\end{aligned}$$

## 1.15 Circulação e Teorema de Kelvin

Considere um contorno fechado  $C$  descrito por  $s = s(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ ,  $s(0) = s(1)$ ,  $s(\tau)$  retificável e sua imagem  $C(t) = \gamma(s(t), t)$ . Definimos a circulação

$$\Gamma(t) = \int_{C(t)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{u}(\gamma(\mathbf{s}(t)), t) d\gamma(\mathbf{s}(t), t).$$

Segue-se que

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = \int_C \frac{d\mathbf{u}(\gamma, t)}{dt} \cdot d\gamma + \mathbf{u}(\gamma, t) d \left( \frac{d\gamma(s(t), t)}{dt} \right).$$

Mas por definição,

$$\frac{d\gamma}{dt} = \mathbf{u}(\gamma_0, t)$$

e segue-se que

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma(t)}{dt} &= \int_C \frac{d\mathbf{u}(\gamma, t)}{dt} \cdot d\gamma + \mathbf{u}(\gamma, t) d(\mathbf{u}(\gamma(t), t)) \\ &= \int_C \left( \frac{d\mathbf{u}(x, t)}{dt} \cdot d\gamma + \frac{1}{2} d(\mathbf{u}^2(\gamma)) \right) \\ &= \int_C \frac{d\mathbf{u}(\gamma, t)}{dt} \cdot \gamma(s(t), t).\end{aligned}$$

Suponha que o fluido é clássico, não viscoso, barotrópico ( $p = p(\rho)$ ) e com forças externas conservativas. Da seção (1.13), segue-se que

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = \int_C -\nabla(V + P) \cdot d\gamma(s(t), t) = 0.$$

Sob as condições enumeradas acima é válido o teorema de Kelvin:

**Teorema 7.** *A circulação de uma curva fechada retificável movimentando com o fluido é constante.*

Como corolários deste resultado podemos afirmar que

**Corolário 1.** *Se o movimento é inicialmente irrotacional, então a circulação é zero para cada circuito fechado, continuando ser zero sobre circuitos movimentando com o fluido e assim o fluxo continua sendo irrotacional.*

**Corolário 2.**  *Tubos de vorticidade e linhas de vorticidade movimentam-se com o fluido.*

## 1.16 Dinâmica de Vórtices

Observamos que em duas dimensões a condição  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  e equivalente a condição  $\mathbf{v} = -\nabla\varphi$  (em regiões simplesmente conexa) e as condições equivalente de corrente  $\mathbf{v} = (\partial_y\psi, -\partial_x\psi)$ . Neste caso a vorticidade  $\omega = \partial_x v - \partial_y u = -\Delta\psi$ .

A equação de vorticidade tem a forma

$$\begin{aligned}\frac{D\omega}{dt} &= \partial_t\omega + \mathbf{v} \cdot \nabla\omega = 0 \quad \text{em } D \\ \Delta\psi &= -\omega \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \quad \text{em } \partial D \\ \mathbf{v} &= (\partial_y\psi, -\partial_x\psi).\end{aligned}$$

Considere o potencial  $\varphi = -\frac{k\theta}{2\pi} = -\frac{k}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ , uma função multivalente que não é definida em  $r = 0$ . As linhas de corrente são círculos concentricos devido ao fato que  $-\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0$  e a velocidade do fluido em qualquer ponto ( $r \neq 0$ ) é  $-\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$  ou  $\frac{k}{2\pi r}$ . A circulação  $\int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}$  sobre um círculo com centro na origem é  $\int_0^{2\pi} \frac{k}{2\pi} d\theta = k$ . A função de corrente é dada por  $\Delta\psi = -k$  e conseqüentemente por

$$\psi = -\frac{k}{2\pi} \log(\mathbf{r}).$$

Em geral,  $N$  vórtices centrados nos pontos  $\mathbf{r}_j$  com circulação  $k_j$  tem funções corrente  $-\frac{k_j}{2\pi} \log|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| = \psi_j$ . O campo de velocidades induzido pelo  $j$ -ésimo vórtice (ignorando a interação com os outros vórtices) é

$$\mathbf{v}_j = (\partial_y\psi_j - \partial_x\psi_j) = \frac{k_j}{2\pi} \left( -\frac{y - y_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2}, \frac{x - x_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2} \right)$$

Supondo que os vórtices se movimentam, produzindo um campo de velocidades

$$\mathbf{v}(x, t) = \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_j(x, t),$$

com  $\mathbf{v}_j$  dado como acima, permitindo os centros dos vórtices movimentar. É plausível que cada vórtice deveria movimentar via a interação com o campo de velocidade agregado dos centros dos vórtices, isto é

$$\begin{aligned}\frac{dx_j(t)}{dt} &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq j}^N k_j \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^2}, \\ \frac{dy_j(t)}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq j}^N k_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^2}, \quad r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|.\end{aligned}$$

A dinâmica portanto é obtida escolhendo os valores da circulação  $k_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  e os pontos iniciais dos centros dos vórtices  $\mathbf{r}_i^0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  e resolvendo as equações acima. A circulação total  $k$  é conservada e  $k = \sum k_j$ .

O fato que é importante é que estas equações formam um sistema hamiltoniano: Defina

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i \neq j} k_i k_j \log |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y_j} &= k_j \frac{dx_j}{dt}, \\ -\frac{\partial H}{\partial x_j} &= k_j \frac{dy_j}{dt}, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

introduza  $x'_i = \sqrt{|k_j|} x_i$  e  $y'_i = \sqrt{|k_j|} \operatorname{sgn} k_i y_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Então

$$\begin{aligned} \frac{dx'_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y'_i}, \\ \frac{dy'_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x'_i} \end{aligned}$$

e

$$\frac{dH}{dt} = \sum \frac{\partial H}{\partial x'_i} \frac{dx'_i}{dt} + \sum \frac{\partial H}{\partial y'_i} \frac{dy'_i}{dt} = 0.$$

Consequentemente,  $H$  é uma constante do movimento. Segue-se que se os  $k_j$ 's,  $j = 1, \dots, N$  têm o mesmo sinal, não podem haver colisões, isto é, se  $|x_i - x_j| \neq 0$ ,  $i \neq j$  em  $t = 0$ , esta situação é preservado, porque caso contrário  $H \rightarrow \infty$ .

Esta situação pode ser generalizada ao caso de  $N$  vórtice em uma região  $D$  com fronteira  $\partial D$ , com a nova condição que o fluxo  $v_j$  do  $j$ -ésimo vórtice devesse satisfazer  $\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{n} = 0$  em  $\partial D$ . Isto é equivalente a escolher a função de corrente  $\psi_j$ , para o  $j$ -ésimo vórtice satisfazendo

$$\begin{aligned} \Delta \psi_j &= -\omega_j = -k_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \\ \frac{\partial \psi_j}{\partial n} &= 0 \quad \text{em} \quad \partial D, \end{aligned}$$

ou escolhendo  $\psi_j$  a ser  $-k_j G(r - r_j)$  com  $G$  a função de Green para o problema de Neumann e resolvendo

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= -\frac{k_j}{2\pi} \sum_{i \neq j} \partial_{y_j} G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \\ \frac{dy_j}{dt} &= \frac{k_j}{2\pi} \sum_{i \neq j} \partial_{x_j} G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \end{aligned}$$

$$(x_j(0), y_j(0)) = (x_0, y_0) \quad \text{em} \quad t = 0.$$

Para maiores informações referimos ao livro por A. J. Chorin, J. E. Marsden. A mathematical Introduction to Fluid Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, 1979 (p. 87-89).

## 1.17 Eletromagnetismo

Faremos algumas observações sobre as equações de eletromagnetismo supondo que o leitor tem previo contato com o assunto através de disciplinas elementares de física.

Em meios materiais acontece o fenômeno de polarização do meio e a necessidade de introdução do deslocamento elétrico  $\mathbf{D}$  que é expresso em termos de campo elétrico  $\mathbf{E}$  do meio e o vetor de polarização via a relação

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}.$$

O termo elementar eletrostático dos meios macroscópicos dielétricos nos leva a Lei de Coulomb envolvendo a densidade de carga  $\rho$

$$\nabla\mathbf{D} = 4\pi\rho.$$

Na interface  $S$  dos meios materiais com campos  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{D}_1)$ ,  $(\mathbf{E}_2, \mathbf{D}_2)$  e carga superficial de densidade  $\sigma$  distribuída em  $S$ , as relações de fronteira

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_{21} = 4\pi\sigma$$

e

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n}_{21} = 0$$

são satisfeitas, onde  $\mathbf{n}_{21}$  é o vetor unitário normal à interface orientado da região 1 para a região 2.

Com respeito a magnetostática, é geralmente suposto que não existem cargas magnéticas livres e a entidade básica é o dipolo magnético. O torque mecânico  $\mathbf{N}$  exercido pelo campo magnético  $\mathbf{B}$  sobre o dipolo magnético com momento magnético  $\mu$  satisfaz  $\mathbf{N} = \mu \times \mathbf{B}$ . Conservação de carga exige que seja satisfeita a equação da continuidade

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0.$$

No caso de fenômenos magnéticos estacionários

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

e

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}.$$

Aplicando o teorema de Stokes a superfície  $S$  bordada pela curva  $C$ ,

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}.$$

Uma vez que a integral de superfície de densidade de corrente é a corrente total  $I$  que passa pela curva fechada  $C$ , a lei de Ampère pode ser escrita na forma

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c}I.$$

As leis básicas de magnetostática, na forma diferencial são

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}$$

Observe que se  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  é satisfeito em todos os pontos de uma região simplesmente conexa com fronteira regular podemos introduzir o potencial vetorial  $\mathbf{A}$  via

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}).$$

De fato em geral

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{J(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \nabla \Phi(\mathbf{x}).$$

Para uma dada indução magnética, o potencial vetorial pode ser transformado via  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \Phi$ , uma transformação de calibre (Gauge transformation) entre a carga  $\rho$  e a densidade de corrente  $\mathbf{J}$ .

Biot e Savart (em 1820) estabeleceram as leis básicas experimentais relacionadas a indução magnética  $\mathbf{B}$  às correntes. Supondo que  $d\mathbf{s}$  seja um elemento de comprimento na direção de fluxo de corrente de um fio fino carregando uma corrente  $I$  e  $\mathbf{r}$  o vetor dirigido do elemento ao ponto de observação  $P$ , então

$$d\mathbf{B} = kI \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Esta lei pode ser escrita na forma integral,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}' \\ &= \frac{1}{c} \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \end{aligned}$$

e imediatamente  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ .

Também,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \nabla \times \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'.$$

Utilizando a identidade  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$ ,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \nabla \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{r}' - \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \Delta \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{r}'.$$

Utilizando as identidades

$$\nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)$$

junto com

$$\Delta \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

obtemos que

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'.$$

A equação básica agora toma a forma

$$\nabla \times \nabla \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

ou

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}.$$

Utilizando a escolha  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  (Calibre de Coulomb),

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}.$$

Faraday (1831) estabeleceu a relação entre o fluxo magnético através de um circuito  $C$  bordando uma superfície  $S$ ,  $F = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  e a força eletromotriz em torno do circuito  $\epsilon = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ . É mostrado que a lei de Faraday assume a seguinte forma

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

ou o teorema de Stokes na forma diferencial

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}.$$

Segue-se neste desenvolvimento que as leis básicas de eletricidade e magnetismo, em forma macroscópica e em unidades gaussianas, derivadas de observações em estado permanentes, exceto a Lei de Faraday, são as seguintes:

1. Lei de Coulomb,  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$ ;
2. Lei de Ampère,  $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$ ;
3. Lei de Faraday,  $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ ;
4. Ausência de pólos magnéticos livres,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ;
5. Lei da Conservação,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ .

Certamente (3) e (5) não podem ser sacrificados. Observe da Lei de Ampère

$$\frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0,$$

mas isso é incompatível com (5) se  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ . Por outro lado observe que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \left( \mathbf{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0.$$

A partir desta observação, Maxwell modificou o conjunto das equações. Sugeriu a redução ao caso de correntes estacionárias, substituindo

$$\mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

e modificou a Lei de Ampère na forma:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Com esta modificação as equações assumem a forma

### 1.17.1 As equações de Maxwell

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0.\end{aligned}$$

com as condições de fronteira apropriadas<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} &= 4\pi\sigma, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 &= 0, \\ (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{k},\end{aligned}$$

$\mathbf{k}$  sendo a corrente superficial.

Consideremos as equações de Maxwell no espaço  $\mathbb{R}$  e com  $\mathbf{D} = 0$ . De  $\nabla \mathbf{B} = 0$ , introduzimos o vetor potencial  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

e a lei de Faraday é

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

o que implica a existência de um potencial escalar  $\varphi$  tal que

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi$$

ou

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Obtemos assim

$$\begin{aligned}\Delta\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) &= -4\pi\rho \\ \Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}.\end{aligned}$$

$\mathbf{B}$  é invariante sob a transformação

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} + \nabla\Lambda$$

e nesta circunstância o campo elétrico também é invariante se

$$\varphi \longrightarrow \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

---

<sup>4</sup>Determinadas integrando as equações de Maxwell

de tal modo que se escolhemos

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0 \quad (\text{a condição de Lorentz}) \\ \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -4\pi \rho \\ \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}.\end{aligned}$$

Agora é possível satisfazer esta condição dado que existe uma função de calibre  $\Lambda$  resolvendo

$$\Delta \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = -\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right).$$

Observe que

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda \\ \varphi &\longrightarrow \varphi' = \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\end{aligned}$$

satisfaz a condição de Lorentz se  $(A, \varphi)$  satisfaz

$$\Delta \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0.$$

Noutro lado, utilizando o calibre de Coulomb  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ,

$$\begin{aligned}\Delta \varphi &= -4\pi \rho, \\ \varphi &= \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'\end{aligned}$$

e

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right).$$

As equações para  $\varphi$  e  $\mathbf{A}$  tem essencialmente a mesma estrutura da equação com onda com fonte  $\sigma$  conhecida,

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \sigma(\mathbf{x}, t),$$

onde  $c$  é a velocidade de propagação.

## 1.18 \*Potenciais de Retardamento

A fórmula de Kirchhoff: Considere

$$\square u + \sigma(x, y, z, t) = 0 \quad \text{em } V.$$

Seja  $\mathbf{Q}$  o ponto  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ ,  $\mathbf{x} \in V$ . Introduza

$$v(x, y, z, t) = u\left(x, y, z, t - \frac{r}{c}\right).$$

É fácil verificar que se  $R = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $P = (x, y, z)$ ,  $r = |P - Q|$ ,

$$\Delta v + \frac{2r}{c} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x - x_0}{r^2} \frac{\partial v}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y - y_0}{r^2} \frac{\partial v}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z - z_0}{r^2} \frac{\partial v}{\partial t}\right) + [\sigma] = 0$$

onde  $[\sigma] = \sigma\left(x, y, z, t - \frac{r}{c}\right)$ . Multiplique por  $\frac{1}{r}$  e integre em um volume  $W$  contido em  $V$ . No caso que  $\mathbf{Q} \notin W$ ,  $\mathbf{Q}$  no interior de  $S_2$ ,  $\partial W = \partial(S_1 \cup S_2)$ ,  $S_1$  sendo a superfície externa. Deixando o diâmetro de  $S_2$  tender a zero, o valor da integral sobre  $S_2$  é

$$v_Q \int_{S_2} \int \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS = 4\pi v_Q.$$

Neste caso temos que

$$4\pi u_Q = \int \frac{[\sigma]}{r} dx - \int_{S_1} \int v \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{2}{c_r} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial n} dS,$$

com

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] - \frac{\partial r}{\partial n} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right],$$

obtendo finalmente

$$4\pi u_Q = \int \frac{[\sigma]}{r} dx - \int \int [u] \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] - \frac{1}{c_1} \frac{\partial r}{\partial n} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right] dS \quad (\text{Kirchhoff}).$$

Quando  $u$  e  $\sigma$  são independentes de  $t$ , obtemos que

$$4\pi u_Q = \int \frac{\sigma}{r} dx - \int_{S_1} \int u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad (\text{Kirchhoff}).$$

Supondo que  $S_1$  expande ao infinito (se possível), simplificações são possíveis. Suponha, por exemplo, que para  $|\mathbf{x}|$  grande,  $u(x, y, z, t) = 0$  para  $t < t_0$ . Evidentemente  $t - \frac{1}{c}$  sempre cai abaixo do valor de  $t_0$  quando  $r$  é suficientemente grande e assim todas as quantidades  $[\ ] = 0$ . Também,  $\int_{S_1} \rightarrow 0$  no caso que  $u, \frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$  tal que  $u = O\left(\frac{1}{r}\right), \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial r} = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ . Nestes casos,

$$4\pi u_Q = \int_{[\sigma] \neq 0} \frac{[\sigma]}{r} dx$$

(Esta fórmula foi dada por G. Kirchhoff, Berlin Sitzungsber S., 641, 1882 Wied Ann Bd XVIII 1983, Ges. Abh. Bd II 523)

## 1.19 Energia do campo eletromagnético

O trabalho  $W_i$  feito para trazer uma carga pontual  $a_i$  do infinito ao ponto  $x_i$  em um campo elétrico descrito pelo potencial  $\varphi$  é dado por  $W_i = a_i \varphi(x_i)$ . Se o potencial corresponde a uma seqüência de  $n - 1$  cargas  $q_i, i = 1, \dots, n - 1$ ,

$$\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}$$

e a energia potencial total

$$W = \sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}$$

e a energia de distribuição de carga continua

$$W = \frac{1}{2} \int \int \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dx dx' = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) dx$$

Utilizando a equação de Poisson

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho,$$

então

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{8\pi} \int \varphi \Delta\varphi dx \\ &= \frac{1}{8\pi} \int |\nabla\varphi|^2 dx \\ &= \frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{E}|^2 dx, \end{aligned}$$

um resultado descrevendo a energia no vácuo.

Em geral

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \delta\rho(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) dx$$

e de

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \delta\rho = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot (\delta\mathbf{D})$$

e

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} dx.$$

Agora, imaginem  $\mathbf{D}$  variando de seu valor inicial  $O$  a valor final  $D$ , então

$$W = \frac{1}{4\pi} \int dx \int_0^D \mathbf{E} \cdot \delta D$$

e com relação linear entre  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$

$$\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} = \frac{1}{2} \delta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$$

e

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dx.$$

Considere um tubo de corrente elementar, de área de seção reta  $\Delta\sigma$  seguindo uma curva fechada  $C$  bordando a superfície  $S$ . O aumento do trabalho efetuado contra a força eletromotriz é

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{\mathbf{J}\Delta\sigma}{c} \int_S \mathbf{n} \delta\mathbf{B} dS \\ &= \frac{\mathbf{J}\Delta\sigma}{c} \int_S \nabla \times \delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \frac{\mathbf{J}\Delta\sigma}{c} \int_C \delta\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned}$$

Mas

$$\mathbf{J}\Delta\sigma d\mathbf{S} = \mathbf{J} dx$$

e somando sobre todos subcircuitos elementares obtemos que

$$\delta W = \frac{1}{c} \int_C \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dx$$

Utilizando a lei de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \delta \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H} dx$$

e

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{H} \cdot \nabla \times \delta \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{H} \times \delta \mathbf{A}) dx.$$

Supondo a distribuição de campos é localizada

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{H} \cdot \nabla \times \delta \mathbf{A}$$

e no caso que há uma relação linear entre  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$ ,

$$\mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} = \frac{1}{2} \delta(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$$

e variando  $\mathbf{H}$  de 0 a  $\mathbf{H}$ ,

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dx.$$

Vamos agora considerar a situação geral através das equações de Maxwell. Vamos postular que a densidade de energia  $u$  campo eletromagnético é dadp por

$$u = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

e mostrando que isto admite uma interpretação consistente.

Para uma carga única  $q$ , a taxa de realização do trabalho pelos campos eletromagnéticos externos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  é  $q\mathbf{v}\mathbf{E}$  com  $\mathbf{v}$  a velocidade da carga. Quando existe uma distribuição continua de carga e corrente a taxa total de realização de trabalho em um volume finito  $V$  é  $\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dx$ .

Utilizando a Lei de Ampère-Maxwell

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dx = \frac{1}{4\pi} \int_V \left( c\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x} \right) dx.$$

Utilizando

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$$

e a lei de Faraday

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dx = -\frac{1}{4\pi} \int_V \left( c \cdot \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dx$$

ou

$$-\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dx = \int_V \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H} \right) dx$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{Poynting})$$

com  $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ .

$\mathbf{S}$  representa um fluxo de energia e é denominado o vetor de Poynting (1884). O resultado dado acima pode ser colocado em palavras na forma:

*Taxa temporal de variação de energia eletromagnética em um determinado volume mais a energia que flui através das superfícies do volume por unidade de tempo é igual ao negativo trabalho total realizado pelos campos sobre fontes dentro do volume.*

## 1.20 \*Reflexão e Refração de ondas eletromagnéticas em uma interface plana de dielétricos

Consideramos dois meios separados pela superfície interfacial  $z = 0$ , com permeabilidades e constantes dielétricas  $\mu$  e  $\epsilon$  abaixo da superfície e  $\mu'$  e  $\epsilon'$  acima. Consideramos uma onda plana de vetor  $k$  e frequência  $\omega$  incidente à interface a partir do meio  $\mu$  e  $\epsilon$  dando origem as ondas refratadas e refletindo com vetores  $k$  e  $k'$ . Aqui  $\mathbf{n}$  é o vetor normal unitário na direção do eixo  $OZ$ .

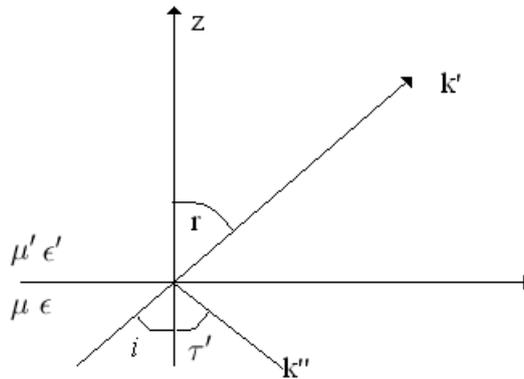


Figura 1.8: Meios separados pela superfície  $z = 0$

Tentamos uma solução das equações de Maxwell em cada meio

$$\square \mathbf{E} = 0, \quad \square \mathbf{B} = 0.$$

$$\left(\text{ou } \mathbf{E} = \Xi e^{ik\tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \quad \mathbf{B} = \Upsilon e^{ik\tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \quad k^2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} = \frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2}, \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}\right).$$

Na forma:

Onda Incidente:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t} \\ \mathbf{B} &= \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{|\mathbf{k}|} \end{aligned}$$

Onda Refratada:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E}'_0 e^{ik'\mathbf{x} - i\omega t} \\ \mathbf{B}' &= \sqrt{\mu'\epsilon'} \frac{\mathbf{k}' \times \mathbf{E}'}{|\mathbf{k}'|} \end{aligned}$$

Onda Refletida:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'' &= \mathbf{E}''_0 e^{i\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x} - i\omega t} \\ \mathbf{B}'' &= \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}''}{|\mathbf{k}''|}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k &= |k| = |k''| = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\epsilon} \\ k' &= |k'| = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu'\epsilon'}\end{aligned}$$

Coloque  $n = \sqrt{\mu\epsilon}$  e  $n' = \sqrt{\mu'\epsilon'}$ . A variação espacial e temporal de todos os campos deve ser a mesma em  $z = 0$ , o que implica que

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})_{z=0} = (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x})_{z=0} = (\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x})_{z=0}$$

e que todos os três vetores de onda estão contidos no mesmo plano e

$$k \sin r = k' \sin r = k'' \sin r.$$

Dado que  $k'' = k$ ,  $i' = r'$  e  $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{k'}{k} = \sqrt{\frac{\mu'\epsilon'}{\mu\epsilon}} = \frac{n'}{n}$  (a lei de Snell).

Também, as componentes normais de  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$  e tangenciais de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  são contínuas, o que significa que,

$$\begin{aligned}(\epsilon \mathbf{E} + \mathbf{E}''_0 - \epsilon' \mathbf{E}'_0) \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ (k \times \mathbf{E}_0 + k'' \mathbf{E}''_0 - k' \times \mathbf{E}'_0) \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}''_0 - \mathbf{E}'_0) \times \mathbf{n} &= 0 \\ \left( \frac{1}{\mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}''_0 - \frac{1}{\mu'} \mathbf{k}' \times \mathbf{E}'_0 \right) \times \mathbf{n} &= 0.\end{aligned}$$

No caso  $\mathbf{E}$  perpendicular ao plano de incidência, obtemos o seguinte

$$\begin{aligned}E_0 + E''_0 - E'_0 &= 0 \\ \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}(E_0 - E''_0) \cos i' - \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} E'_0 \cos r &= 0\end{aligned}$$

e

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{2n \cos i}{n \cos i + \frac{\mu}{\mu'} \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 i}}$$

e

$$\frac{E''_0}{E_0} = \frac{n \cos i - \frac{\mu}{\mu'} \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 i}}{n \cos i + \frac{\mu}{\mu'} \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 i}}.$$

No caso  $\mathbf{E}$  paralelo ao plano de incidência,

$$\begin{aligned}\cos i (E_0 - E''_0) - \cos r E'_0 &= 0 \\ \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}(E_0 + E'_0) - \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} E'_0 &= 0\end{aligned}$$

e

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{2nn' \cos i}{\frac{\mu}{\mu'} n^2 \cos i + n\sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 i}}$$

e

$$\frac{E''_0}{E_0} = \frac{\frac{\mu}{\mu'} n'^2 \cos i - n\sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 i}}{\frac{\mu}{\mu'} n^2 \cos i + n\sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 i}}$$

## 1.21 \*Dipolo Elétrico Oscilante

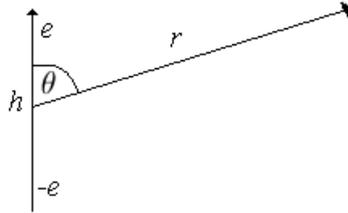


Figura 1.9: No caso estático,  $\varphi = \frac{\mu \cos \theta}{r^2}$ ,  $\mu = eh$

Suponha que  $\varphi$  é uma função de  $t$ . Precisamos supor que uma corrente flui de  $-e$  a  $e$  para manter a conservação de carga, a corrente  $I = \dot{\varphi} = \frac{\dot{f}}{h}$ .

A solução de Kirchoff é dada por

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{i}(z - \frac{\tau}{c}) dx}{r}$$

Consideramos, heurísticamente que temos  $I = iS$ ,  $S$  uma seção,  $\tau = \frac{I}{S} \mathbf{k}$  e  $i = \frac{\dot{f}}{Sh} \mathbf{k}$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{c} \frac{\tau(z - \frac{\tau}{c})}{r} Sh \\ &= \frac{\dot{f}(z - \frac{\tau}{c})}{cr} \mathbf{k} \end{aligned}$$

e

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\dot{f}}{cr} \right)$$

Lembramos que

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

e

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\dot{f}}{cr} \right)$$

e

$$\varphi = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{f}{r} \right) + \psi(z),$$

$\psi(z)$  refere a uma situação eletrostática e ignoramos.

$$\varphi = \frac{z}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{f}{r} \right) = \frac{z}{r} \left( \frac{\dot{f}}{cr} + \frac{f}{r^2} \right).$$

Em coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 \cos \theta \\ A_\theta &= -A_2 \text{sen } \theta \\ A_\varphi &= 0, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \left( \frac{\dot{f} \cos \theta}{cr}, -\frac{\dot{f} \text{sen } \theta}{cr}, 0 \right) \\ \varphi &= \cos \theta \left( \frac{\dot{f}}{cr} + \frac{f}{r^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2 \text{sen } \theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\theta} & r\text{sen } \hat{\theta} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\dot{f} \cos \theta}{cr} & -\frac{\dot{f} \text{sen } \theta}{c} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left( 0, 0, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{-\dot{f}}{c} \right) \text{sen } \theta + \frac{\dot{f}}{cr} \text{sen } \theta \right) \\ &= \frac{\text{sen } \theta}{r} \left( 0, 0, \frac{\dot{f}}{c^2 cr} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \\ E_r &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \cos \theta \left( \frac{\dot{f}}{cr} + \frac{f}{r^2} \right) \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{f}}{cr} \cos \theta \right) \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \cos \theta \left( \frac{\dot{f}}{cr} + \frac{f}{r^2} \right) \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{f}}{cr} \text{sen } \theta \right) \\ E_\varphi &= -\frac{1}{r \text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \cos \theta \left( \frac{\dot{f}}{cr} + \frac{f}{r^2} \right) \right) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} E_r &= -\cos \theta \left( \frac{\ddot{f}}{c^2 r} + \frac{2\dot{f}}{cr^2} + \frac{2f}{r^3} - \frac{\dot{f}}{c^2 r} \right) \\ E_\theta &= \text{sen } \theta \left( \frac{\dot{f}}{cr^2} + \frac{f}{r^3} + \frac{\ddot{f}}{c^2 r} \right) \\ E_\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Em uma distância grande de oscilador

$$H \sim \left(0, 0, \frac{t'' \text{sen } \theta}{c^2 r}\right)$$

$$E \sim \left(0, \frac{E'' \text{sen } \theta}{c^2 r}, 0\right).$$

O vetor de Poynting

$$\mathbf{P} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

$$= \frac{c}{4\pi} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ E_r & E_\theta & 0 \\ 0 & 0 & H_\phi \end{vmatrix}$$

$$= \frac{c}{4\pi} (E_\theta H_\phi, -E_r H_\phi, 0)$$

$$P_r = \frac{c}{4\pi} \frac{\text{sen}^2 \theta}{r} \left( \frac{\ddot{f}}{c^2} + \frac{\dot{f}}{cr} \right) \left( \frac{\ddot{f}}{c^2 r} + \frac{\dot{f}}{cr^2} + \frac{f}{r^3} \right)$$

$$P_\theta = \frac{c}{4\pi} \frac{2 \text{sen } \theta \cos \theta}{r} \left( \frac{\ddot{f}}{c^2} + \frac{\dot{f}}{cr} \right) \left( \frac{\dot{f}}{cr^2} + \frac{f}{r^3} \right)$$

a média por unidade de tempo e  $r$  grande é

$$\bar{P}_r \sim \frac{1}{4\pi} \frac{\text{sen}^2 \theta}{c^3 r^2}$$

$$\bar{P}_\theta \sim 0.$$

e no caso de um dipolo,  $\mu = f_0 \text{sen } \omega t$ ,

$$\bar{P}_r \sim \frac{1}{4\pi} \frac{\text{sen}^2 \theta}{c^2 r^2} f_0^2 \omega^4 \overline{\text{sen}^2 \omega t^2}$$

$$= \frac{1}{8\pi} \frac{f_0^2 \omega^4 \text{sen } \theta}{c^3 r^2}$$

Isto significa que não há radiação na direção do oscilador. Maior radiação acontece perpendicular ao dipolo,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . A radiação total em média

$$\int \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \frac{f_0^2 \omega^4}{8\pi c^3} \int_0^\pi \frac{\text{sen } \theta}{r^2} 2\pi r^2 \text{sen } \theta d\theta$$

$$= \frac{f_0^2 \omega^4}{4c^3} \frac{4}{3} = \frac{f_0^2 \omega^4}{3c^3}.$$

Frequência de oscilação  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  e potência de transmissão depende sobre a quarta potência de frequência.

## 1.22 \*Relações entre Mecânica clássica e Mecânica Quântica

O caminho dos raios de luz são trajetórias ortogonais às superfícies de onda. Desprezando o fenômeno de difração, podemos calcular o caminho dos raios em função do princípio de Fermat:

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} n ds = \delta \int_{P_0}^{P_1} \frac{1}{u} ds = 0 \quad (1.17)$$

onde  $u$  é a velocidade de fase (fazendo o índice de refração como uma função de posição). Entretanto, se o objeto em análise for da ordem de magnitude de uma onda de luz, o uso de ótica geométrica simples é inadequada e o fenômeno relacionado com difração não poderá mais ser descrito em termos de raios de luz.

Um princípio extremal similar (Hamilton) é aplicado para os caminhos de partículas que obedecem à Mecânica Clássica. A analogia com a ótica torna-se particularmente evidente se restringimos as órbitas de comparação àquelas com a mesma energia total. Isso é equivalente a passar do Princípio de Hamilton para o de Maupertuis. Do Princípio de Hamilton para uma partícula, temos

$$0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} (2T - E) dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} 2T = \delta \int_{t_0}^{t_1} mv^2 dt \quad (1.18)$$

Introduzindo o caminho da partícula como uma variável de integração no lugar do tempo, obtemos

$$0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} mv \frac{ds}{dt} dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} mv ds = \delta \int_{t_0}^{t_1} v ds \quad (1.19)$$

pois  $m = \text{constante}$

Comparando (1) e (2), percebemos que se quisermos associar ondas com partículas movendo-se com as leis da Mecânica do mesmo modo que as ondas de luz estão associadas com os raios de luz, precisamos fazer  $u \propto \frac{1}{v}$  de modo que o Princípio de Fermat seja válido para as ondas de matéria. No que segue, continua-se a discussão feita em Joos [7] (pag. 693-696).

Seja  $U$  a energia potencial,  $T$  a energia cinética e  $E$  a energia total, então a relação

$$E - U = T = \frac{1}{2}mv^2 \quad v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U)} \quad (1.20)$$

Além disso,

$$u = \frac{1}{v} = \frac{\sqrt{\frac{m}{2}}}{\sqrt{E - U}} = \frac{C}{\sqrt{E - U}} \Rightarrow u = \frac{C}{\sqrt{E - U}} \quad (1.21)$$

onde  $C = \sqrt{\frac{m}{2}}$ .

Em 1924, de Broglie sugeriu que a distribuição de partículas como os elétrons deveriam ser calculados por uma teoria ondulatória. A energia de um fóton é igual a  $\hbar\nu$  e a massa  $m$  é dada por  $\hbar\nu = mc^2$ , onde  $c$  é a velocidade da luz. A velocidade de um fóton é igual a  $c$  e seu momento é  $mc = \lambda\nu/c$ . O comprimento de onda  $\lambda$  das ondas associadas com o fóton é igual a  $c/\nu$ . A proposta de de Broglie é que relações semelhantes são válidas para elétrons e ondas associadas. Desta forma, procuramos introduzir uma frequência  $E = \hbar\omega$  onde  $\hbar = 1,05459 \cdot 10^{-27}$  é a constante de Planck e  $\omega$  é a frequência de onda. Dessa forma,

$$u = \frac{C}{\sqrt{\hbar\omega - U}} \quad (1.22)$$

Isso significa que a velocidade de fase  $u$  depende de  $\omega$ , logo, existe dispersão quando ondas são introduzidas. Num meio de dispersão é necessário distinguir entre a velocidade de fase  $u$  e a

velocidade de grupo  $u_g = v$ . Portanto, recordamos a noção de velocidade de grupo. Considere a onda dada por  $\psi = \text{sen} \frac{2\pi}{\lambda}(x - ut)$ ,  $\lambda$  sendo o comprimento da onda e  $u$  a velocidade da onda. Coloque  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\omega = \frac{2\pi u}{\lambda} = 2\pi\nu$ . Suponha que examinamos a interferência de  $\psi$  com  $\psi'$ , correspondendo a  $k'$ ,  $\omega'$ :

$$\psi + \psi' = \text{sen} \left( \frac{k + k'}{2}x - \frac{\omega + \omega'}{2}t \right) \cos \left( \frac{k - k'}{2}x - \frac{\omega - \omega'}{2}t \right)$$

e pondo  $\delta k = k - k'$ ,  $\delta\omega = \omega - \omega'$

$$\psi + \psi' = \cos \left( \frac{\delta k}{2}x - \frac{\delta\omega}{2}t \right) \text{sen} (kx - \omega t), \quad \delta k, \delta\omega \ll 1.$$

Definimos a velocidade de grupo  $u_g = \frac{\delta\omega}{\delta k}$  ou

$$\begin{aligned} u_g &\sim \frac{d\left(\frac{u}{\lambda}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{\frac{du}{d\lambda}}{\lambda d\frac{1}{\lambda}} + u = -\lambda \frac{du}{d\lambda} + u \\ &= \frac{dv}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{dh\nu}{d\left(\frac{h}{\lambda}\right)}. \end{aligned}$$

Assim temos,

$$\frac{1}{u_g} = \frac{d\left(\frac{u}{\lambda}\right)}{d\omega} = \frac{1}{v} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}} \Rightarrow \frac{\omega}{u} = \int \frac{d\omega}{\sqrt{\frac{2}{m}(\hbar\omega - U)}} \quad (1.23)$$

Resolvendo a integral, obtemos

$$\frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(\hbar\omega - U)} \Rightarrow u = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2m(\hbar\omega - U)}} \quad (1.24)$$

O comprimento de onda da matéria é dada por

$$\lambda = \frac{u}{\omega} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(\hbar\omega - U)}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E - U)}} \quad (1.25)$$

e numa região livre de forças (gravitacionais), temos

$$\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}} = \frac{\hbar}{mv} \quad (1.26)$$

pois

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v^2 = \frac{2E}{m} \Rightarrow 2mE = (mv)^2 \Rightarrow \sqrt{2mE} = mv \quad (1.27)$$

Passando de uma região onde  $U = 0$  para uma onde o potencial  $U$  existe, corresponde a entrar na região cujo índice de refração é

$$n = \sqrt{\frac{E - U}{E}} \quad (1.28)$$

Se  $u$  é uma função de posição, temos um meio com índice de refração variável na qual as trajetórias ortogonais das superfícies de onda são curvas.

Se o comprimento de onda de Broglie de um elétron que é atravessado por uma diferença de potencial  $V$  é calculado por (1.26), obtemos com Wilson [14] (pag. 96) ou 5.12.1

$$Ve = m_0c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right\} \quad (1.29)$$

onde  $m$  é dada por  $m = m_0 + \frac{Ve}{c^2}$ ,  $m_0$  é a massa de um elétron em repouso e  $v$  é a velocidade do elétron. Substituindo (1.26) em (1.29) e fazendo algumas simplificações, obtemos

$$\lambda = \frac{\hbar c}{\sqrt{Ve(2m_0c^2 + Ve)}} \quad (1.30)$$

Notar que quando  $\frac{Ve}{2m_0c^2}$  é pequeno, teremos

$$\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2Vem_0}} \simeq 10^{-8} \sqrt{\frac{150}{V}} \quad (1.31)$$

Isso mostra que os elétrons cuja velocidade é de centenas de volts ou milhares de volts estão associados com os comprimentos de ondas dos raios-x.

Se quisermos modelar o fenômeno de difração em ótica, devemos usar a equação diferencial de onda

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = u^2 \Delta \Psi \quad (1.32)$$

onde

$$u = \frac{\hbar \omega}{\sqrt{2m(\hbar \omega - U)}} = \frac{E}{\sqrt{2m(E - U)}} \quad (1.33)$$

Resolvendo (1.32), temos

$$\Psi = \psi e^{2\pi i \left(\frac{E}{\hbar}\right)t} \quad (1.34)$$

Substituindo (1.34) em (1.32), obtemos a famosa equação de Schrödinger

$$\Delta \psi + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0 \quad (1.35)$$

Essa equação tem o mesmo significado em mecânica atômica que tem a equação de Hamilton-Jacobi

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_k}, q_k\right) = E \quad (1.36)$$

em mecânica celeste.

Deveria ser enfatizado que o princípio de correspondência evidente aqui tem que ser aplicado com cuidado. De fato, problemas podem ser encontradas com os operadores introduzidos (veja, por exemplo, o livro de Abraham & Marsden [1], seção 5.4 onde onde é encontrado uma discussão do artigo de Van Hove, Sur certaines representations unitaires de un groupe infini de transformations, Mem de l'Acad, Roy de Belgique) (Classe des Sci) t. XXVI 61-102.

## 1.23 \*Comutadores e Simetria para Certos Operadores de Schrödinger

O princípio de correspondência associa com o momento clássico  $\mathbf{P}$  o operador  $\frac{1}{i}\hbar\nabla_{\mathbf{q}}$ . Introduzindo o comutador de operadores  $[A, B] = AB - BA$ , observamos que

$$\begin{aligned} [q_i, p_j] &= i\hbar\delta_{ij} \\ [q_i, q_j] &= 0 \\ [p_i, p_j] &= 0 \end{aligned} \quad (1.37)$$

com esta interpretação.

O momento angular  $\mathbf{L}$  de uma partícula localizada em  $\mathbf{q}$  em volta de 0 é dada por

$$\mathbf{L} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}. \quad (1.38)$$

Calculando os comutadores dos operadores  $L_i$

$$\begin{aligned} [L_1, L_2] &= (q_2 p_3 - q_3 p_2)(q_3 p_1 - q_1 p_3) - (q_3 p_1 - q_1 p_3)(q_2 p_3 - q_3 p_2) \\ &= q_2 p_1 (p_3 q_3 - q_3 p_3) + q_1 p_2 (q_3 p_3 - p_3 q_3) \\ &= i\hbar(q_1 p_2 - q_2 p_1) = i\hbar L_3, \end{aligned}$$

com cálculos similares para  $[L_2, L_3]$  e  $[L_3, L_1]$ , obtendo

$$\begin{aligned} [L_1, L_2] &= i\hbar L_3, \\ [L_2, L_3] &= i\hbar L_1, \\ [L_3, L_1] &= i\hbar L_2. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Em coordenadas cartesianas

$$L_2 - L_3 = i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad \text{etc}, \quad (1.40)$$

enquanto em coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} L_1 &= i\hbar \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ L_2 &= i\hbar \left( -\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ L_3 &= i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Se definimos  $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ , calculamos

$$\begin{aligned} [L_3, L^2] &= L_3 L_1^2 - L_1^2 L_3 + L_3 L_2^2 - L_2^2 L_3 \\ &= i\hbar(L_1 L_2 + L_2 L_1) - i\hbar(L_2 L_1 + L_1 L_2) = 0. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Durante esta discussão temos sido propositalmente vago sobre o domínio e ação dos operadores envolvidos. Evidentemente, quando utilizamos o princípio de correspondência  $\mathbf{q} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}$ , implicitamente supomos que a ação dos operadores é sobre algum espaço de funções envolvendo  $\mathbf{q}$ . Mas é importante observar que as relações de comutação (1.39) e (1.42) poderiam ser postuladas independentemente desta representação, permitindo novas representações e noções, inclusive "spin",

$$\begin{aligned} [M_1, M_2] &= i\hbar M_3, & [M_2, M_3] &= i\hbar M_1, \\ [M_3, M_1] &= i\hbar M_2, & [M^2, M_i] &= 0. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Observe que na representação de Schrödinger,

$$\begin{aligned} L^2 &= -\hbar^2 \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \\ &= -\hbar^2 \Delta_B, \end{aligned} \quad (1.44)$$

onde  $\Delta_B$  é o operador de Laplace-Beltrami definido sobre funções na esfera.

Considere duas partículas com coordenadas  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  e massas  $m_1, m_2$ . O hamiltoniano  $H$  tem a forma

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|), \quad (1.45)$$

no caso que o potencial depende somente da distância entre as partículas.

Na representação de Schrödinger isto leva a equação de Schrödinger:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta_2 + V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \right) \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E^* \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (1.46)$$

introduz as variáveis  $M = m_1 + m_2$ ,  $M\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  de tal modo que  $\mathbf{R}$  são as coordenadas do centro de massa e  $\mathbf{r}$  as coordenadas relativas. Então,

$$\nabla_1 = \nabla_{\mathbf{r}} + \frac{m_1}{M}\nabla_{\mathbf{R}} \quad \text{e} \quad \nabla_2 = \nabla_{\mathbf{r}} + \frac{m_2}{M}\nabla_{\mathbf{R}}.$$

Segue-se que

$$\frac{1}{m_1}\Delta_1 + \frac{1}{m_2}\Delta_2 = \frac{1}{\mu}\Delta_{\mathbf{r}} + \frac{1}{M}\Delta_{\mathbf{R}},$$

com  $\mu$  a massa reduzida,  $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ . A equação de Schrödinger agora assume a forma

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_{\mathbf{R}} - \frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_{\mathbf{r}} \right) \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = E^* \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{R}). \quad (1.47)$$

Buscando soluções de (1.47) na forma  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \phi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{R})$ , reduzimos o problema a resolução dos problemas

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_{\mathbf{R}}\psi(\mathbf{R}) = E'\psi(\mathbf{R}) \quad (1.48)$$

e

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) = E\phi(\mathbf{r}), \quad (1.49)$$

onde  $E + E' = E^*$ . Claramente (1.48) corresponde ao movimento de uma partícula livre de massa  $M$  e (1.49) ao movimento relativo.

Na forma de (1.49), vamos examinar dois hamiltonianos: o oscilador harmônico isotrópico em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \leq 3$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}r^2, \quad r^2 = \sum x^2 \quad (1.50)$$

e o átomo de hidrogênio

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.51)$$

Considere o oscilador em uma dimensão e introduza as variáveis  $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ . Defina

$$a = \sqrt{\left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)} \left( y + \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (\text{operador de aniquilação})$$

e

$$a^t = \sqrt{\left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)} \left( y - \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (\text{operador de criação}).$$

Observe que  $[a, a^t] = \hbar\omega$  e

$$\begin{aligned} aa^t &= H + \frac{\hbar\omega}{2}\omega, \\ a^t a &= H - \frac{\hbar\omega}{2}\omega. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Suponha que  $H$  tem uma autofunção  $u_n$  com autovalor  $E_n$ ,

$$Hu_n = E_n u_n,$$

então, de (1.52),

$$a(a^t u_n) - \frac{\hbar\omega}{2}u_n = E_n u_n$$

ou

$$a^t a(a^t u_n) = \left(E_n + \frac{\hbar\omega}{2}\right) (a^t u_n).$$

Assim,

$$H(a^t u_n) = \left(E_n + \frac{\hbar\omega}{2}\right) (a^t u_n)$$

e

$$Hu_{n+1} = E_{n+1} u_{n+1}$$

com

$$u_{n+1} = a^t u_n \quad \text{e} \quad E_{n+1} = E_n + \hbar\omega.$$

Segue-se que

$$u_n = (a^t)^n u_0 \quad \text{e} \quad E_n = E_0 + n\hbar\omega.$$

Finalmente, obtemos que

$$a^t a u_0 = \left(E_0 - \frac{\hbar\omega}{2}\right) u_0 = 0$$

se

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \quad \text{e} \quad a u_0 = 0$$

ou se

$$u_0 = e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Analisando (1.49), observamos que

$$[H, L^2] = 0, \quad [H, L_3] = 0, \quad [L^2, L_3] = 0.$$

Interpretamos estas relações de comutação como significando que autofunções comuns existem para os operadores. Isto sugere que inicialmente estudamos o problema mais geral dado em (1.39) e a relação  $[M^2, M_3] = 0$ . De novo introduzimos operadores auxiliares

$$\begin{aligned} M_+ &= M_1 + iM_2 \\ M_- &= M_1 - iM_2. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Observamos que

$$[M_3, M_+] = \hbar M_+, \quad (1.54)$$

$$[M_3, M_-] = -\hbar M_-,$$

$$[M_+, M_-] = 2\hbar M_3.$$

$$(1.55)$$

Dado que  $[M^2, M_3] = 0$ , introduzimos autofunções  $u_{\beta, m}$  tal que

$$M^2 u_{\beta, m} = \hbar \beta u_{\beta, m} \quad (1.56)$$

e

$$M_3 u_{\beta, m} = \hbar m u_{\beta, m}, \quad u_{\beta, m} \neq 0. \quad (1.57)$$

De (1.57),

$$M_+ M_3 u_{\beta, m} = \hbar m M_+ u_{\beta, m} \quad (1.58)$$

e pelas relações (1.39)

$$\begin{aligned} M_+ M_3 &= M_3 M_+ - [M_3, M_+] \\ &= M_3 M_+ - \hbar M_+ \end{aligned}$$

e utilizando (1.58)

$$M_3(M_+ u_{\beta, m}) = \hbar(m+1)(M_+ u_{\beta, m}), \quad (1.59)$$

onde  $u_{\beta, m+1} = M_+ u_{\beta, m} \neq 0$  é a nova autofunção com autovalor  $m+1$ . Assim, geramos novas autofunções e autovalores até  $m = m_{\max}$ , e neste caso  $u_{\beta, m_{\max}} = 0$ . Argumentando em uma maneira similar com  $M_- M_3$ , observamos que

$$M_3(M_- u_{\beta, m}) = \hbar(m-1)M_3 u_{\beta, m} = \hbar(m-1)u_{\beta, m-1}$$

e geramos novas autofunções com autovalores  $m'$  até um mínimo  $m = m_{\min}$ ,  $u_{\beta, m_{\min}} = 0$ .

Observe que

$$\begin{aligned} M_- M_+ &= M_1^2 + M_2^2 + i[M_1, M_2] \\ &= M^2 - M_3^2 - \hbar M_3. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Segue-se que

$$(M^2 - M_3^2 - \hbar M_3)u_{\beta, m_{\max}} = M_- M_+ u_{\beta, m} = 0 \quad (1.61)$$

e de (1.56) e (1.57)

$$(\beta - m_{\max}^2 - m_{\max})u_{\beta, m_{\max}} = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = m_{\max}(m_{\max} + 1). \quad (1.62)$$

Similarmente,

$$M_+ M_- = M^2 - M_3 + \hbar M_3$$

e

$$(\beta - m_{\min}^2 + m_{\min})u_{\beta, m_{\min}} = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = m_{\min}(m_{\min} - 1). \quad (1.63)$$

De (1.62) e (1.63)

$$(m_{\min} + m_{\max})(m_{\min} - m_{\max} + 1) = 0 \quad (1.64)$$

e  $m_{\min} = -m_{\max}$ .

Mas  $m_{\min}$  e  $m_{\max}$  diferem por um inteiro,

$$m_{\max} - m_{\min} = 2j, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (1.65)$$

Combinando (1.65) com (1.64), segue-se que

$$-j \leq m \leq j, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad \text{e} \quad \beta = j(j+1) \quad (1.66)$$

de (1.62). Noutro lado  $L$  é associado com (1.37) e (1.38) e somente os valores inteiros de  $j$ .

Na representação de Schrödinger,

$$L_3 u = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \lambda u \quad (1.67)$$

tem solução

$$\lambda_m = m\hbar, \quad u_m = e^{im\varphi} \quad (1.68)$$

e buscando soluções de

$$\Delta_B Y = \beta Y$$

na forma

$$Y = \Theta e^{im\varphi},$$

obtemos

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2 \Theta}{\sin^2 \theta} + \beta \Theta = 0 \quad (1.69)$$

e sabemos que  $\beta = \hbar l(l+1)$ ,  $l$  inteiro positivo. Evidentemente nada disso acontece por acaso. De fato  $L_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  são geradores do grupo de rotações e a invariância dos operadores sob rotações é refletida na separação de variáveis.

Soluções de (1.49) são buscadas na forma  $R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r) \right) R_{nl}(r) = E_n R_{nl}(r) \quad (1.70)$$

e colocando  $R_{nl}(r) = \frac{X_{nl}(r)}{r}$ , obtemos

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r) \right) X_{nl}(r) = E_n X_{nl}(r). \quad (1.71)$$

Utilizando o potencial de Coulomb,  $V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$ ,

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} - \frac{Ze^2}{r} \right) X_{nl}(r) = E_n X_{nl}(r). \quad (1.72)$$

Voltando a (1.43) é possível verificar que podemos ter representações matriciais, por exemplo, nos casos

- $j = \frac{1}{2}$ ,

$$M_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \frac{\hbar}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{as matrizes de 'spin' de Pauli}).$$

•  $j = \frac{3}{2}$

$$M_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3}i & 0 & 0 \\ \sqrt{3}i & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -\sqrt{3}i \\ 0 & 0 & \sqrt{3}i & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \frac{15}{4}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 1.24 A equação de Calor e Invariança de Grupo

Consideramos o processo da condução de calor em espaço descrito pela temperatura  $T(x, y, z, t)$ . Se  $dS$  é um elemento de superfície localizado no ponto  $(\xi, \eta, \zeta)$  com normal  $\mathbf{n}$ , a quantidade de calor  $dW$  que passa  $d\sigma$  por unidade de temperatura é dada pela lei de Fourier

$$dW = W_n dS = \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} dS = -k \frac{\partial T}{\partial n} dS,$$

onde  $k$  é o coeficiente de condutividade térmica,  $\mathbf{W}$  é a densidade de fluxo térmico. Segue-se que  $\mathbf{W} = -k\nabla T$ . Considere uma região  $V$  com fronteira  $\partial V = S$  e que  $c$  seja o coeficiente de calor específico,  $\rho$  a massa específica e  $\mathbf{F}$  a injeção de calor por unidade de volume. Segue-se que a taxa de mudança da quantidade  $Q$  de calor na região  $V$ ,  $\frac{dQ}{dt}$ , satisfaz

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dx = - \int_S \mathbf{W} \cdot d\mathbf{S} + \int_V F dx.$$

Utilizando o teorema de divergência e a lei de Fourier

$$\int_V c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dx = - \int_S \text{div } \mathbf{W} dx + \int_V F dx$$

e dado que  $V$  é arbitrário (e com algumas condições de continuidade))

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} (K\nabla T) + F(x, t).$$

No caso que a região é homogênea ( $c, \rho, k$  constantes),

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\Delta T + \frac{F(x, t)}{c\rho},$$

sendo  $K = \frac{k}{c\rho}$  o coeficiente de condutividade de temperatura.

Suponha que a região  $V$  está imersa em um meio de tal modo que a temperatura externa a superfície  $S$  é mantida em  $T_S$ . A lei de Esfriamento de Newton afirma que

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -h(T - T_S), \quad \text{a condição de fronteira.}$$

Além disso, suponha que no tempo inicial  $t = 0$ ,

$$T(x, 0) = T_0(x) \quad \text{condição inicial.}$$

As três equações constituem um problema evolutivo. No caso de um problema estacionário (independente de  $t$ ) as equações reduzem à forma

$$\begin{aligned} a^2 \Delta T + \frac{F(x)}{c\rho} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= -h(T - T_s) \end{aligned}$$

(Uma equação de Poisson com condição de fronteira mista não-homogênea).

### 1.24.1 O método de Similitude e a equação de calor

Considere a equação de calor em  $\mathbb{R}^n$ . Evidentemente existe neste problema simetria esférica (a simetria geométrica), o que sugere que busquemos uma solução dependendo de  $r$ ,  $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ . Mas além disso existe simetria física no sentido que a equação

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \Delta T$$

é invariante sob transformações  $r \rightarrow r' = \alpha r$ ,  $t \rightarrow t' = \alpha^2 t$ ,  $T \rightarrow T' = \beta T + \gamma$ , em particular, sob o subgrupo de transformações

$$r \rightarrow r' = \alpha r, \quad t \rightarrow t' = \alpha^2 t, \quad T \rightarrow T' = \alpha^m T.$$

Isto é dizer que buscamos soluções  $T(r, t)$  invariante sob estas transformações. Observe que  $X = \frac{r^2}{t}$  e  $\frac{T}{t^{m/2}}$  são invariantes sob estas transformações e buscamos a solução na forma  $T = t^{m/2} f(X)$ ,  $X = \frac{r^2}{t}$ . Substituindo esta expressão na equação de calor obtemos que

$$4kX f'' + (2kn + X) f' - \frac{m}{2} f = 0$$

(corresponde a equação hipergeométrica confluyente  $x \rightarrow -\xi$ ).

Utilizando a variável  $\xi = \frac{r^2}{4kt}$  (que é adimensional) leva a uma expressão mais simples

$$\begin{aligned} T &= t^{m/2} f(\xi), \\ \xi f_{\xi\xi} + \left(\xi + \frac{n}{2}\right) f_{\xi} - \frac{m}{2} f &= 0. \end{aligned}$$

O calor total  $Q$  é proporcional a

$$\int_0^{\infty} T(r, t) r^{n-1} dr \quad \text{ou} \quad \alpha^m \alpha^n = \alpha^{m+n} \quad \text{ou} \quad \alpha t^{\frac{(m+n)}{2}}.$$

Um caso especial acontece quando  $Q = \text{constante}$  ou  $m = -n$ . Ponha  $n = 2h$ , segue-se que

$$0 = \xi f_{\xi\xi} + (\xi + h) f_{\xi} + h f = \xi(f_{\xi} + f)_{\xi} + h(f_{\xi} + f).$$

Para obter que  $T(r, t) \rightarrow 0$  com  $r \rightarrow \infty$  é necessário que  $f$  e  $f_\xi \rightarrow 0$  com  $\xi \rightarrow \infty$ . Mas  $f(\xi) = e^{-\xi}$  é uma solução satisfazendo esta conclusão (é a única solução). Segue-se que  $T(r, t) = ct^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4kt}}$ . Esta forma de solução é normalmente obtido utilizando transformadas de Fourier. Para maiores informações consulte o livro por G. Birkhoff<sup>5</sup> (Capítulo V §80). Outros problemas podem ser tratados pelo mesmo método. Seguimos a discussão do apêndice 3, Capítulo 3 de Tijonov e Samarsky.

Considere o problema unidimensional

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0,$$

$$T(x, 0) = \begin{cases} T_0 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

e busca a solução na forma

$$T(x, t) = T \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) = T_0 f \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right).$$

Coloque  $z = \frac{x}{2\sqrt{t}}$ . Observe que

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = T_0 \frac{d^2 f}{dz^2} \frac{1}{4t}$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{xT_0}{4t^{3/2}} \frac{df}{dz} = -T_0 \frac{z}{2t} \frac{df}{dz}$$

e por substituição na equação de calor

$$a^2 \frac{d^2 f}{dz^2} = -2z \frac{df}{dz},$$

Sujeito as condições  $f(-\infty) = 0$  e  $f(\infty) = 1$ . Por integração

$$a^2 \frac{f''}{f'} = -z \Rightarrow f' = ce^{-\frac{z^2}{a^2}}$$

e

$$f = c \int_{-\infty}^z e^{-\frac{\xi^2}{a^2}} d\xi = c_1 \int_{-\infty}^{\frac{z}{a}} e^{-\zeta^2} d\zeta.$$

Se  $f(\infty) = 1$ ,  $c_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ . Segue-se que

$$T(x, t) = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\xi^2} d\xi.$$

Introduzindo a função (integral de erro),

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi,$$

temos a expressão

$$T(x, t) = \frac{T_0}{2} \left( 1 + \Phi \left( \frac{x}{2\sqrt{a^2 t}} \right) \right).$$

<sup>5</sup>Birkhoff, G. *Hydrodynamics: a study in logic, fact and similitude*, 2nd.ed.rev., Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1960

Se o valor inicial é

$$T(x, 0) = \begin{cases} T_0 & \text{se } x > \bar{x} \\ 0 & \text{se } x < \bar{x} \end{cases}$$

Uma análise similar vai dar a solução

$$T(x, t) = \frac{T_0}{2} \left( 1 + \Phi \left( \frac{x - \bar{x}}{2\sqrt{a^2 t}} \right) \right)$$

e no caso o valor inicial é

$$T(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > x_2 \\ T_0 & \text{se } x_1 < x < x_2 \\ 0 & \text{se } x < x_1 \end{cases}$$

e a solução é

$$T(x, t) = \frac{T_0}{2} \left( \Phi \left( \frac{x - x_1}{2\sqrt{a^2 t}} \right) - \Phi \left( \frac{x - x_2}{2\sqrt{a^2 t}} \right) \right).$$

Esta condição inicial corresponde a uma quantidade total de calor  $Q = c\rho(x_2 - x_1)T_0$ . Se  $Q = c\rho$ ,

$$T(x, t) = -\frac{1}{x_2 - x_1} \frac{1}{2} \left( \Phi \left( \frac{x - x_2}{2\sqrt{a^2 t}} \right) - \Phi \left( \frac{x - x_1}{2\sqrt{a^2 t}} \right) \right)$$

e no caso limite,  $x_2 - x_1 \rightarrow 0$  ( $(x_2 - x_1)T_0 = 1$ ),

$$T(x, t) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{2} \Phi \left( \frac{x - \xi}{2\sqrt{a^2 t}} \right) \right)_{\xi=x_1},$$

temos uma concentração de calor no ponto  $x_1$  com temperatura infinita. Efetuando a derivação,

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4a^2 t}}.$$

## Exercícios (Green e Stokes)

1. Seja  $\Sigma$  uma superfície regular com borda uma curva fechada  $\Gamma$  e suponha que  $A = (a, b, c) \notin \Gamma \cup \Sigma$ . Considere o elemento de superfície  $dS$  no ponto  $M = (x, y, z)$  de  $\Sigma$ . Observe (veja exemplo c) que o ângulo sólido definido pelo cone elementar com vértice  $A$  e base  $dS$  é  $\frac{\cos \theta dS}{r^2}$ ,  $r = |\overline{MA}|$ ,  $\cos \theta = \frac{\overline{MA} \cdot \mathbf{n}}{|\overline{MA}|}$ , com  $\mathbf{n}$  o vetor normal unitário em  $M$ . Interprete  $\Omega = \int \int_{\Sigma} \frac{\cos \theta dS}{r^2}$  como um ângulo sólido e mostre que

$$\Omega = \Omega(a, b, c) = \int \int_{\Sigma} \frac{(a-x)dydz + (b-y)dzdx + (c-z)dxdy}{((a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2)^{3/2}}.$$

2. Mostre que o valor de  $\Omega(a, b, c)$  é independente de  $\Sigma$  dado que a borda é mantida fixa. Integrandando sobre o exterior da superfície, mostre que se  $\Sigma$  é fechada, então  $\Omega$  é  $4\pi$  ou  $0$  dependendo se  $A$  pertence ao interior do volume definido por  $\Sigma$  ou ao exterior. (Dica: Verifique

que  $\operatorname{div}_{(x,y,z)} \left( \frac{\tau}{|\tau|^3} \right) = 0$ , com  $\tau = (a - x, b - y, c - z)$ , e aplique a fórmula de Gauss (exemplo c)).

3. Mostre que  $\nabla_{(a,b,c)} \Omega(a, b, c) = - \int_{\Gamma} \frac{\tau \times d\tau}{|\tau|^3}$  independe de  $\Sigma$  e depende somente de  $\Gamma$ .

(Dica: Observe que  $\operatorname{div}_{(x,y,z)} \left( \frac{\partial}{\partial a} \frac{\tau}{|\tau|^3} \right) = 0$ , também verifique que

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\tau}{|\tau|^3} \right) = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

com  $u = 0$ ,  $v = \frac{z - c}{|\tau|^3}$ ,  $w = -\frac{y - b}{|\tau|^3}$  e aplique o teorema de Stokes).

4. Mostre que se  $A$  está no lado do vetor normal exterior de  $\sigma$  que  $\Omega(a, b, c) \rightarrow -2\pi$  com  $(a, b, c) \rightarrow (a_0, b_0, c_0) \in \Sigma$ .

5. Considere o Laplaciano  $\Delta$  associado com a métrica

$$ds^2 = k^2(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2)$$

e  $v$  satisfazendo

$$\Delta v = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( k \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( k \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( k \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) = 0.$$

Mostre que  $u = \sqrt{k}v$  é uma solução de  $\Delta u = 0$  se  $\Delta_x v = 0$  e  $\Delta_\xi k^{1/2} = 0$ .

Conseqüentemente, mostre que via inversão  $v = \frac{1}{R} u \left( \frac{x}{R^2}, \frac{y}{R^2}, \frac{z}{R^2} \right)$  é uma solução de  $\Delta v = 0$  se  $\Delta_x u = 0$ , onde  $x = \frac{\xi}{R^2}$ ,  $y = \frac{\eta}{R^2}$ ,  $z = \frac{\zeta}{R^2}$ ,  $R^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$  e  $k^2 = R^{-4}$ .

6. a) Mostre que utilizando a representação de Poisson em  $\mathbb{R}^3$  que se  $\Delta u = 0$  e  $|u| \leq M$ , segue-se que  $u = \text{constante}$  (Liouville).

b) Utilizando a parte a) mostre que uma função real harmônica em  $\mathbb{R}^3$  é constante ou uma aplicação de  $\mathbb{R}^3$  em  $\mathbb{R}^1$ .

7. Considere  $n$  partículas fixas no plano se atraindo com uma força central de magnitude  $\frac{1}{r}$ . Mostre que não existem mais de  $n - 1$  pontos de equilíbrio para uma partícula no campo (Dica: As posições são  $(x, y)$ ,  $(x_j, y_j)$ ,  $j=1, \dots, n$  introduzem variáveis complexas  $z = x + iy$  e  $z = x_j + iy_j$ ).

## Exercícios (Aplicações)

8. Mostre que uma superfície fechada rígida  $\Sigma$  sujeita a uma pressão uniforme direcionada no interior  $V^0$  de  $\Sigma$  fica em equilíbrio. (Dica: Sendo  $\mathbf{n}'$  o vetor normal direcionado no interior de  $\Sigma$ , a mecânica elementar exige que

$$\int \int_{\Sigma} \mathbf{n}' dS = 0 \quad \text{e} \quad \int \int_{\Sigma} \mathbf{x} \times \mathbf{n}' dS = 0,$$

com  $\mathbf{x}$  o vetor de posição de  $dS$ . Agora considere

$$\int_{\Sigma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}' dS = - \int_{V^0} \operatorname{div} \mathbf{u},$$

com  $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{u} = (0, -z, y)$ , etc).

9. Suponha que as linhas de corrente de um fluido com velocidade  $\mathbf{u}$  e divergência  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  são as intersecções das superfícies  $C^2$ ,  $f_1 = \text{constante}$  e  $f_2 = \text{constante}$ . Mostre que existe uma função  $C^1$ ,  $\lambda$ , tal que  $\mathbf{u} = \lambda \nabla f_1 \times \nabla f_2$  e que

$$\frac{\partial(\lambda, f_1, f_2)}{\partial(x, y, z)} = 0 \quad \text{e} \quad \lambda = F(f_1, f_2).$$

10. Para um fluido movendo em um tubo de seção variável  $\beta$ , mostre que se  $v$  é a velocidade no ponto  $P$  e  $s$  o comprimento do tubo até este ponto, então a equação da continuidade é

$$\frac{\partial(\beta\rho)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}(\beta\rho v) = 0.$$

11. Se a vorticidade  $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$  em cada ponto de um fluido incompressível é constante mostre que  $\Delta \mathbf{v} = 0$ .

12. a) Seja  $\mathbf{v}_m$  a velocidade no ponto  $\mathbf{r}$  relativo a um sistema de referência rodando em volta da origem  $O$  com velocidade angular  $\omega$ . Mostre que a equação de Euler tem a forma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} + \mathbf{v}_m \cdot \nabla \mathbf{v}_m + 2\omega \times \mathbf{v}_m + \frac{\partial \omega}{\partial t} \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) = F - \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

b) Mostre que se  $\omega$  é constante, as equações toma a forma no caso incompressível ( $\text{div } \mathbf{v}_m = 0$ )

$$\frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} + 2\mathbf{v}_m \times (\omega_m + \omega) = F - \nabla \left( \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} Q^2 \right),$$

onde

$$Q^2 = \mathbf{v}_m^2 - \omega^2 \mathbf{r}^2 + (\omega \cdot \mathbf{r})^2.$$

c) Mostre que no caso que o movimento é incompressível, barotrópico, com  $p(\rho) = \int^p \frac{d\xi}{\rho(\xi)}$ ,  $F = -\nabla v$  e  $\mathbf{v} = -\nabla \varphi$ , então

$$p + v + \frac{1}{2} \mathbf{v}_m^2 + \omega \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_m - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = c(t).$$

13. Mostre que a energia cinética de um sistema finito de vórtices em um fluido infinito ao resto no infinito tem a mesma forma

$$T = 2\rho \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{v}) dx.$$

14. Seja  $(r_j, \vartheta_j)$ ,  $j = 1, \dots, F$  as coordenadas polares no tempo  $t$  de um sistema de vórtice de força  $\mu_1, \mu_2, \dots$ . Mostre  $\sum_i \mu_i r_i^2 = \text{constante}$  e  $\sum_i \mu_i r_i^2 \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq k} \mu_i \mu_k$ .

15. Utilizando o Teorema de Gauss, mostre que na superfície de um condutor, a derivada normal do campo elétrico  $E$  satisfaz

$$\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial n} = - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

com  $R_1$  e  $R_2$  os raios de curvatura principais da superfície.

16. Considere um fluido homogêneo, incompressível e irrotacional. Mostre que  $\Delta v^2 \geq 0$  e  $\Delta p \leq 0$ .

## Exercícios (Teoria Potencial)

17. Considere um corpo sólido com centro de massa  $G$  e momentos de inércia principais em volta de  $G$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Supondo que a massa do corpo é  $m$  e  $I$  é o momento de inércia em volta da linha  $GP$  ligando  $G$  a um ponto distante  $P$  e  $R = |GP|$ , mostre que o potencial  $V$  em  $P$  é aproximadamente

$$V \sim \frac{\gamma m}{R} + \gamma \frac{A + B + C - 3I}{R^3}.$$

18. Oito massas estão colocadas nos pontos  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ . Mostre que em distâncias grandes da origem

$$V \sim \frac{8\gamma m}{r} - \frac{14\gamma m}{r^9}(5(x^4 + y^4 + z^4) - 3r^4).$$

19. A massa específica  $\sigma$  de uma casca esférica fina  $S$ , de centro  $O$  com massa total  $M$  é  $\sigma = \frac{1}{|OQ|}$ , onde  $Q$  é um ponto de  $S$ . Mostre que o potencial  $V$  no ponto  $P$ ,  $r = |OP|$ ,  $P$  externo a  $S$ , é dado por

$$V = \frac{M}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \frac{P_n(\cos \theta)}{2n+1}.$$

20. O potencial eletrostático de um sistema é dado por  $\phi = A(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \tan^{-1} \frac{y}{x}$ . Mostre que as linhas de força pertencem as superfícies

$$x^2 + y^2 + z^2 = B(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}.$$

21. Uma superfície condutora ligada a terra, que tem a equação

$$r = a \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \epsilon_n P_n(\cos \theta) \right)$$

é colocada em um campo elétrico uniforme  $E$  paralelo ao eixo de simetria do condutor. Se quadrados e produtos dos  $\epsilon_n$  podem ser negligenciados, mostre que o potencial  $\phi$  é dado por

$$\begin{aligned} \phi \sim & Ea \left( \left\{ \left( 1 + \frac{6}{r} \right) \left( \frac{a}{r} \right)^2 - \frac{n}{a} \right\} P_n(\cos \theta) + \right. \\ & \left. + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2n-1} \epsilon_{n-1} + \frac{n+1}{2n+3} \epsilon_{n+1} \right) \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta) \right) \end{aligned}$$

22. Prove que se  $V_n$  é uma função homogênea de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , de grau  $n$  e  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , então

$$\Delta(r^m V_n) = m(m+2n+1)r^{m-2}V_n + r^m \Delta V_n.$$

Deduzo o teorema de Kelvin, que se  $V_n$  é uma função harmônica, então  $r^{-2n-1}V_n$  também é harmônica.

23. Prove que se  $V_n$  é uma função homogênea de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , de grau  $n$  que satisfaz a equação de Laplace, então

$$\frac{\partial^{p+q+s} V_n}{\partial x^p \partial y^q \partial z^s}$$

é uma função homogênea de grau  $n - p - q - s$  satisfazendo a equação de Laplace.

24. Prove que se  $V_n(x, y, z)$  é uma função integral racional homogênea de grau  $n$ , a função

$$\left\{ 1 - \frac{r^2}{2(2n-1)}\Delta + \frac{r^4}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)}\Delta^2 - \dots \right\} V_n(x, y, z),$$

é uma função harmônica. [Dica: utilize os exercícios 22 e 23].

25. Um número de cargas pontuais  $e_k$  são representados no plano cartesiano pelas coordenadas  $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ . Mostre que dentro de alguma esfera em torno da origem em que não existem cargas o potencial eletrostático é dado por

$$\phi(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n S_n$$

quando

$$S_n = \sum_k \frac{e_k}{\rho_k^{n+1}} P_n(\mu_k),$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \rho_k = (\xi_k^2 + \eta_k^2 + \zeta_k^2)^{1/2}, \quad \mu_k = \frac{\xi_k x + \eta_k y + \zeta_k z}{\rho_k r}.$$

Mostre que se  $\phi$  é uma função simétrica de  $x^2$ ,  $y^2$  e  $z^2$ , então  $S_n = 0$  para  $n = 1, 2$  e  $3$ .

Procure expressões para o potencial eletrostático próximo da origem, com corretos termos em  $r^4$ , para:

a) Seis cargas iguais a  $e$  nos seis pontos  $(\pm a, 0, 0)$ ;  $(0, \pm a, 0)$ ;  $(0, 0, \pm a)$ .

b) Oito cargas iguais a  $-e$  nos oito pontos  $(\pm b, \pm b, \pm b)$ .

Mostre que para a ordem considerada as intensidades elétricas são as mesmas se  $8a^5 = 81\sqrt{3}b^5$ . [ $P_2 = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$  e  $P_4 = \frac{1}{8}(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3)$  podem ser assumidos.]

26. Uma massa  $m$  está em um ponto cuja distância da origem é  $\mathbf{a}$ . Mostre que seu potencial em uma suficiente grande distância  $r$  da origem é

$$\left\{ 1 - (\mathbf{a} \cdot \nabla) + \frac{1}{2!}(\mathbf{a} \cdot \nabla)^2 - \frac{1}{3!}(\mathbf{a} \cdot \nabla)^3 + \dots \right\} \frac{\gamma m}{r}$$

quando  $\nabla$  é o operador vetorial com as componentes  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}$ .

27. Temos visto na seção 1.8.1 via a terceira representação de Green a importância de camadas simples e duplas na teoria de potencial. Assim, estamos induzidos a examinar as propriedades dos potenciais

$$V(x) = \int_S \frac{\sigma(y) dS(y)}{|x-y|}, \quad x \notin S,$$

e

$$W(x) = \int_S \chi(y) \frac{\partial}{\partial x_y} \left( \frac{1}{|x-y|} \right) dS(y), \quad x \notin S.$$

Localizando em volta de um determinado ponto da superfície  $\xi$  e utilizando o teorema de Gauss (1.15) e o resultado (1.16) mostre que se  $S$  divide  $\mathbb{R}^3$  em uma região exterior  $D_e$  e interior  $D_i$ , então

$$W_i = \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \in D_i}} W(x) = 2\pi\chi(\xi) + P \int_S \chi(y) \frac{\partial}{\partial x_y} \left( \frac{1}{|\xi-y|} \right) dS(y)$$

$$W_e = \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \in D_e}} W(x) = -2\pi\chi(\xi) + P\int_S \chi(y) \frac{\partial}{\partial x_y} \left( \frac{1}{|\xi - y|} \right) dS(y)$$

enquanto  $V$  satisfaz

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)_i (\xi) &= -2\pi\sigma(\xi) + P\int_S \frac{\sigma(y) \cos \psi}{|\xi - y|^2} dS(y), \\ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)_e (\xi) &= 2\pi\sigma(\xi) + P\int_S \frac{\sigma(y) \cos \psi}{|\xi - y|^2} dS(y), \end{aligned}$$

aqui  $\cos \psi = n(\xi) \cdot \frac{y - \xi}{|y - \xi|}$ ,  $y \in S$ ,  $y \neq \xi$ , e  $P\int_S$  significa a integral principal (veja o livro de Webster [12]). Considere agora o problema de Dirichlet,

$$\Delta W = 0 \quad \text{em } D_i \text{ e } D_e$$

sujeito a condição  $W = V_s$  em  $S$ . Neumann resolve este problema utilizando o potencial duplo

$$W = \int_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial} \left( \frac{1}{r} \right) dS.$$

Com as relações de salto observamos que o problema de Dirichlet para  $D_i$  é resolvido para  $W$  com  $\sigma$  satisfazendo a equação integral

$$V_s(\xi) = 2\pi\chi(\xi) + P\int_S \chi(\xi) \frac{\partial}{\partial x_y} \left( \frac{1}{|\xi - y|} \right) dS(y).$$

A análise de problemas deste tipo foi feita primeiro por Fredholm em Stockholm - *Öfersigt-Kongl Vetenskaps Akad* 1900, *Acta Mathematica* XXVII, p 365, 1903 e depois por D. Hilbert em artigos publicados em *Göttinger Nachrichten* 1904-5. Referimos o leitor para o livro de Courant e Hilbert [4] capítulo 2 para maiores informações e o livro [12].

# Bibliografia

- [1] Abraham, R., Marsden, J.E., *Foundations of Mechanics*, 2 Ed., Massachusetts, 1978.
- [2] Archbold, J. W., *Algebra*, Pitman, 1958.
- [3] Bateman, H., *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, CUP, 1959.
- [4] Courant, R., Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics*, Wiley, 1975.
- [5] Gilmore, R., *Lie Groups, Lie Algebra and some of their applications*, Dover, New York, 2002.
- [6] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley, New York ,1975.
- [7] Joos, G., Freeman, I.M., *Theoretical Physics*, Blackie & Son Limited, London, 1958.
- [8] Lax, M., *Symmetry Principles in Solid State and Molecular Physics*, Dover, New York, 2001.
- [9] Littlewood, J. E. *A University Algebra*, Heinemann, 1958.
- [10] Merzbacher, E., *Quantum Mechanics*, Wiley, New York ,1961.
- [11] Schiff, L. I., *Quantum Mechanics*, Mc Graw-Hill, New York ,1955.
- [12] Webster, A. G., *Partial differential equations of mathematical physics* , 2nd ed., Dover, New York, 1955.
- [13] Weyl, H., *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover, New York ,1950.
- [14] Wilson, H.A., *Modern Physics*, 4 Ed.,Blackie & Son, London,1959

# Capítulo 2

## Problemas de Fronteira e Evolutivos

### 2.1 Simetria e soluções especiais do problema de Dirichlet para o Laplaciano

O Laplaciano em três dimensões em coordenadas esféricas tem a forma

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\end{aligned}\quad (2.1)$$

Vamos buscar uma solução da equação de Laplace que é o produto de uma função de  $r$  por uma função de  $\theta, \varphi, u = R(r)Y(\theta, \varphi)$ . Conseqüentemente obteremos

$$\frac{d^2 R}{dr^2} Y + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} Y + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (2.2)$$

Multiplicando por  $\frac{r^2}{RY}$ , obtemos de (2.2)

$$\frac{1}{Y} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{Y \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = - \left\{ \frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r}{R} \frac{dR}{dr} \right\} = c \text{ (constante)}. \quad (2.3)$$

Obtemos

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{c}{r^2} R = 0, \quad (2.4)$$

com ponto singular em  $r = 0$ . Procurando uma solução na forma

$$R = \sum a_k r^k, \quad (2.5)$$

obtemos que

$$\sum a_k (k(k-1) + 2k + c) r^{k-2} = 0$$

ou

$$k(k+1) + c = 0.$$

Pondo  $c = -n(n+1)$ , obtemos  $k = n$  e  $k = -(n+1)$  e as soluções são  $r^n$  e  $r^{-(n+1)}$ , ou seja

$$Ar^n Y_n + BY_n r^{-(n+1)}$$

são as soluções de (2.1), onde  $Y_n$  satisfaz

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2} + n(n+1)Y_n = 0, \quad (2.6)$$

a equação originalmente derivada por Laplace.

Pondo  $\mu = \cos \theta$ ,  $d\mu = -\sin \theta d\theta$  e (2.6) é equivalente a forma

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{\partial Y_n}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2} + n(n+1)Y_n = 0. \quad (2.7)$$

No caso que  $Y_n$  é independente de  $\varphi$ , temos de (2.7),  $Y_n = P_n$

$$\frac{d}{d\mu} (1 - \mu^2) \frac{dP_n}{d\mu} + n(n+1)P_n = 0, \quad (2.8)$$

ou

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 P_n}{d\mu^2} - 2\mu \frac{dP_n}{d\mu} + n(n+1)P_n = 0, \quad (2.9)$$

que é a equação de Legendre.

É possível determinar que uma solução tem a forma de um polinômio de ordem  $n$ , que se chama o polinômio de Legendre  $P_n(\mu)$ .

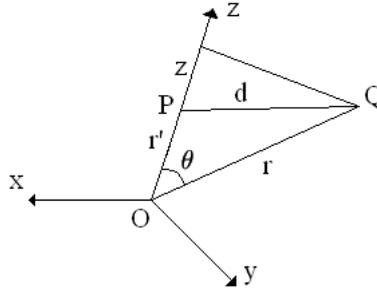


Figura 2.1:  $\frac{1}{d} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mu r r'}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - r')^2}}$ , onde  $\mu = \cos \theta$

Considerando como uma função de  $z$ ,  $\frac{1}{d}$  tem uma expansão de Taylor

$$\frac{1}{d} = f(z - r') = f(z) - r' \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{r'=0} + \frac{r'^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)_{r'=0} + \dots$$

Quando  $r' = 0$ ,  $\frac{1}{d} = \frac{1}{r}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right)$ , o que significa que

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} - r' \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2!} r'^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} r'^n \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left( \frac{1}{r} \right). \quad (2.10)$$

Agora multiplicando e dividindo cada termo por  $r^{n+1}$ , temos

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} \left\{ P_0 + \frac{r'}{r} P_1 + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 P_2 + \dots + \left( \frac{r'}{r} \right)^n P_n \right\}, \quad (2.11)$$

onde definimos

$$P_0 = 1, \quad P_n = \frac{(-1)^n}{n!} r^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left( \frac{1}{r} \right). \quad (2.12)$$

Claramente  $P_n$  são polinômios em  $\mu = \cos \theta = \frac{z}{r}$ .

Podemos observar que

$$\frac{r}{d} = \left( 1 - 2 \frac{r'}{r} \left( \mu - \frac{r'}{2r} \right) \right)^{-1/2}$$

e pelo teorema binomial

$$\frac{r}{d} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots (\frac{1}{2} + s - 1)}{s!} \left( 2 \frac{r'}{r} \right)^s \left( \mu - \frac{r'}{2r} \right)^s \quad (2.13)$$

e desenvolvendo o último fator

$$\left( \mu - \frac{r'}{2r} \right)^s = \sum_{t=0}^s \frac{(-1)^t s(s-1) \cdots (s-t+1)}{t!} \mu^{s-t} \left( \frac{r'}{2r} \right)^t,$$

temos

$$\frac{r}{d} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^s \frac{(-1)^t 2^{s-t} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots (\frac{1}{2} + s - 1)}{t!(s-t)!} \left( \frac{r'}{r} \right)^{s+t} \mu^{s-t}. \quad (2.14)$$

Escolhendo os termos para que  $s + t = n$ , temos para o coeficiente de  $\left( \frac{r'}{r} \right)^n$ , escrevendo

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} = \frac{(2n!)}{2^n (n!)^2},$$

$$P_n = \frac{(2n!)}{2^n (n!)^2} \left( \mu^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot (2n-1)} \mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} \mu^{n-4} + \cdots \right). \quad (2.15)$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} P_0(\mu) &= 1, \\ P_1(\mu) &= \mu, \\ P_2(\mu) &= \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1), \\ P_3(\mu) &= \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu), \\ P_4(\mu) &= \frac{1}{8}(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3), \\ P_5(\mu) &= \frac{1}{8}(63\mu^5 - 10\mu^2 + 15\mu), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observando que

$$\Delta \left( \frac{1}{d} \right) = 0 \quad r \neq r',$$

podemos identificar os polinômios de (2.15) com os de (2.9). Claramente podemos definir  $P_n$  como os coeficiente de potências de  $\alpha^n$  no desenvolvimento em potências de  $\alpha$  de

$$(1 - 2\alpha\mu + \alpha^2)^{-1/2} = 1 + P_1(\mu)\alpha + P_2(\mu)\alpha^2 + \cdots.$$

Esta função é chamada função de geração dos polinômios  $P_n(\mu)$ .

### Outras fórmulas para $P_n(\mu)$

Observando que

$$(\mu^2 - 1)^n = \mu^{2n} - n\mu^{2n-2} + \frac{n(n-1)}{2!}\mu^{2n-4} + \dots$$

e derivando  $n$  vezes obtemos que

$$\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2 - 1)^n = 2n(2n-1)\cdots(n+1)\mu^n - n(2n-2)(2n-3)\cdots(n-1)\mu^{n-2} + \dots$$

e

$$\frac{1}{2^n} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2 - 1)^n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \left( \mu^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot (2n-1)} \mu^{n-2} + \dots \right) = P_n \quad (2.16)$$

(A fórmula de Rodrigues).

A fórmula (2.16) tem uma conseqüência interessante: para qualquer função diferenciável  $y$ ,  $y'$  sempre tem um zero dentro de dois zeros consecutivos de  $y$ , mas  $(\mu^2 - 1)^n$  tem  $n$  zeros iguais a 1 e  $n$  iguais a -1, conseqüentemente  $P_n(\mu)$  tem  $n$  zeros dentro de -1 e 1.

Observando que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - 3\alpha\mu + \alpha^2)^{1/2}} &= (1 - \alpha e^{i\theta})^{-1/2} (1 - \alpha e^{-i\theta})^{-1/2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n \\ &= \left( 1 + \frac{1}{2}\alpha e^{-i\theta} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2!} \alpha^2 e^{-2i\theta} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3!} \alpha^3 e^{-3i\theta} + \dots \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k!} \alpha^k e^{-ik\theta} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2j-1)}{2^j j!} \alpha^j e^{ij\theta}. \end{aligned}$$

Pondo  $k + j = n$

$$P_n(\mu) = \sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-2k-1)}{2^k k! 2^{n-k} (n-k)!} e^{(n-2k)i\theta}.$$

Somando termos  $k = p$ ,  $k = n - p$ , obtemos

$$\sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2p-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-2p-1)}{2^n p! (n-p)!} 2 \cos(n-2p)\theta$$

e finalmente

$$\begin{aligned} P_n(\cos \theta) &= 2 \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \left\{ \cos n\theta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot n}{1 \cdot (2n-1)} \cos(n-2)\theta + \frac{1 \cdot 3n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot (2n-1)(2n-3)} \cos(n-4)\theta + \dots \right\} \quad (2.17) \end{aligned}$$

a fórmula dada por Laplace e Legendre.

## 2.2 Relações de recorrência para harmônicas esféricas

Temos que

$$(1 - 2\alpha\mu + \alpha^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\mu)$$

e pela diferenciação com respeito a  $\alpha$

$$(\mu - \alpha)(1 - 2\mu\alpha + \alpha^2)^{-3/2} = \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n-1} P_n(\mu)$$

ou

$$(\mu - \alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\mu) = (1 - 2\mu\alpha + \alpha^2) \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n-1} P_n(\mu).$$

Segue-se (comparando os coeficientes de  $\alpha^n$ ) que

$$\mu P_n(\mu) - P_{n-1}(\mu) = (n+1)P_{n+1}(\mu) - 2n\mu P_n(\mu) + (n-1)P_{n-1}(\mu)$$

ou

$$(n+1)P_{n+1}(\mu) - (2n+1)\mu P_n(\mu) + nP_{n-1}(\mu) = 0$$

e para  $n = 0$ ,

$$P_1(\mu) - \mu P_0(\mu) = 0 \quad (\text{Ossian Bonnet}).$$

Derivando com respeito a  $\mu$ , temos

$$\alpha(1 - 2\mu\alpha + \alpha^2)^{-3/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \frac{dP_n(\mu)}{d\mu}$$

ou

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\mu) = (1 - 2\mu\alpha + \alpha^2) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \frac{dP_n(\mu)}{d\mu}$$

e conseqüentemente

$$P_n(\mu) = \frac{dP_{n+1}}{d\mu} + \frac{dP_{n-1}}{d\mu} - 2\mu \frac{dP_n}{d\mu}.$$

Multiplicando a derivada com respeito a  $\alpha$  por  $\alpha$  e a derivada com respeito a  $\mu$  por  $(\mu - \alpha)$  e comparando os coeficientes, temos

$$(\mu - \alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \frac{dP_n}{d\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n P_n(\mu)$$

ou

$$\mu \frac{dP_n}{d\mu} - \frac{dP_{n-1}}{d\mu} = nP_n$$

e eliminando  $\mu \frac{dP_n}{d\mu}$ ,

$$\frac{dP_{n+1}}{d\mu} - \frac{dP_{n-1}}{d\mu} = (2n+1)P_n.$$

Pondo  $n = 0, 1, \dots$  e somando

$$1 + 3P_1(\mu) + 5P_2(\mu) + \dots + (2n+1)P_n(\mu) = \frac{dP_{n+1}}{d\mu} + \frac{dP_n}{d\mu}.$$

## 2.3 Ortogonalidade

Introduza  $\phi$  por

$$\phi(r) = z \int_{-1}^1 (1 - \mu^2)^r \frac{d^r P_m}{d\mu^r} \frac{d^r P_n}{d\mu^r} d\mu.$$

$P_n(\mu)$  satisfaz

$$(\mu^2 - 1) \frac{d^2 P_n}{d\mu^2} + 2\mu \frac{dP_n}{d\mu} - n(n+1)P_n = 0$$

e derivando  $r - 1$  vezes obtemos que

$$(\mu^2 - 1) \frac{d^{r+1} P_n}{d\mu^{r+1}} + 2r\mu \frac{d^r P_n}{d\mu^r} - (n+r)(n-r+1) \frac{d^{r-1} P_n}{d\mu^{r-1}} = 0.$$

Multiplicando esta equação por  $-(-\mu^2)^{r-1}$  podemos escrever

$$\frac{d}{d\mu} \left( (1 - \mu^2)^r \frac{d^r P_n}{d\mu^r} \right) = -(n+r)(n-r+1)(1 - \mu^2)^{r-1} \frac{d^{r-1} P_n}{d\mu^{r-1}}.$$

Integrando  $\phi(r)$  por partes,

$$\phi(r) = \frac{d^{r-1}}{d\mu^{r-1}} P_m \frac{d^r P_n}{d\mu^r} (1 - \mu^2)^r \Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \frac{d^{r-1} P_m}{d\mu^{r-1}} \frac{d}{d\mu} \left[ (1 - \mu^2)^r \frac{d^r P_n}{d\mu^r} \right] d\mu.$$

Claramente,  $\Big|_{-1}^{+1} = 0$  utilizando a relação anterior, o que implica que

$$\phi(r) = (n+r)(n-r+1)\phi(r-1)$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned} \phi(r) &= (n+r)(n-r+1)(n+r-1)(n-r+2)\phi(r-2) \\ &= (n-r+1)(n-r+2) \cdots (n+r)\phi(0) \\ &= \frac{(n+r)!}{(n-r)!} \phi(0). \end{aligned}$$

Claramente utilizando a equação de Legendre

$$[(\mu^2 - 1)(P_n P'_m - P_m P'_n)]_{-1}^{+1} + n(n+1) - m(m+1) \int_{-1}^{+1} P_m(\mu) P_n(\mu) d\mu = 0.$$

Conseqüentemente, se  $n \neq m$ ,

$$\int_{-1}^{+1} P_m(\mu) P_n(\mu) d\mu = 0.$$

A função

$$(1 - \mu^2)^{r/2} \frac{d^r P_n}{d\mu^r} = \sin^r \theta \frac{d^r P_n(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^r}$$

é chamada a função associada de Legendre de ordem  $r$  e grau  $n$  e é denominada  $P_n^r(\mu)$  e pela diferenciação tem a forma

$$\begin{aligned} P_n^r(\mu) &= \frac{2n!}{2^n n! (n-r)!} (1 - \mu^2)^{r/2} \left[ \mu^{n-r} - \frac{(n-r)(n-r+1)}{2 \cdot (2n-1)} \mu^{n-r-2} + \right. \\ &+ \left. \frac{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)(n-r-3)}{2 \cdot 4 \cdot 2n-1 \cdot 2n-3} \mu^{n-r-4} \cdots \right]. \end{aligned}$$

Assim concluímos que

$$\phi(r) = \int_{-1}^{+1} P_n^r P_m^r d\mu = 0, \quad \text{se } m \neq n,$$

e mais tarde vamos demonstrar que de fato

$$\phi(0) = \int_{-1}^{+1} P_m(\mu) P_n(\mu) d\mu = \frac{2}{2n+1}, \quad \text{se } m = n,$$

ou

$$\int_{-1}^{+1} P_n^r(\mu)^2 d\mu = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+r)!}{(n-r)!}.$$

Pondo  $r = 0$  obtemos a fórmula para  $P_n$ . Vamos obter a equação diferencial satisfeita por  $P_n^r(\mu)$ . Derivando

$$\frac{dP_n^r}{d\mu} = (1-\mu^2)^{r/2} \frac{d^{r+1}P_n}{d\mu^{r+1}} - r\mu(1-\mu^2)^{r/2-1} \frac{d^r P_n}{d\mu^r},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_n^r}{d\mu^2} &= (1-\mu^2)^{r/2} \frac{d^{r+2}P_n}{d\mu^{r+2}} - 2r\mu(1-\mu^2)^{r/2-1} \frac{d^{r+1}P_n}{d\mu^{r+1}} - \\ &- [r(r-\mu^2)^{r/2-1} - r(r-2)\mu^2(1-\mu^2)^{r/2-2}] \frac{d^{r+1}P_n}{d\mu^{r+1}}. \end{aligned}$$

Formalmente obtemos

$$\begin{aligned} (1-\mu^2) \frac{d^2 P_n^r}{d\mu^2} - 2\mu \frac{dP_n^r}{d\mu} + n(n+1)P_n^r &= (1-\mu^2)^{r/2} \left[ (1-\mu^2) \frac{d^{r+2}P_n}{d\mu^{r+2}} - 2(r+1)\mu \frac{d^{r+1}P_n}{d\mu^{r+1}} + \right. \\ &\left. + \left( n(n+1) - r + \frac{r^2\mu^2}{1-\mu^2} \right) \frac{d^r P_n}{d\mu^r} \right]. \end{aligned}$$

Agora derivando a equação de Legendre  $r$  vezes obtemos que

$$(1-\mu^2) \frac{d^{r+2}P_n}{d\mu^{r+2}} - 2(r+1)\mu \frac{d^{r+1}P_n}{d\mu^{r+1}} - (r(r+1) - n(n+1)) \frac{d^r P_n}{d\mu^r},$$

ou a equação acima pode ser reduzida a forma

$$(1-\mu^2)^{r/2} \left[ r(r+1) - r + \frac{r^2\mu^2}{1-\mu^2} \right] \frac{d^r P_n}{d\mu^r} = \frac{r^2}{1-\mu^2} P_n^r$$

e  $P_n^r$  satisfaz a equação

$$(1-\mu^2) \frac{d^2 P_n^r}{d\mu^2} - 2\mu \frac{dP_n^r}{d\mu} + \left( n(n+1) - \frac{r^2}{1-\mu^2} \right) P_n^r = 0.$$

### 2.3.1 Esféricas Harmônicas em geral

Voltamos a equação de Laplace

$$\frac{\partial}{\partial \mu} (1-\mu^2) \frac{\partial Y_n}{\partial \mu} + \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \phi^2} + n(n+1)Y_n = 0.$$

Tentamos uma solução na forma

$$Y_n = \Theta(\mu)\Phi(\phi)$$

e conseqüentemente obtemos

$$\frac{1 - \mu^2}{\Theta} \frac{d}{d\mu} (1 - \mu^2) \frac{d\Theta}{d\mu} + n(n+1)(1 - \mu^2) = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi} = \text{constante} = k^2$$

ou seja,

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + k^2\Phi = 0,$$

que tem a solução

$$\Phi = A \cos k\phi + B \sin k\phi$$

e

$$\frac{d}{d\mu} (1 - \mu^2) \frac{d\Theta}{d\mu} + n(n+1)\Theta = \frac{k^2}{1 - \mu^2}\Theta,$$

que tem as seguintes soluções particulares

$$\cos k\phi (\sin \theta)^k \frac{d^k P_n}{d\mu^k} \quad \sin k\phi (\sin \theta)^k \frac{d^k P_n}{d\mu^k}.$$

Podemos tomar  $k = 0, 1, 2, \dots$ , dando as esferas harmônicas

$$\begin{aligned} k = 0 & \quad P_n \\ k = 1 & \quad \cos \phi \sin \theta \frac{dP_n}{d\mu}, \quad \sin \phi \sin \theta \frac{dP_n}{d\mu}, \\ k = 2 & \quad \cos 2\phi \sin^2 \theta \frac{d^2 P_n}{d\mu^2}, \quad \sin 2\phi \sin^2 \theta \frac{d^2 P_n}{d\mu^2}, \\ & \quad \vdots \\ k = n & \quad \cos n\phi \sin^n \theta \frac{d^n P_n}{d\mu^n}, \quad \sin n\phi \sin^n \theta \frac{d^n P_n}{d\mu^n}. \end{aligned}$$

Cada uma das soluções

$$\cos k\phi \sin^k \theta \frac{d^k P_n}{d\mu^k}, \quad \sin k\phi \sin^k \theta \frac{d^k P_n}{d\mu^k}$$

é zero para  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$  e para  $n - k$  outros valores dando  $n - k$  paralelos de latitude. Também  $\sin \phi = 0$  para  $\phi = 0, \frac{\pi}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}\pi, \frac{k+1}{k}\pi, \dots, 2\pi$ , dando  $k$  meridianos ( $\cos k\phi = 0$ ,  $\phi = \frac{\pi}{2k}, \dots, \frac{2k-1}{2k}\pi$ ). Então os valores zeros destas harmônicas dão  $k$ -meridianos fazendo ângulos iguais e  $n - k$  paralelos dividindo a esfera em retangulares esféricas. Chama-se estas harmônicas as harmônicas esféricas de grau  $n$  e tipo  $k$ . Como todas estas harmônicas são independentes (linearmente), a harmônica geral de grau  $n$  é uma combinação linear delas, ou seja

$$V_n = r^n \sum_{k=0}^n (Ak_n \cos k\phi + Bk_n \sin k\phi) \sin^k \theta \frac{d^k P_n}{d\mu^k}.$$

Aplicando o teorema de Green a duas funções harmônicas  $u, v$  em  $\Omega$ ,

$$\int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\omega = 0.$$

Tomando  $\Omega = S(0, r)$  e

$$\begin{cases} u = u_n = r^n Y_n & \frac{\partial u}{\partial r} = -nr^{n-1} Y_n \\ v = v_m = r^m Y_m & \frac{\partial v}{\partial r} = -mr^{m-1} Y_m \end{cases}$$

e obtemos

$$r^{n+m-1}(m-n) \int \int Y_m Y_n d\omega = 0.$$

Em  $m \neq n$

$$\int \int Y_m Y_n d\omega = 0$$

ou  $y_m$  são ortogonais.

Em particular

$$\begin{aligned} d\omega &= 2\pi \sin \theta d\theta \\ \int \int P_m P_n \sin \theta d\theta &= 0 \\ \text{ou} \int_{-1}^{+1} P_m(\mu) P_n(\mu) d\mu &= 0 \quad \mu = \cos \theta \end{aligned}$$

(os mesmos resultados como aqueles derivados das equações de Legendre).

Aplicando o teorema de Green à função

$$v_p = \frac{1}{4\pi} \int \int \left( v \frac{\partial \left( \frac{1}{d} \right)}{\partial n} - \frac{1}{d} \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\omega.$$

Temos que

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} \sum_{s=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^s P_s(\mu) \quad r' < r \quad \mu = \cos(r, r').$$

Pondo  $v_m = r^m \frac{1}{m}$ ,

$$\begin{aligned} v_m(p) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ r^m \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) \frac{r'^s}{r^{s+2}} P_s(\mu) + mr^{m-2} Y_m \sum \left( \frac{r'}{r} \right)^s P_s(\mu) \right\} r^2 \sin^2 \theta d\theta d\phi \\ P &\equiv (r', \theta', \phi') \quad v_m(p) = r'^m Y_m(\theta, \phi'). \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y_m(\theta, \phi) P_s(\mu) \sin \theta d\theta d\phi = 0 \quad \text{se } s \neq m$$

e se  $s = m$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y_m(\theta, \phi) P_m(\mu) \sin \theta d\theta d\phi &= \frac{4\pi}{2m+1} Y_m(\theta', \phi') \\ \mu = \cos(r, r') &= \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi'). \end{aligned}$$

Tomando para  $Y_m, P_m$  e pondo  $\theta' = 0$ ,

$$Y(\theta', \phi) = P_m(1) = 1$$

e

$$\int_{-1}^{+1} P_m^2(\mu) d\mu = \frac{2}{2m+1}.$$

Suponha que temos de resolver o problema de considerar em  $B(0, a)$ , ( $n = 3$ )

$$\Delta u = 0 \quad u = f(\theta, \phi) \quad \text{sobre } |r| = a.$$

A expansão deve ter a forma

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \left( \sum_{h=0}^n P_n^{(h)}(\mu) (A_{nh} \cos h\phi + B_{nh} \sin h\phi) \right).$$

Claramente obteremos utilizando

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \cos m\phi \sin h\phi d\phi = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq h \\ \pi & \text{se } m = h > 0 \\ 2\pi & \text{se } m = h = 0 \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \cos m\phi \cos h\phi d\phi = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^k(\mu) \lambda_k \pi A_{nk} = \int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) \cos k\phi d\phi,$$

$$\begin{cases} \lambda_k = 2 & \text{se } k = 0 \\ \lambda_k = 1 & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$

Multiplicando por  $P_m^k(\mu) d\mu$

$$\int_{-1}^{+1} P_m^k P_n^k d\mu = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \frac{2}{2n+1} & \text{se } m = n \end{cases}$$

$$\frac{(n+k)!}{(n-k)!} \frac{2\lambda_k \pi}{2n+1} A_{nk} = \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) \cos k\phi P_n^k d\mu d\phi$$

e

$$A_{nk} = \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \frac{2n+1}{2\lambda_k \pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) \cos k\phi P_n^k \sin \theta d\theta d\phi$$

e

$$B_{nk} = \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \frac{2n+1}{2\lambda_k \pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) \sin k\phi P_n^k \sin \theta d\theta d\phi.$$

Seja  $u$  harmônica em  $\Omega$  e  $B(x_0, a) \subset \Omega$ ,  $x_0 \in \Omega$ . Pela representação de Poisson

$$u(x, y, z) = \frac{a}{4\pi} (a^2 - r^2) \int \int \frac{f(\omega) d\omega}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \gamma)^{3/2}},$$

onde

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha \cos(\phi - \alpha)$$

com

$$(x, y, z) = (r, \theta, \phi)$$

$$a\omega = (a, \alpha, \beta).$$

Sabemos que

$$(1 - 2h \cos \gamma + h^2)^{-1/2} = \sum_0^{\infty} h^n P_n(\cos \gamma)$$

e

$$\frac{1 - h^2}{(1 - 2h \cos \gamma + h^2)^{3/2}} = \sum_0^{\infty} (2n + 1) h^n P_n(\cos \gamma).$$

Segue-se que

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int \int f(\omega) \sum_0^{\infty} (2n + 1) \frac{r^n}{a^n} P_n(\cos \gamma) d\omega,$$

$|P(\cos \gamma)| \leq 1$ . Segue-se que a série dentro da integral é absolutamente convergente para  $0 \leq r \leq b < a$  e a convergência é uniforme. Integrando termo a termo

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \sum_0^{\infty} (2n + 1) \frac{r^n}{a^n} \int \int f(\omega) P_n(\cos \gamma) d\omega,$$

$P_n$  é um polinômio de grau  $n$  em  $\cos \gamma$ , ou seja,

$$r^n \int \int f(\alpha, \beta) P_n(\cos \gamma) d\omega$$

é um polinômio homogêneo de grau  $n$  em  $x, y, z$  que satisfaz a equação de Laplace. Segue-se que  $u$  é uma série de termos polinomiais convergindo uniforme e absolutamente em  $r \leq b$ . Segue-se que  $u$  é analítica em qualquer esfera contida em  $\Omega$ .

De fato, é possível mostrar que

$$P_n(\cos \gamma) = P_n(\cos \theta) P_n(\cos \alpha) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n - m)!}{(n + m)!} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \alpha) \cos m(\phi - \beta)$$

e

$$u(x, y, z) = A_0 + \sum_1^{\infty} r^n \left\{ A_n P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n (A_n^m \cos m\phi + B_n^m \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta) \right\},$$

com

$$A_n = \frac{2n + 1}{2\pi a^n} \int_0^{\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta \sin \alpha P_n(\cos \alpha) f(\alpha, \beta),$$

$$A_n^m = \frac{2n + 1}{2\pi a^n} \frac{(n - m)!}{(n + m)!} \int_0^{\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta \sin \alpha P_n(\cos \alpha) \cos m\beta f(\alpha, \beta),$$

$$A_n^m = \frac{2n + 1}{2\pi a^n} \frac{(n - m)!}{(n + m)!} \int_0^{\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta \sin \alpha P_n(\cos \alpha) \sin m\beta f(\alpha, \beta).$$

Pela inversão podemos considerar o problema de Dirichlet em uma região exterior a uma esfera  $r = a$ . De fato,  $\frac{1}{r} u \left( \frac{a^2 x}{r^2}, \frac{a^2 y}{r^2}, \frac{a^2 z}{r^2} \right)$  é harmônica dentro da esfera  $r = a$ . Segue-se que

aplicando o resultado para o problema interior dado acima obtemos que o problema exterior tem a representação (em  $r > a$ ):

$$u(x, y, z) = \frac{A_0 a}{r} + \sum_1^{\infty} \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} \left\{ A_n P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n (A_n^m \cos m\phi + B_n^m \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta) \right\},$$

com as mesmas constantes.

Construímos soluções fundamentais para o Laplaciano

$$\begin{cases} c_n r^{2-n} & n > 2 \\ c_2 \log r & n = 2. \end{cases}$$

Em geral dizemos que  $F_n$  é uma solução fundamental se

$$\begin{cases} \Delta F_n = 0 & x \neq 0 \\ F_n \sim c_n r^{2-n} & n > 2 \\ F_2 \sim c_2 \log r & n = 2. \end{cases}$$

com

$$c_n = -\frac{1}{(n-2)\omega}, \quad \omega = \int_{|x|=1} dS$$

$$c_2 = \frac{1}{2\pi}.$$

[Em geral, no ponto  $x_0$ , tomamos  $F_{x_0} = F(x - x_0)$ ]

**Teorema:** Dados  $n > 2$  e  $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  tais que

$$\Delta u = g.$$

Então, para qualquer  $x_0 \in \Omega$ , temos que

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} F_{x_0}(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) - u(x) \frac{\partial F_{x_0}(x)}{\partial n} dS - \int_{\Omega} F_{x_0}(x) g(x) dx,$$

onde  $F_{x_0}(x)$  é uma solução fundamental para o Laplaciano no ponto  $x_0$ .

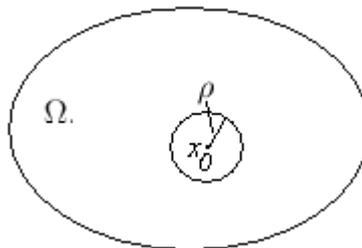


Figura 2.2:  $B(x_0, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| \leq \rho\}$ ,  $\rho$  suficientemente pequeno e  $\text{dist}(B(x_0, \rho), \partial\Omega) > 0$ ,  $B(x_0, \rho) \subset \Omega$ .

*Demonstração.* Aplicando o teorema de Green em  $B(x_0, \rho)^C \cap \Omega$ , temos que

$$\int_{B^C \cap \Omega} (F \Delta u - u \Delta F) dx = \int_{\partial \Omega} \left( F \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial F}{\partial n} \right) dS - \int_{|x-x_0|=\rho} \left( F \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial F}{\partial n} \right) dS.$$

Levando em conta que

$$F_{x_0} \sim F_x(x - x_0), \quad \text{quando } x \rightarrow x_0,$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{B^C \cap \Omega} F_{x_0} \Delta u dx &= \int_{B^C \cap \Omega} (F_{x_0} \Delta u - u \Delta F_{x_0}) dx \\ &= \int_{\partial \Omega} \left( F_{x_0} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial F_{x_0}}{\partial n} \right) dS \\ &\quad - \int_{|x-x_0|=\rho} \left( F_{x_0} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial F_{x_0}}{\partial n} \right) dS, \quad \rho \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{x_0}}{\partial n} &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \sum_{j=1}^n (2-n) \frac{x_j - x_j^0}{|x - x_0|^n} \frac{x_j - x_j^0}{|x - x_0|} \\ &= -\frac{1}{\omega_n} |x - x_0|^{-n+1}, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} - \int_{|x-x_0|=\rho} u \frac{\partial F_{x_0}}{\partial n} dS &= \frac{\rho^{-n+1}}{\omega_n} \int_{|x-x_0|=\rho} u dS \\ &= \frac{\rho^{-n+1}}{\omega_n} \rho^{n-1} \int_{S_n} u(x_0 + \rho\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{S_n} u(x_0 + \rho\omega) d\omega \\ &\sim u(x_0), \quad \rho \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \int_{|x-x_0|=\rho} F_{x_0} \frac{\partial u}{\partial n} dS &= \frac{\rho^{2-n}}{(n-2)\omega_n} \int_{|x-x_0|=\rho} \frac{\partial u}{\partial n} dS \\ &= \frac{\rho}{(n-2)\omega_n} \int_{S_n} \frac{\partial u}{\partial n}(x_0 + \rho\omega) d\omega \\ &\sim 0, \quad \rho \rightarrow 0 \quad (u \in C^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Conseqüentemente obtemos que

$$u(x_0) = \int_{\partial \Omega} \left( F_{x_0}(x) \frac{\partial u}{\partial n} - u(x) \frac{\partial F_{x_0}}{\partial n} \right) dS - \int_{\Omega} F_{x_0}(x) g(x) dx.$$

□

Agora vamos obter uma solução fundamental  $G$  dentro da bola  $B(0, r)$ , com uma propriedade adicional,

$$\begin{aligned} G &\sim F_n & x &\sim y \\ G &= 0 & |y| &= r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= F_n(x - y) - \frac{a}{(n-1)\omega_n} |y - bx|^{2-n}, & |x| \leq r, & |y| \leq r \text{ e } bx \neq y, \\ \Delta_y G &= 0 & x \neq y \text{ e } bx \neq y. \end{aligned}$$

Aqui  $x$  é um parâmetro e vamos escolher  $b$  tal que  $bx \neq y$ .

$$F_n(x - y) = a \frac{|y - bx|^{2-n}}{(n-2)\omega_n}, \quad |y| = r$$

ou

$$\frac{1}{a} |x - y|^{2-n} = |y - bx|^{2-n}, \quad |y| = r$$

ou

$$|bx - y|^2 = a^{2/(n-2)} |x - y|^2, \quad |y| = r.$$

Segue-se que

$$b^2 |x|^2 - 2b(x \cdot y) + r^2 = a^{2/(n-2)} (|x|^2 - 2(x \cdot y) + r^2)$$

ou

$$(1 - a^{2/(n-2)})r^2 = (a^{2/(n-2)} - b^2)|x|^2 + 2(b - a^{2/(n-2)})(x \cdot y).$$

Escolhendo  $b = a^{2/(n-2)}$ , obtemos que

$$(1 - b)r^2 = b(1 - b)|x|^2 \Rightarrow b = 1 \quad \text{ou} \quad b = r^2/|x|^2.$$

Vamos escolher  $b = r^2/|x|^2$  ou  $a = (r/|x|)^{n-2}$ ,

$$G(x, y) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \left[ |x - y|^{2-n} - \left( \frac{|r|}{r} \right)^{2-n} \left| \frac{r^2}{|x|^2} x - y \right|^{2-n} \right].$$

Pondo  $\rho = |x - y|$ , obtemos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial y_j} = -\frac{x_j - y_j}{\rho} \frac{\partial}{\partial y_j} \rho^{2-n} = (n-2)\rho^{1-n} \frac{x_j - y_j}{\rho},$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j} |x - y|^{2-n} = \frac{n-2}{|x - y|^n} (x_j - y_j)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_j} G &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \left[ \frac{\partial}{\partial y_j} |x - y|^{2-n} - \left( \frac{|x|}{r} \right)^{2-n} \frac{\partial}{\partial y_j} \left| \frac{r^2}{|x|^2} x - y \right|^{2-n} \right] \\ &= \frac{1}{\omega_n} \left[ \frac{x_j - y_j}{|x - y|^n} - \left( \frac{|x|}{r} \right)^{2-n} \frac{\frac{r^2}{|x|^2} x_j - y_j}{\left| \frac{r^2}{|x|^2} x - y \right|^n} \right]. \end{aligned}$$

Quando  $|y| = r$ ,

$$|x - y| = \frac{|x|}{r} \left| \frac{r^2}{|x|^2} x - y \right| \quad (\text{de } G = 0, \quad |y| = r)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y_j} G = \frac{|x|^2 - r^2}{\omega_n |x - y|^n} \frac{y_j}{r^2}, \quad n_j = \frac{y_j}{r^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial n} G = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j} G n_j = \frac{|x|^2 - r^2}{\omega_n |x - y|^n}$$

e finalmente temos a expressão

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{r\omega_n} \int_{|y|=r} \frac{u(y)}{|x - y|^n} dS_y - \int_{|y|\leq r} G(x, y) g(y) dy.$$

Esta fórmula de representação sugere o teorema seguinte:

**Representação de Poisson:** *Seja  $f(x) \in C(S(0, r))$ , então a função definida por*

$$u(x) = \begin{cases} \frac{r^2 - |x|^2}{r\omega_n} \int_{|y|=r} \frac{f(y)}{|x - y|^n} dS & |x| < r \\ f(x) & |x| = r \end{cases}$$

*pertence a  $C(\overline{B(0, r)}) \cap C^2(B(0, r))$  e é a solução do problema de Dirichlet em  $B(0, r)$*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & |x| < r \\ u &= f & |x| = r \end{aligned} \quad (2.18)$$

*Demonstração.* Se  $|x| < r$  e  $y \in \bar{\Omega}$  e tal que  $|y| = r$ ,  $|x - y| \neq 0$  e podemos calcular que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{r^2 - |x|^2}{|x - y|^n} \right) = (r^2 - |x|^2) \frac{\partial}{\partial x_j} (|x - y|^{-n}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (r^2 - |x|^2) |x - y|^{-n}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left( \frac{r^2 - |x|^2}{|x - y|^n} \right) &= (r^2 - |x|^2) \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (|x - y|^{-n}) + \\ &+ 2 \frac{\partial}{\partial x_j} (r^2 - |x|^2) \frac{\partial}{\partial x_j} |x - y|^{-n} + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (r^2 - |x|^2) |x - y|^{-n}. \end{aligned}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} \Delta \left( \frac{r^2 - |x|^2}{|x - y|^n} \right) &= (r^2 - |x|^2) \Delta |x - y|^{-n} + \\ &+ \Delta (r^2 - |x|^2) |x - y|^{-n} + 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (r^2 - |x|^2) \frac{\partial}{\partial x_j} |x - y|^{-n}. \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} (r^2 - |x|^2) &= -2x_j \\ \Delta (r^2 - |x|^2) &= -2x. \end{aligned}$$

Também

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_j}|x-y|^{-n} &= -\frac{n(x_j-y_j)}{|x-y|^{n+2}} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}|x-y|^{-n} &= -n \left[ (x_j-y_j) \left( -\frac{(n+2)(x_j-y_j)}{|x-y|^{n+4}} \right) + |x-y|^{-n-2} \right]\end{aligned}$$

e

$$\Delta|x-y|^{-n} = \frac{2n}{|x-y|^{n+2}}.$$

Conseqüentemente calculamos que

$$\Delta \left( \frac{r^2 - |x|^2}{|x-y|^n} \right) = \frac{1}{|x-y|^{n+2}} [2n(r^2 - |x|^2) - 2n|x-y|^2 + 4n(|x|^2 - x \cdot y)] = 0.$$

Isto implica que  $\Delta u = 0$  para  $|x| < r$ . Observamos que  $v \equiv 1$  em  $B(0, r)$  é a solução de  $\Delta v = 0$  em  $\Omega$  com  $v(x) = 1$  sobre  $\delta B(0, r)$ . Neste caso a fórmula de Poisson dá

$$1 = \frac{r^2 - |x|^2}{r\omega_n} \int_{|y|=r} \frac{1}{|x-y|^n} dS. \quad (2.19)$$

Sejam  $\rho > 0$ ,  $\rho < \frac{r}{2}$ ,  $x_0 \in S(0, r)$  e  $x \in B(0, r)$  tal que  $|x - x_0| < \frac{\rho}{2}$ . Utilizando a fórmula de Poisson para  $u(x)$  segue-se que

$$\begin{aligned}u(x) - f(x_0) &= \frac{r^2 - |x|^2}{r\omega_n} \int_{|y|=r} \frac{f(y) - f(x_0)}{|x-y|^n} dS \\ &= \frac{r^2 - |x|^2}{r\omega_n} \left( \int_{\Sigma_1} \frac{f(y) - f(x_0)}{|x-y|^n} dS + \int_{\Sigma_2} \frac{f(y) - f(x_0)}{|x-y|^n} dS \right),\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{y \in \mathbb{R}^n; |y| = r\} \cap \{y \in \mathbb{R}^n; |y - x_0| \leq \rho\} \\ \Sigma_2 &= \{y \in \mathbb{R}^n; |y| = r\} \cap \{y \in \mathbb{R}^n; |y - x_0| > \rho\}.\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}\left| \frac{r^2 - |x|^2}{r\omega_n} \int_{\Sigma_1} \frac{f(y) - f(x_0)}{|x-y|^n} dS \right| &\leq \frac{r^2 - |x|^2}{r\omega_n} \max_{y \in \Sigma_1} |f(y) - f(x_0)| \int_{\Sigma_1} \frac{dS}{|x-y|^n} \\ &\leq \max_{y \in \Sigma_1} |f(y) - f(x_0)|\end{aligned}$$

utilizando 2.19. Se  $y \in \Sigma_2$  e  $|x - x_0| \leq \frac{\rho}{2}$ , temos

$$|x-y| \geq |y-x_0| - |x-x_0| \geq \rho - \frac{\rho}{2} = \frac{\rho}{2}$$

e

$$\frac{r^2 - |x|^2}{|x-y|^n} = \frac{(r-|x|)(r+|x|)}{|x-y|^n} \leq \frac{2r(r-|x|)}{\left(\frac{\rho}{2}\right)^n}.$$

Segue-se que,

$$\left| \frac{r^2 - |x|^2}{r\omega_n} \int_{\Sigma_2} \frac{f(y) - f(x_0)}{|x-y|^n} dS \right| = \frac{4\|f\|_{L^\infty S((0,r))} r^{n-1}}{\left(\frac{\rho}{2}\right)^n} (r-|x|)$$

e finalmente que

$$|u(y) - f(x_0)| \leq \max |f(y) - f(x_0)| + 4\|f\|_{L^\infty S(0,r)} \frac{r^{n-1}}{\left(\frac{\rho}{2}\right)^n} (r - |x|).$$

Dado  $\epsilon$ , claramente podemos escolher  $\rho$  e  $\delta$  tais que

$$\max_{y \in \Sigma_1} |f(y) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$4\|f\|_{L^\infty(S(0,r))} \frac{r^{n-1}}{\left(\frac{\rho}{2}\right)^n} (r - |x|) < \frac{\epsilon}{2}$$

e isto significa que  $n$  é contínua em  $\overline{B(0,r)}$  e assim  $u(x) = f(x)$  para  $|x| = r$ . □

### 2.3.2 Unicidade

Considere o problema 2.18 em uma região  $\Omega$ : Se

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= \Delta u_2 = 0 & \text{em } \Omega \\ u_1 &= u_2 = f & \text{em } \partial\Omega \end{aligned}$$

então com  $w = u_1 - u_2$ ,

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0 & \text{em } \Omega \\ w &= 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Vamos supor que  $\Omega$  é suficientemente regular para aplicação do teorema de Green. Então

$$\int_{\Omega} w \Delta w dx + \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx = \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial n} dS$$

e segue-se que

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx = 0$$

o que leva a

$$\begin{aligned} w &= \text{constante} & (\text{em } \overline{\Omega}) \\ &= 0 & (\text{pois } w = 0 \text{ em } \partial\Omega) \end{aligned}$$

### 2.3.3 \*Analiticidade

Dizemos que uma equação diferencial linear  $P$  em  $\Omega$  é hipoeĺptica se dado um aberto  $U \subset \Omega$  e uma distribuição  $u \in U$ ,  $u$  é  $C^\infty$  em  $U$  se  $Pu$  for  $C^\infty$  em  $U$ .

**Teorema 8.** (Schwartz)

*Se houver uma solução fundamental  $E$  de  $P$  que    $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^n - 0$ ,  $P(D)$    hipoeĺptica em  $\mathbb{R}^n$ .*

*Demonstração.*  $U$  aberto  $\subset \mathbb{R}^n$ .  $u$  distribuição em  $U$  tal que  $P(D)u = f \in C^\infty(U)$ ,  $x_0$  qualquer ponto de  $U$ . Basta mostrar que  $u$  é  $C^\infty$  em alguma vizinhança de  $x_0$ .  $x_0 \in U_0 \subset U$ ,  $U_0$  aberto  $\overline{U_0}$  compacto e  $g \in C_c^\infty(U)$ ,  $g = 1$  em  $U^c$ .

$$\begin{aligned} P(D)(gu) &= gP(D)u + v = gf + v \\ v &= 0 \quad \text{em } U^c \quad \text{e fora do suporte de } g \quad (\text{Leibnitz}). \end{aligned}$$

Então temos que

$$\begin{aligned} E * P(D)(gu) &= P(D)E * gu = gu \\ \text{ou } gu &= E * gf + E * v \\ gf &\in C_0^\infty, \quad E * gf \in C^\infty. \end{aligned}$$

É suficiente mostrar que  $E * v$  é  $C^\infty$  em uma vizinhança de  $x_0$ . Escolha  $\epsilon > 0$  tal que

$$V_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, \mathbb{R}^n - U) > \epsilon\}$$

em uma vizinhança de  $x_0$ . Seja

$$\zeta_\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & |x| > \epsilon \end{cases}, \quad \zeta_\epsilon(x) \in C^\infty.$$

Escrevemos

$$E * v = \zeta_\epsilon E * v + (1 - \zeta_\epsilon)E * v, \quad (1 - \zeta_\epsilon)E * v \text{ é } C^\infty \text{ em } \mathbb{R}^n$$

Pelas propriedades de convolução

$$\begin{aligned} \text{supp } \zeta_\epsilon E * v &\subset \text{supp } \zeta_\epsilon E + \text{supp } v \\ \text{supp } \zeta_\epsilon E * v &\subset \epsilon - \text{vizinhança do suporte de } v. \\ v &= 0 \quad \text{em } U^c. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\zeta_\epsilon E * v = 0 \quad \text{em } V_\epsilon \quad \text{e} \quad E * v \text{ é } C^\infty \text{ em } V_\epsilon.$$

□

**Teorema 9.** *Se existe uma solução fundamental  $E$  de  $P(D)$ ,  $P(D)$  com coeficientes constantes, que é analítica em  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ , então  $P(D)$  é analítica e hipoeleptica em  $\mathbb{R}^n$  (muda  $C^\infty \rightarrow$  analítica)*

*Demonstração.* Toma  $P(D)u = f$  analítica em  $U$ . Escolha uma vizinhança  $W$  de  $x_0$  em  $U$  suficientemente pequena. O Teorema de Cauchy-Kowaleski (veja Exemplo 4 deste capítulo) diz que  $P(D)h = f$  tem uma solução analítica em  $W$ . Então  $P(D)(u - h) = 0$  em  $W$ . Tome  $U'$  tal que  $\overline{U'} \subset W$ ,  $\overline{U'}$  compacto e  $g \in C_0^\infty(W)$  tal que  $g = 1$  em  $U^c$ . Assim  $v = P(D)g(u - h)$ ,  $g(u - h) = E * v$ . Temos que mostrar que  $E * v$  é analítica na vizinhança de  $x_0$  levando em conta que  $v = 0$  em  $U^c$ . Escrevemos que

$$\begin{aligned} E * v &= \zeta_\epsilon E * v + (1 - \zeta_\epsilon)E * v \\ &= 0 \quad V_\epsilon = \{x; d(x, \mathbb{R} - U^c) > 0\} \end{aligned}$$

$v$  é  $C^\infty$  e  $w = (1 - \zeta_\epsilon)E * v$  é  $C^\infty$ ,

$$D^\alpha w = D^\alpha(1 - \zeta_\epsilon)E * v = (1 - \zeta_\epsilon)D^\alpha E * v + T * v,$$

onde  $\text{supp } T \subset \text{supp } \nabla \zeta_\epsilon$  e  $T * v = 0$  em  $V_\epsilon$ .  $(1 - \zeta_\epsilon)D^\alpha E$  é  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^n$ .

$$D^\alpha w = \int_K (1 - \zeta_\epsilon(y))D^\alpha E(y)u(x - y)dy$$

$K = \{y \in \mathbb{R}^n; |y| \geq \frac{\epsilon}{2}, y \in \bar{V}_\epsilon - \text{supp } v\}$ .  $K$  é um compacto de  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  onde  $E$  é analítica. Obtemos

$$\frac{1}{\alpha} r_K^{|\alpha|} |D^\alpha w| \leq c \sup_{y \in K} r_K^{|\alpha|} (D^\alpha E(y)) \in |v(y)| dy \quad x \in V_\epsilon, \quad c = \sup_{\mathbb{R}^n} |\zeta_\epsilon|$$

Isso implica que  $w$  é analítica em  $V_\epsilon$ . □

**Observação 4.** *Em coordenadas esféricas*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{(n-1)}{r} \frac{\partial f}{\partial r},$$

caso  $f$  seja função de  $r$  somente. Então a relação

$$\Delta F = \delta(x) \tag{2.20}$$

é válida se

$$F(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log r, & n = 2 \\ -\frac{1}{(n-2)} \frac{1}{|S^{n-1}|} \frac{1}{r^{n-2}} & n \geq 2. \end{cases}$$

A demonstração da relação (2.20) é um cálculo. Temos que mostrar que para qualquer  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\langle F, \Delta \varphi \rangle = \langle \Delta F, \varphi \rangle = \varphi(0) \tag{2.21}$$

Observamos que

$$\begin{aligned} \langle u, \varphi \rangle &= \int u(r)\varphi(x)dx \\ &= \int \int u(r)\varphi(r\omega)r^{n-1}drd\omega \\ &= |S^{n-1}| \int_0^\infty u(r)\varphi_*(r)r^{n-1}dr, \end{aligned} \tag{2.22}$$

onde

$$\varphi_*(r) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} \varphi(rw)dw.$$

Utilizando (2.22) podemos obter de (2.21)

$$\begin{aligned}
\langle F, \Delta\varphi \rangle &= |S^{n-1}| \int_0^\infty F(r) \Delta\varphi_* r^{n-1} dr \\
&= |S^{n-1}| \int_0^\infty F(r) \left( \frac{d}{dr} + \frac{n-1}{r} \right) \frac{d\varphi_*}{dr} r^{n-1} dr \\
&= |S^{n-1}| \int_0^\infty F(r) \frac{d}{dr} (r^{n-1} \varphi'_*(r)) dr \\
&= |S^{n-1}| \left\{ [r^{n-1} F(r) \varphi'_*(r)]_0^\infty - \int_0^\infty F'(r) \varphi'_*(r) r^{n-1} dr \right\} \\
&= -|S^{n-1}| \left\{ \int_0^\infty F'(r) \varphi'_*(r) r^{n-1} dr - \int_0^\infty \varphi'_*(r) dr \right\} = \varphi_*(0) = \varphi(0).
\end{aligned}$$

Então se podemos determinar  $F(r)$  tal que

$$r^{n-1} \frac{dF}{dr} = |S^{n-1}|^{-1} \quad r > 0$$

temos que

$$\langle u, \Delta\varphi \rangle = \langle \Delta u, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Mas a escolha das funções indicadas acima faz garante precisamente isto.

**Teorema 10.** (Weyl)

O operador de Laplace é analítico e hipoelíptico.

**O cálculo de  $|S^{n-1}|$ .**

Ponhamos

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-x^2) dx \quad n \geq 1$$

$I_n = I_1^n$  e em coordenadas polares,

$$I_n = |S^{n-1}| \int_0^\infty \exp(-r^2) r^{n-1} dr.$$

Se  $n = 1$ ,  $|S^{n-1}| = 2$

$$\begin{aligned}
I_2 &= 2\pi \int_0^\infty \exp(-r^2) r dr = \pi \\
I_1 &= \sqrt{\pi} \\
\mathcal{L}I_n &= |S^{n-1}| \int_0^\infty e^{-s} s^{-1+\frac{n}{2}} ds \\
&= |S^{n-1}| \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)
\end{aligned}$$

onde

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-z} s^{z-1} ds \quad \operatorname{Re} z > 0 \quad (\text{Função de Euler})$$

$$|S^{n-1}| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Se  $n = 2p$ ,

$$|S^{2p-1}| = \frac{2\pi^p}{(p-1)!}.$$

Se  $n = 2p + 1$ ,

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(p - \frac{1}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

e

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2I_1}{|s^0|} = I_1 = \sqrt{\pi}$$

e

$$|S^{2p}| = \frac{2^{p+1}\pi^p}{1 \cdot 3 \cdots (2p-1)}.$$

### 2.3.4 Polinômios Harmônicos (sólidos)

Considere o polinômio homogêneo de grau  $n$

$$u_n = \sum_{p+q+r=n} a_{pqr} x^p y^q z^r,$$

$$a_{pqr} = \frac{1}{p!q!r!} \frac{\partial^n u_n}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}, \quad p+q+r=n.$$

Podemos reescrever  $u_n$  na forma

$$\begin{aligned} u_n &= a_{000} z^n + (a_{10(n-1)} x + a_{01(n-1)} y) z^{n-1} + \cdots + \\ &+ (a_{(n-1)00} x^{n-1} + a_{(n-2)10} x^{n-2} y + \cdots + a_{0(n-1)0} y^{n-1}) z + \\ &+ (a_{n00} x^n + a_{(n-1)10} x^{n-1} y + \cdots + a_{0n0} y^n), \end{aligned}$$

$z^n$  tem um coeficiente,  $z^{n-1}$  tem dois, até  $z^0$  tem  $n+1$ . Conseqüentemente, o total de coeficiente é  $1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ . No caso  $\Delta u_n = 0$ , há relações entre os coeficientes.

$\Delta u_n$  é um polinômio homogêneo de grau  $n-2$ , portanto tem no máximo  $\frac{n(n-1)}{2}$  termos independentes. Assim, o polinômio  $u_n$  deverá ter pelo menos  $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = 2n-1$  termos independentes.

Observe que

$$\begin{aligned} a_{pqr} &= \frac{1}{p!q!r!} \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^p \partial y^q \partial z^{r-2}} \left( \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{1}{p!q!r!} \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^p \partial y^q \partial z^{r-2}} \left( -\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} \right) \\ &= \beta_1 a_{p+2,q,r-2} + \beta_2 a_{p,q,r-2}, \quad r \geq 2. \end{aligned}$$

Iterando este processo, finalmente expressamos  $a_{pqr}$  como combinação de coeficientes da forma  $a_{pq0}$ ,  $p+q=n$  e,  $a_{pq1}$ ,  $p+q+1=n$ . O número de coeficientes do primeiro tipo é  $n+1$  e do segundo  $n$ . Segue-se que o número de polinômios harmônicos esféricos (sólidos) de grau  $n$  é exatamente  $2n+1$  e o número de polinômios harmônicos esféricos de superfície  $Y_n(\theta, \phi)$  é  $2n+1$ , dado que  $u_n = r^n Y_n(\theta, \phi)$ , um resultado obtido antes.

## 2.4 Exemplos de Problemas de Fronteira

No capítulo 1, seção 1.8, discutimos diversos problemas de fronteira e evolutivos, entre eles o problema de Dirichlet para a equação de Laplace. Será conveniente resumir resultados que estabelecemos no capítulo 1.

### 2.4.1 Gravitação

Expressando a força de Gravitação por massa em termos de um potencial  $\psi$ ,

$$F = \nabla\psi$$

e se a densidade de massa é  $\rho$ , o potencial satisfaz a equação de Poisson,

$$\Delta\psi = -4\pi\rho,$$

com as condições sobre superfície  $S$  separando duas regiões  $V_1$  e  $V_2$ ,

$$\psi_1 = \psi_2 \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial n} - \frac{\partial\psi_1}{\partial n} = -4\pi\sigma \quad (\text{Problema de Transmissão})$$

### 2.4.2 Movimento Irrotacional de um Fluido

A velocidade  $\mathbf{v}$  do fluido pode ser expressa em termos do potencial de velocidade  $\psi$ ,

$$\mathbf{v} = -\nabla\psi$$

e nos pontos onde não existem fontes sorvedouras

$$\Delta\psi = 0.$$

Numa superfície de um corpo material rígido  $S$  movimentando com velocidade  $\mathbf{U}$ , a velocidade relativa normal

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{U}) = 0.$$

Segue-se que  $\frac{\partial\psi}{\partial n} = -\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}$  em  $S$ . Isto é complementado por uma equação para a pressão: a equação de Bernoulli (seção 1.13).

### 2.4.3 Eletrostática

Um campo elétrico  $\mathbf{E}$  pode ser expresso na forma

$$\mathbf{E} = -\nabla\psi,$$

com o potencial eletrostático  $\psi$  satisfazendo a equação de Poisson

$$\Delta\psi = -4\pi\rho,$$

com  $\rho$  a densidade de carga elétrica.  $\psi$  é constante sob condutores  $S$  e

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = -4\pi\rho$$

com  $\sigma$  a densidade de carga de superfície. A carga total  $Q$  em  $S$  é dado por

$$-\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial\psi}{\partial n} d\sigma,$$

$\psi$  tem singularidades salvo em cargas isoladas ou dipolos elétricos. Perto de uma carga  $q$ ,

$$\psi \sim \frac{q}{r},$$

$r$  sendo a distância da carga  $q$ . Na vizinhança de um dipolo de momento  $\mu$  no vácuo,

$$\psi \sim \frac{\mu \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

#### 2.4.4 Dielétricos

Em dielétricos,  $\psi$  satisfaz,

$$\operatorname{div}(k\nabla\psi) = -4\pi\rho,$$

$k$  é a constante dielétrica. No caso, temos duas regiões com constantes dielétricas  $k_1$  e  $k_2$ , separadas por uma superfície  $S$

$$\operatorname{div}(k_1\nabla\psi_1) = -4\pi\rho_1,$$

$$\operatorname{div}(k_2\nabla\psi_2) = -4\pi\rho_2,$$

$$\psi_1 = \psi_2 \quad \text{e} \quad k_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial n} \quad \text{em } S$$

(novamente um problema de transmissão). Se  $S$  é um condutor

$$k_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial n} - k_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial n} = -4\pi\sigma$$

#### 2.4.5 Magnetostática

O campo magnético  $\mathbf{H}$  pode ser expresso via

$$\mathbf{H} = -\nabla\psi$$

e se  $\mu$  é a permeabilidade magnética,  $\psi$  satisfaz

$$\operatorname{div}(\mu\nabla\psi) = 0.$$

Em uma superfície  $S$  dividindo regiões magnéticas distintas com potenciais  $\psi_1$  e  $\psi_2$

$$\psi_1 = \psi_2 \quad \text{e} \quad \mu_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial n} \quad (\text{Problema de transmissão}).$$

Na vizinhança de um dipolo magnético de momento  $\mu$  em vácuo,  $\psi \sim \frac{\mu \cdot \mathbf{r}}{r^3}$ .

#### 2.4.6 Correntes Estacionárias

O vetor de corrente  $\mathbf{j}$  satisfaz

$$\mathbf{j} = -\sigma\nabla\psi,$$

$\sigma$  sendo a condutividade e  $\psi$  satisfaz

$$\operatorname{div}(\sigma\nabla\psi) = 0.$$

## 2.4.7 Fluxo de Calor

A temperatura  $T$  satisfaz no caso não dependente do tempo a equação

$$\operatorname{div}(k\nabla T) = 0,$$

com  $k$  a condutividade térmica

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -h(T - T_0)$$

com radiação da superfície em um meio com temperatura  $T_0(x)$  em  $S$ .

Vamos discutir alguns casos simples ilustrando estes problemas.

### Exemplo: fluidos

Considere em esfera rígida de raio  $a$  colocada em um fluxo de fluido (irrotacional, ideal, com divergente zero) com velocidade  $V\mathbf{k}$  a infinito. Determine a velocidade  $\mathbf{V}$  do fluido.

A velocidade  $V\mathbf{k}$  pode ser determinada pelo potencial  $\psi_1$ ,  $-\frac{\partial\psi_1}{\partial z} = V$  e  $\psi_1 = -Vz$ .

Vamos tentar resolver o problema com um potencial

$$\psi = \psi_1 + \phi = -Vz + \phi.$$

Observe que  $z = r \cos \theta$  em coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  e

$$\Delta\psi = \Delta\phi = 0.$$

Em  $r = a$ ,

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = -V \cos \theta + \frac{\partial\phi}{\partial r} = 0$$

ou

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial r} \right|_{r=a} = V \cos \theta = VP_1(\mu).$$

Vamos supor que o  $\phi \sim 0$  com  $r \rightarrow \infty$ . Tente uma solução na forma

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\mu).$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial\phi}{\partial r} \right|_{r=a} &= -(n+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{a^{n+2}} P_n(\mu) = VP_1(\mu) \\ \text{ou} \quad -\frac{2B_1}{a^3} &= V \quad \text{e} \quad B_1 = -\frac{Va^3}{2}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\phi = -\frac{Va^3}{2r^2} \cos \theta \quad \text{e} \quad \psi = -V \left( r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos \theta.$$

Segue-se que

$$V_r = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = V \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \cos\theta$$

e

$$V_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -V \left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right) \sin\theta.$$

### Exemplo: Eletrostática

Considere uma esfera insulada uniforme  $D$  de constante dielétrica  $k$  e raio  $a$  carregando em sua superfície uma carga de densidade  $P_n(\cos\theta)$ . Mostre que o interior da esfera contribui  $\frac{8\pi^2\lambda^3 a^3 kn}{(2n+1)(kn+n+1)}$  a energia eletrostática.

A energia é dada por

$$\varepsilon = \frac{k}{8\pi} \int_D |E|^2 dx \quad (\text{veja seção 1.19}).$$

Podemos calcular que

$$\varepsilon = \frac{k}{8\pi} \int_{\partial D} \psi \frac{\partial\psi}{\partial r} d\sigma, \quad E = -\nabla\psi.$$

$E = -\nabla\psi_1$  dentro de  $D$  e  $E = -\nabla\psi_2$  fora de  $D$  com potenciais que satisfazem

$$\begin{aligned} \Delta\psi_1 &= 0 & \text{em } D \\ \Delta\psi_2 &= 0 & \text{em } D^C \\ \psi_1 &\text{ é finito em } D \\ \psi_2 &\rightarrow 0 & \text{com } r \rightarrow \infty \\ \psi_1 &= \psi_2, \quad k \frac{\partial\psi_1}{\partial r} - \frac{\partial\psi_2}{\partial r} = 4\pi\lambda P_n(\cos\theta) & \text{em } r = a. \end{aligned}$$

Isto sugere que tomamos

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta) \\ &\text{e} \\ \psi_2 &= B \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta). \end{aligned}$$

A condição de transmissão indica que  $A = B$  e

$$\begin{aligned} \left(\frac{nk}{a} + \frac{n+1}{a}\right) A &= 4\pi\lambda \\ \text{ou} \\ \psi_1 &= \frac{4\pi a\lambda}{kn+n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta). \end{aligned}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{k}{8\pi} \int_D \psi \frac{\partial\psi_1}{\partial r} dS \\ &= \frac{k}{8\pi} \frac{16\pi^2 a^2 \lambda^2}{(kn+n+1)^2} \frac{n}{a} 2\pi a^2 \int_0^\pi \sin\theta P_n(\cos\theta) P_n(\cos\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Mas

$$\int_0^\pi \sin \theta |P_n(\cos \theta)|^2 d\theta = \int_{-1}^{+1} P_n(\mu)^2 d\mu = \frac{2}{2n+1},$$

por cálculos feitos anteriormente.

## 2.4.8 Coordenadas Cartesianas

Consideramos alguns outros problemas envolvendo separação de variáveis.

Considere o problema

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= 0 & 0 < x < a, & \quad 0 < y < b, & \quad 0 < z < c, \\ \psi &= 0 & \text{em } x=0, x=a, y=0, y=b & \text{ e em } z=0 \\ \psi &= f(x, y) & \text{em } z=c, & \quad 0 < x < a, & \quad 0 < y < b. \end{aligned}$$

Tentamos soluções da forma  $\psi = XYZ$ :

$$\begin{aligned} X'' &= -\frac{m^2}{a^2}X, & X(0) &= X(a) = 0, \\ Y'' &= -\frac{n^2}{b^2}Y, & Y(0) &= Y(b) = 0, \\ Z'' &= \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)Z, & Z(0) &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \psi_{mn} &= \frac{1}{2}(A_{mn}e^{\gamma_{mn}^2 z} + B_{mn}e^{-\gamma_{mn}^2 z}) \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right), \\ \gamma_{mn}^2 &= \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}. \end{aligned}$$

$Z(0) = 0$  implica em  $A_{mn} + B_{mn} = 0$  e assim

$$\psi = \sum A_{mn} \sinh(\gamma_{mn} z) \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right).$$

A condição de fronteira  $\psi(x, y, c) = f(x, y)$  implica que

$$f(x, y) = \sum A_{mn} \sinh(\gamma_{mn} c) \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right).$$

Utilizando as condições de ortogonalidade das funções trigonométricas,

$$\frac{4}{\lambda} \int_0^\lambda \sin\left(\frac{\pi m \theta}{\lambda}\right) \sin\left(\frac{\pi m' \theta}{\lambda}\right) d\theta = \delta_{mm'}, \quad \lambda > 0$$

segue-se que

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \operatorname{csc}(\gamma_{mn} c) \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) dx dy$$

e

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \sinh(\gamma_{mn} z).$$

### 2.4.9 Equação de Laplace em Coordenadas Cilíndricas

Considere a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ ,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0.$$

Observe que esta equação tem soluções da forma

$$R(r)e^{\pm mz}e^{in\theta},$$

com  $R(r)$  satisfazendo a equação de Bessel

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(m^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) R = 0,$$

com soluções linearmente independente  $J_n(mr)$  e  $N_n(mr)$  (as funções de Bessel e Neumann).

Assim, podemos formar combinações lineares

$$R = \sum_m \sum_n (A_{mn} J_n(mr) + B_{mn} N_n(mn)).$$

Observe que  $N_n(mr) \rightarrow \infty$  com  $r \rightarrow 0$ . No caso que tratamos com problemas em qual  $\psi$  é limitada em  $r = 0$  é necessário que  $B_{mn} = 0$ . No caso de problemas com simetria em volta do eixo  $z$ , podemos tomar  $n = 0$  e considerar soluções na forma  $\psi = \sum A_m J_0(mr)e^{-mz}$ , supondo  $\psi \rightarrow 0$  com  $r \rightarrow 0$  e  $z \rightarrow \infty$ .

### Exemplo

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= 0 \quad \text{em } 0 \leq r \leq 1, z \geq 0 \\ \psi &\rightarrow 0 \quad \text{com } z \rightarrow \infty \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\psi = 0 \quad \text{em } r = 1 \tag{2.24}$$

$$\psi = f(r) \quad \text{em } z = 0, 0 \leq r \leq 1. \tag{2.25}$$

(2.23) e (2.24) são satisfeitas por soluções da forma

$$\psi(r, z) = \sum A_m J_0(\lambda_m r) e^{-\lambda_m z},$$

com  $\lambda_m$  satisfazendo  $J_0(\lambda_m) = 0$ . Assim,

$$f(r) = \sum_m A_m J_0(\lambda_m r)$$

e da teoria de funções de Bessel (veja Tichonov Samarsky, Apêndice D)

$$A_m = \frac{z}{J_1(\lambda)^2} = \int_0^1 r f(r) J_0(\lambda r) dr.$$

## 2.4.10 Exemplo

Considere o problema

$$\Delta u = -4\pi\rho \quad x \in D$$

$$Bu = f \quad x \in \partial D \quad (\text{Condição de Fronteira})$$

Aqui

$$Bu = \begin{cases} u & \text{Dirichlet} \\ \frac{\partial u}{\partial n} & \text{Neumann} \\ \frac{\partial u}{\partial n} + hu & \text{Robin} \end{cases}$$

Para fixar as idéias consideramos o problema de Dirichlet não homogênea

$$\Delta u = -4\pi\rho \quad x \in D$$

$$u = f \quad x \in \partial D.$$

Sabemos via a teoria potencial (veja capítulo 1, seção 1.10) que

$$u_\rho(x) = \int_V \frac{\rho(y)dy}{|x-y|}$$

resolve a equação

$$\Delta u_\rho = -4\pi\rho.$$

Introduza  $w = u - u_\rho$ , observe que

$$\Delta w = -4\pi\rho \quad x \in D$$

$$w = f - u_\rho \quad x \in \partial D.$$

Agora, considerando o caso particular com

$$D = \{x; 0 < a < b\}, \quad \partial D = S(0, a) \cup S(0, b)$$

e

$$f = f_1, \quad \text{em } S(0, a) \quad \text{e} \quad f = f_2, \quad \text{em } S(0, b).$$

Segue-se que

$$w = w_1 = f_1 - u_\rho|_{r=a} \quad \text{em } r = a$$

$$w = w_2 = f_2 - u_\rho|_{r=b} \quad \text{em } r = b$$

Passando para coordenadas esféricas,

$$z = r \cos \theta, \quad x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$w_1 = w_1(a, \theta, \phi), \quad w_2 = w_2(b, \theta, \phi).$$

Sabemos que deveríamos buscar a solução  $w$  na forma

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^n (A_{nm}^1 \cos m\phi + B_{nm}^1 \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} \sum_{m=0}^n (A_{nm}^2 \cos m\phi + B_{nm}^2 \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta).$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}
w_1(a, \theta, \phi) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sum_{m=0}^n (A_{nm}^1 \cos m\phi + B_{nm}^1 \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta) + \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} a^{-(n+1)} \sum_{m=0}^n (A_{nm}^2 \cos m\phi + B_{nm}^2 \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (a^n A_{nm}^1 + a^{-(n+1)} A_{nm}^2) \cos m\phi P_n^m(\cos \theta) + \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (a^n B_{nm}^1 + a^{-(n+1)} B_{nm}^2) \sin m\phi P_n^m(\cos \theta)
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
w_1(a, \theta, \phi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n w_{1,nm}^c \cos m\phi P_n^m(\cos \theta) + \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n w_{1,nm}^s \sin m\phi P_n^m(\cos \theta)
\end{aligned}$$

e obtemos:

$$\begin{aligned}
w_{1,nm}^c &= a^n A_{nm}^1 + a^{-(n+1)} A_{nm}^2 \\
w_{1,nm}^s &= a^n B_{nm}^1 + a^{-(n+1)} B_{nm}^2.
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
w_{2,nm}^c &= b^n A_{nm}^1 + b^{-(n+1)} A_{nm}^2 \\
w_{2,nm}^s &= b^n B_{nm}^1 + b^{-(n+1)} B_{nm}^2.
\end{aligned}$$

Assim, temos as equações para determinar  $A$  e  $B$ :

$$\begin{pmatrix} a^n & a^{-(n+1)} \\ b^n & b^{-(n+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{nm}^1 \\ A_{nm}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{1,nm}^c \\ w_{2,nm}^c \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} a^n & a^{-(n+1)} \\ b^n & b^{-(n+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{nm}^1 \\ B_{nm}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{1,nm}^s \\ w_{2,nm}^s \end{pmatrix}$$

levando a

$$\begin{pmatrix} A_{nm}^1 \\ A_{nm}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & a^{-(n+1)} \\ b^n & b^{-(n+1)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} w_{1,nm}^c \\ w_{2,nm}^c \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} B_{nm}^1 \\ B_{nm}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & a^{-(n+1)} \\ b^n & b^{-(n+1)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} w_{1,nm}^s \\ w_{2,nm}^s \end{pmatrix}$$

Isto é evidentemente a metodologia geral para resolver estes problemas. Em casos específicos é mais fácil obter a solução  $u_\rho$  por inspeção. Considere, por exemplo, o caso  $4\pi\rho = x^2 + z^2$  e  $u = 0$  em  $\partial D$ . Então,

$$\begin{aligned}
w &= u - u_\rho = u + \left( \frac{x^4}{12} + \frac{z^4}{12} \right) \\
w|_{\partial D} &= \frac{x^4}{12} + \frac{z^4}{12} \Big|_{\partial D}
\end{aligned}$$

Fazendo,

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi, & z &= r \cos \theta, \\x^4 &= r^4 \sin^4 \theta \cos^4 \phi, & z^4 &= r^4 \cos^4 \theta.\end{aligned}$$

Sabendo que

$$\cos 2\phi = 2 \cos^2 \phi - 1$$

então

$$\cos^2 \phi = \frac{1 + \cos 2\phi}{2}$$

ou seja,

$$\cos^4 \phi = \left( \frac{1 + \cos 2\phi}{2} \right)^2 = \frac{1 + 2 \cos 2\phi + (\cos 2\phi)^2}{4}$$

Precisamos calcular

$$f = \sin^4 \theta \cos^4 \phi + \cos^4 \theta$$

em termos de  $P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi$ , dando  $w_1 = \frac{1}{12}a^4 f$  e  $w_2 = \frac{1}{12}b^4 f$ . Para isso, observamos que

$$\begin{aligned}1 &= \frac{1}{105} \frac{d^n P_n}{d\mu^n} \\1 &= \frac{1}{3} \frac{d^2 P_2}{d\mu^2} \\ \mu^2 &= \left( \frac{15}{2} \frac{d^2 P_2}{d\mu^2} + \frac{d^2 P_4}{d\mu^2} \right) \frac{1}{35} \\ \mu^2 &= \frac{1}{35} \frac{d^2 P_4}{d\mu^2} + \frac{1}{42} \frac{d^2 P_2}{d\mu^2}.\end{aligned}$$

Primeiro, observe que

$$\begin{aligned}\mu^4 &= \frac{8}{35} P_4 + \frac{6}{7} \left( \frac{2P_2 + P_0}{3} \right) - \frac{3}{35} P_0 \\ &= \frac{8}{35} P_4 + \frac{4}{7} P_2 + \frac{1}{5} P_0 \\ \mu^2 &= \frac{2P_2 + P_0}{3} \\ (1 - \mu^2)^2 &= 1 - 2\mu^2 + \mu^4 \\ &= P_0 - 2 \left( \frac{2P_2 + P_0}{3} \right) + \left( -\frac{4}{3} + \frac{4}{7} \right) P_2 + \frac{8}{35} P_4 \\ &= \frac{8}{15} P_0 - \frac{16}{21} P_2 + \frac{8}{35} P_4 \\ \cos^4 \phi &= \frac{1 + 2 \cos \phi + \frac{1 + \cos 4\phi}{2}}{2} \\ &= \frac{3}{4} + \cos 2\phi + \frac{1}{4} \cos 4\phi.\end{aligned}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}
\sin^4 \theta \cos^4 \phi &= \frac{3}{4} \sin^4 \theta + \sin^4 \theta \cos 2\phi + \frac{1}{4} \sin^4 \theta \cos 4\phi \\
&= \frac{3}{4} (1 - \mu^2)^2 + (1 - \mu^2) \sin^2 \theta \cos 2\phi + \frac{1}{4} \sin^4 \theta \sin 4\phi \\
&= \frac{3}{4} \left( \frac{8}{15} P_0 - \frac{16}{21} P_2 + \frac{8}{35} P_4 \right) + \\
&+ \left( \frac{1}{3} \frac{d^2 P_2}{d\mu^2} - \frac{1}{35} \frac{d^2 P_4}{d\mu^2} - \frac{5}{\mu^2} \frac{d^2 P_2}{d\mu^2} \right) \sin^2 \theta \cos 2\phi + \\
&+ \frac{1}{420} \frac{d^4 P_4}{d\mu^4} \sin^4 \theta \cos 4\phi \\
&= \frac{2}{5} P_0(\mu) - \frac{4}{7} P_2(\mu) + \frac{6}{35} P_4(\mu) + \frac{3}{14} P_2^{(2)}(\mu) \cos 2\phi \\
&- \frac{1}{35} P_2^{(4)}(\mu) \cos 2\phi + \frac{1}{420} P_4^{(4)}(\mu) \cos 4\phi \\
f &= \sin^4 \theta \cos^4 \phi + \cos^4 \theta \\
&= \frac{3}{5} P_0(\mu) + \frac{1}{5} P_4(\mu) + \frac{2}{7} P_4(\mu) + \frac{3}{14} P_2^{(2)}(\mu) \cos 2\phi - \frac{1}{35} P_4^{(2)}(\mu) \cos 2\phi + \\
&+ \frac{1}{420} P_4^{(4)}(\mu) \cos 4\phi.
\end{aligned}$$

Segue-se que temos de calcular coeficientes para  $n = 0, m = 0$ ;  $n = 4, m = 0$ ;  $n = 2, m = 2$ ;  $n = 4, m = 2$ ;  $n = 4, m = 4$ , via

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A_{00}^1 \\ A_{00}^2 \end{pmatrix} &= \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1} \\ 1 & b^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{a^4}{12} \\ \frac{b^4}{12} \end{pmatrix}; & \quad \begin{pmatrix} A_{22}^1 \\ A_{22}^2 \end{pmatrix} &= \frac{3}{14} \begin{pmatrix} 1 & a^{-5} \\ 1 & b^{-5} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{a^2}{12} \\ \frac{b^2}{12} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} A_{40}^1 \\ A_{40}^2 \end{pmatrix} &= \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 1 & a^{-9} \\ 1 & b^{-9} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}; & \quad \begin{pmatrix} A_{42}^1 \\ A_{42}^2 \end{pmatrix} &= -\frac{1}{35} \begin{pmatrix} 1 & a^{-9} \\ 1 & b^{-9} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} A_{44}^1 \\ A_{44}^2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{420} \begin{pmatrix} 1 & a^{-9} \\ 1 & b^{-9} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

### 2.4.11 \*O espectro do átomo de Hidrogênio

Na discussão dada no capítulo 1, seção 1.23, introduzimos a equação de Schrödinger em um campo potencial radial  $V(r)$ . No caso  $V(r) = -\frac{ze^2}{r}$  examinamos a existência de estados  $\chi$  correspondendo a energia negativa  $E < 0$ . No caso  $z = 1$ , temos o caso do átomo de hidrogênio. Os resultados dependem essencialmente sobre a teoria de polinômios generalizados de Laguerre  $L_q^s(p)$  que satisfazem a equação

$$\rho(L_q^s)'' + (s + 1 - \rho)(L_q^s)' + (q - s)(L_q^s) = 0.$$

Lembramos que a equação satisfeita por  $\chi$  é

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\chi}{dr} \right) - \frac{Ze^2}{r} \chi + \frac{e(e+1)\hbar}{2\mu r^2} \chi = E\chi, \quad E < 0, \quad 0 < r < \infty.$$

No que segue é conveniente definir

$$\alpha^2 = \frac{8\mu(E)}{\hbar}, \quad \lambda = \frac{2\mu Ze^2}{\alpha\hbar^2} = \frac{Ze^2}{\hbar} \left( \frac{\mu}{2|E|} \right)^{1/2}, \quad \rho = \alpha r,$$

para reescrever a equação na forma

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{d\chi}{d\rho} \right) + \left( \frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{\psi} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right) \chi = 0, \quad 0 < \rho < \infty.$$

Análise assintótica e outras considerações motivam a introdução de uma nova variável dependente  $L(\rho)$  via

$$\chi(\rho) = \rho^l e^{-\rho/2} L(\rho),$$

que satisfaz a equação

$$\rho L'' + (2(\rho+1) - \rho)L' + (\lambda - l - 1)L = 0.$$

Se fazemos a identificação  $s = 2l + 1$ ,  $\lambda = n$  e  $q = n + l$ , a solução  $\chi$  tem a forma

$$\chi_{nl} = \rho^l e^{-\rho/2} L_{n+l}^{2l+1}(\rho).$$

Lembramos que os polinômios de Laguerre satisfazem as relações de ortogonalidade

$$\int_0^\infty L_n^s(x) L_m^s(x) e^{-x} x^s dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \quad s > -1 \\ \frac{\Gamma(n+s+1)}{n!} & m = n \end{cases}.$$

Conseqüentemente, nosso caso dará

$$\int_0^\infty e^{-\rho} \rho^{2l} (L_{n+l}^{2l+1}(\rho))^2 \rho^2 d\rho = \frac{2n(n+l)^3}{(n-l-1)!}$$

e as autofunções normalizadas de energia são dadas por

$$\begin{aligned} \psi_{nlm}(r, \theta, \phi) &= \chi_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \\ \chi_{nl}(r) &= - \left\{ \left( \frac{2Z}{na_0} \right)^3 \frac{n-l-1}{2n((n+l)!)^3} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} L_{n+l}^{2l+1}(\rho) \\ a_0 &= \frac{\hbar^2}{\mu e^2}, \quad \rho = \frac{2Z}{na_0} r. \end{aligned}$$

Os níveis de energia são dados por

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4}{2a_0 n^2}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \chi_{10}(r) &= \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} 2e^{-\frac{Zr}{a_0}} \\ \chi_{20}(r) &= \left( \frac{Z}{2a_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left( 2 - \frac{Zr}{a_0} \right) e^{-\frac{Zr}{2a_0}} \\ \chi_{21}(r) &= \left( \frac{Z}{2a_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{Zr}{a_0 \sqrt{3}} e^{-\frac{Zr}{2a_0}}. \end{aligned}$$

Finalmente observamos que os níveis de energia dependem somente de  $n$  e são degenerados com respeito a  $l$  e  $m$ . De fato,  $l$  pode variar de 0 a  $n - 1$  e para cada valor de  $l$ ,  $m$  pode variar de  $-l$  a  $l$ . Segue-se que

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = 2 \frac{n(n-1)}{2} + n = n^2.$$

Esta degeneração foi obtida no capítulo 1 utilizando técnicas qualitativas, mas a forma explícita de  $E_n$  depende evidentemente de uma análise mais profunda<sup>1</sup>.

O leitor deveria consultar para mais detalhes os livros de Schiff, Merzbacher e Weyl referenciados na seção 1.23 e como uma referência geral o livro de Tychonov e Semarsky é recomendado.

## 2.5 Equação do Calor

Tipicamente a equação de difusão satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{1}{\rho c} \operatorname{div}(k \nabla \theta) + F(x, t), \quad x \in D, \quad t > 0 \\ &= L\theta + F(x, t) \\ B\theta &= \frac{\partial \theta}{\partial n} + h\theta = \theta_0(x, t) \quad x \in \partial D \quad t > 0, \\ \theta(x, 0) &= \theta_0(x), \quad x \in D, \end{aligned}$$

com solução  $\theta(x, t)$ . Podemos associar com este problema o problema auxiliar

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= L\theta + F(x, s), \quad x \in D, \quad t > 0, \\ B\theta &= \theta_0(x, s) \quad x \in \partial D \quad t > 0, \\ \theta(x, 0) &= \theta_0(x), \quad x \in D, \end{aligned}$$

com solução  $\theta(x, t, s)$ ,  $t > 0$ . Observe que a condição de fronteira é

$$B\theta = \begin{cases} \theta_0(x, s), & t > s \\ 0 & 0 < t < s \end{cases}$$

tem a solução  $\theta(x, t - s, s)$ ,  $t > s$ . Considere o problema de fronteira,  $s' > s$ ,

$$B\theta = \begin{cases} 0 & 0 < t < s \\ \theta_0(x, s) & s < t < s' \\ 0 & t > s' \end{cases}.$$

Pela linearidade este problema tem a solução

$$\begin{aligned} \theta &= \theta(x, t - s, s) - \theta(x, t - s', s') \quad t > s' \\ &\sim \frac{\partial \theta(x, t - s, s)}{\partial t} (s' - s) \sim \frac{\partial \theta(x, t - s)}{\partial t} \Delta t. \end{aligned}$$

Somando as contribuições obtemos no limite

$$\theta = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \theta(x, t - s, s) ds,$$

<sup>1</sup>Métodos mais avançados de simetria de grupos poderão dar resultados equivalentes aqueles obtidos para o oscilador harmônico utilizando técnicas de álgebra de Lie (veja o livro de Gilmore citado na seção 1.23)

a conhecida fórmula de Duhamel.

Suponha que o problema

$$\begin{aligned} L\theta &= 0 \quad x \in D \\ B\theta &= \theta_0(x, s) \quad x \in \partial D \end{aligned}$$

tem a solução  $\theta_1(x, s)$ , então  $\Theta = \theta(x, t, s) - \theta_1(x, s)$  resolve

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= L\Theta + F(x, s) \\ B\Theta &= 0 \\ \Theta(x, 0, s) &= \theta_0(x) - \theta_1(x, s). \end{aligned}$$

Este último problema reduz a resolução de dois problemas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_1}{\partial t} &= L\Theta_1 \\ B\Theta_1 &= 0 \\ \Theta_1(x, 0, s) &= \theta_0(x) - \theta_1(x, s). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_2}{\partial t} &= L\Theta_1 + F(x, s) \\ B\Theta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente, concluímos argumentando como anteriormente da fórmula de Duhamel que

$$\theta(x, t) = \theta_1(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \Theta_1(x, t-s, s) ds + \int_0^t \Theta_2(x, t-s, s) ds.$$

### 2.5.1 Regiões Infinitas: Heurísticas

Temos estabelecido na discussão em capítulo 1, seção 1.24, que a função

$$u(x, y, t - t_0) = \frac{Q}{c\rho\sqrt{4\pi^2 a^2(t - t_0)}} \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{4a^2(t - t_0)}\right)$$

é a temperatura em  $x$  no tempo  $t$  correspondendo a uma quantidade de calor  $Q = c\rho$  localizada no ponto  $y$  no tempo inicial  $t_0$ .

Consideramos uma distribuição inicial no tempo  $t_0$  de temperatura  $T_{t_0}(y) = f(y)$ ,  $y \in (-\infty, \infty)$ . Suponha que

$$R^1 = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} [y_j, y_j + \Delta y_j].$$

Então em cada intervalo  $[y_j, y_j + \Delta y_j)$ , se  $\Delta y_j$  é pequeno, há uma correspondente distribuição inicial de calor  $c\rho T_{t_0}(y_j)\Delta y_j$  e pelo princípio de superposição de efeitos aplicáveis aos problemas lineares uma resultante contribuição a temperatura

$$T_j(x, t) = T_{t_0}(y_j)\Delta y_j \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t - t_0)}} \exp\left[-\frac{(x - y_j)^2}{4a^2(t - t_0)}\right] \Delta y_j.$$

A temperatura final

$$\begin{aligned} T(x, t) &\sim \sum T_{t_0}(y_j) \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t-t_0)}} \exp\left(-\frac{(x-y_j)^2}{4a^2(t-t_0)}\right) \Delta y_j \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t-t_0)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-t_0)}\right) f(y) dy. \end{aligned}$$

Este argumento heurístico sugere que a temperatura é dado por

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t-t_0)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-t_0)}\right) f(y) dy.$$

A convolução de duas funções  $f$  e  $g$  definidas em  $(-\infty, \infty)$  é dado por

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

Defina  $G(x, t)$  por

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right),$$

então

$$T(x, t) = (G(\cdot, t) * f(\cdot))(x). \quad (2.26)$$

É possível demonstrar com rigor que (2.26) resolve o problema de evolução

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0 \\ T(x, t)|_{t=0} &= f(x). \end{aligned}$$

Já discutimos em termos gerais a resolução de diversos problemas de fronteira e evolução para a equação do calor utilizando a fórmula de Duhamel e aqui fazemos alguns cálculos específicos envolvendo a região  $[0, \infty)$ .

Primeiro é fácil verificar que se  $f(y) = -f(-y)$  e

$$T(x, t) = (G(\cdot, t) * f(\cdot))(x),$$

então  $T(0, t) = 0$  e  $T(x, 0) = f(x)$ . Mas

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} f(y) dy + \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} f(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_0^{\infty} \left( e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4a^2 t}} \right) f(y) dy, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0 \\ T(x, 0) &= f(x) \\ T(0, t) &= 0. \end{aligned}$$

Se a condição inicial é tomada no tempo  $t = s$ ,

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t-s)}} \int_0^{\infty} \left( e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4a^2(t-s)}} \right) f(y) dy, \quad x \in (0, \infty), \quad t > s, \\ T(x, s) &= f(x) \\ T(0, t) &= 0. \end{aligned}$$

Agora, observe se  $f(y) = \mu_0 = \text{constante}$

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \mu_0 \Phi \left( \frac{x}{\sqrt{4a^2(t-s)}} \right) \\ T(x, s) &= \mu_0 \\ T(0, t) &= 0. \end{aligned}$$

Segue-se que

$$\Theta = \mu_0 - \mu_0 \Phi \left( \frac{x}{\sqrt{4a^2(t-s)}} \right)$$

satisfaz as condições de fronteira e inicial

$$\Theta(x, s) = 0 \quad \text{e} \quad \Theta(0, t) = \mu_0 \quad t > s.$$

Prosseguindo como em seção anterior

$$\Theta(x, s) = \int_0^t \frac{\partial \Theta}{\partial t}(x, t-s) \mu(s) ds.$$

Também, modificando levemente a análise não é difícil estabelecer que o problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0 \\ T(x, 0) &= 0 \quad T(0, t) = 0. \end{aligned}$$

tem solução

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}} \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \left\{ e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4a^2(t-s)}} \right\} f(y, s) dy ds.$$

## 2.5.2 A equação do calor em separação de variáveis

Considere o problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= k\Delta T, \quad x \in D \quad t > 0 \\ T(x, 0) &= T_0(x), \quad x \in D \\ T(x, t) &= T_b(x), \quad x \in \partial D, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Suponha que temos uma solução  $T_D$  do problema

$$\begin{aligned} \Delta T &= 0, \quad x \in D \\ T &= T_b, \quad x \in \partial D. \end{aligned}$$

e introduza  $\Theta = T - T_D$ . Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= k\Delta \Theta, \quad x \in D, \quad t > 0 \\ \Theta(x, 0) &= \Theta_0(x) = T_0(x) - T_D(x), \quad x \in D \\ \Theta(x, t) &= 0 \quad x \in \partial D. \end{aligned}$$

Vamos procurar soluções na forma

$$\Theta = \psi e^{-k\lambda^2 t},$$

então

$$\begin{aligned} -\Delta\psi &= k\lambda^2\psi \\ \psi &= 0 \quad \text{em} \quad \partial D. \end{aligned}$$

Suponha que este problema tem uma solução

$$-\Delta\psi_n = k\lambda_n^2\psi_n,$$

com funções  $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$  ortonormais em  $L^2(D)$ , então buscamos a solução para  $\Theta$  na forma

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n e^{-k\lambda_n^2 t}$$

satisfazendo

$$\Theta_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n$$

com

$$a_n = (\Theta_0, \psi_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Concretamente, considere o problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= k\Delta T, \quad 0 < r < \infty, \quad t > 0 \\ T(x, 0) &= f(r, \theta) \\ T(x, t) &= 0 \quad r = a. \end{aligned}$$

Buscamos soluções independentes de  $\phi$  ( $m = 0$ ), portanto envolvendo somente  $P_n(\mu)$  e  $R(r)$ ,

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left( \lambda^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) R = 0$$

é satisfeita por funções de Bessel

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)(\lambda r)^{-\frac{1}{2}}.$$

A condição de fronteira força a condição

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda a) = 0$$

satisfeita por valores  $\lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \dots, \lambda_{ni} \rightarrow \infty, \lambda_n > 0$ .

Assim, a solução pode ser tomada na forma

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} (\lambda_{nm} r)^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{nm} r) P_n(\cos \theta) e^{-k\lambda_{nm}^2 t}.$$

Utilizando as relações de ortonormalidade dos polinômios de Legendre e funções de Bessel concluímos que

$$c_{nm} = \frac{(2n+1)\lambda_{nm}^{\frac{1}{2}}}{a^2 (J'_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{nm} a))^2} \int_0^a r^{\frac{3}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(r\lambda_{nm}) dr \int_{-1}^1 P_n(\mu) f(r, \theta) d\mu.$$

O livro *Applied Mathematics in Chemical Engineering*, de *Mickley et al* ([2]), aborda a questão do problema encontrado frequentemente em engenharia química de diversas fases com vários componentes colocado em contato em uma determinada situação experimental: dado as condições iniciais se quer determinar o estado do sistema em determinado ponto (após certo tempo de contato) ou o tamanho do equipamento (tempo de contato preciso) para um determinado estado exigido. Este problema pode incluir qualquer operação de seguinte tipo:

- Conservação de componentes materiais, no caso que reações químicas são presentes, relações estequiométricas;
- A primeira lei da termodinâmica;
- Taxas de reação: transferência de calor, de massa e de reação químicas;
- Processos de equilíbrio em fronteiras interfaciais entre fases.

As vezes podemos chegar as equações padronizadas com interpretações distintas do comum. Considere o seguinte exemplo: um tubo cilindro de raio  $R$  e comprimento  $L$  com paredes cobertas de um catalizador, com temperatura  $T_w$ . Um gás  $A$  passa o tubo a mesma temperatura. O gás reage com as paredes através de uma reação de primeira ordem irreversível  $A \rightarrow B$  (de superfície)

$$-\frac{dN_A}{dt} = kaC_a,$$

$-\frac{dN_A}{dt}$  moles de  $A$  reagindo por unidade de tempo,  $k$  constante de reação, a área projetada do catalizador em contato com o gás reagente,  $C_a$  concentração de  $A$  (moles por unidade de volume) na vizinhança da superfície do catalizador.

O gás  $A$  com concentração inicial  $C_i$  será passado pelo tubo com velocidade constante  $V$ . Após atingir um estado permanente a concentração de gás saindo do tubo  $C_m$  pode ser medida. Supomos que não há gradiente de velocidade radial presente no fluxo. Segue-se que o transporte radial de  $A$  tem de ser por difusão molecular com coeficiente de difusão  $D$ .

Modelagem:

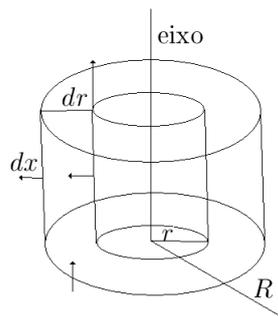


Figura 2.3: *Representação Geométrica*

Conservação de material na direção axial com respeito  $A$ :

- Taxa de entrada:  $V2\pi r dr C - D2\pi r du \frac{\partial C}{\partial r} = \epsilon$  (difusão);

- Taxa de saída:  $V2\pi r dr C + \frac{\partial}{\partial x}(V2\pi r dr C)dx - (D2\pi r dx \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}(D2\pi r U x \frac{\partial C}{\partial r})dx)$  (até primeira ordem).

No estado permanente, taxa de acumulação é zero: taxa de entrada=taxa de saída. Segue-se

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{D}{V} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} \right).$$

Onde vem a reação?

Nas condições de fronteiras devida a formulação do problema

$$\begin{aligned} C &= C_i \quad \text{em } x = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial r} &= 0 \quad r = 0 \quad \text{simetria.} \\ \frac{\partial C}{\partial r} &= -\frac{K}{D}C \quad \text{em } r = R, \quad 0 < x < 1, \quad \text{reação química em } r = R. \end{aligned}$$

Aqui  $x$  está substituindo  $t$  e temos um problema inicial e de fronteira para uma equação parabólica, mas a interpretação física é totalmente alterada. Este método foi estudado por Baron, Manning e Johnston ([1]) para estudar a oxidação do dióxido de enxofre na presença de pentodióxido de vanádio. De fato, é possível estabelecer a relação

$$\frac{C_m}{C_i} = \sum_j \frac{4\beta^2 e^{-\lambda_j^2 x / \alpha^2}}{\lambda_j^2 (\lambda_j^2 + \beta^2)},$$

com

$$\lambda_j = \beta \frac{J_0(\lambda_j)}{J_1(\lambda_j)}, \quad \beta = \frac{kR}{D}, \quad \alpha = R \sqrt{\frac{V}{D}},$$

obtendo  $\beta$  como uma função de  $C_i$ ,  $C_m$  com  $\alpha$  constante.

## 2.6 A equação da onda

Na seção 1.17.1 obtemos a equação da onda para a propagação de oscilações eletromagnéticas. Inúmeros outros exemplos existem. Considere a passagem de uma onda de som em um gás perturbando o estado de equilíbrio em qual a pressão e massa específica são  $P_0$  e  $\rho_0$ , respectivamente. No ponto  $(x, y, z)$  ao tempo  $t$  suponha que a pressão e massa específica são

$$\begin{aligned} P &= P_0 + c^2 P_0 s \\ e \\ \rho_0 &= (1 + s), \end{aligned}$$

onde  $s$  é a condensação e  $c^2 = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_0$ , sendo que o índice 0 indica o estado de equilíbrio.

As equações de um gás ideal é

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P$$

e supondo que  $s \ll 1$ ,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \ll 1$ ,

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -c^2 \rho_0 \nabla s$$

e a equação da continuidade

$$\rho_0 \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

No caso que a gás é irrotacional,  $\mathbf{v} = -\nabla\phi$  e obtemos

$$\nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} - c^2 s \right) = 0$$

e

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \Delta \phi.$$

Eliminando  $s$  nas equações obtemos

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \Delta \phi.$$

A mesma equação é obtida por vibrações de corda, cabos, onda de som longitudinal, membranas, vibrações longitudinais de barras, etc. Não discutimos outras situações detalhadamente. O leitor deverá consultar os livros de Sneddon [3] ou Tychonov e Samarsky [4] para maiores informações.

Consideramos a forma mais simples da equação da onda

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

Introduza novas coordenadas

$$X = -ct + x$$

$$Y = ct + x$$

a equação assume a forma

$$\frac{\partial^2 y}{\partial X \partial Y} = 0.$$

Trivialmente, esta última equação tem solução

$$y = f(x + ct) + g(x - ct)$$

com  $f, g$  funções arbitrárias.

Evidentemente, no tempo inicial  $t = 0$ , temos de especificar o deslocamento  $y = y_0(x)$  e a velocidade  $\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0(x)$ . Assim, determinamos que

$$y_0(x) = f(x) + g(x)$$

e

$$v_0(x) = cf'(x) - cg'(x).$$

Segue-se que via integração

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{c} \int_b^x v_0(\xi) d\xi$$

com algum valor arbitrário de  $b$  e por conseqüência que

$$f(x) = \frac{1}{2} y_0(x) + \frac{1}{2c} \int_b^x v_0(\xi) d\xi$$

e

$$g(x) = \frac{1}{2}y_0(x) - \frac{1}{2c} \int_b^x v_0(\xi)d\xi.$$

Finalmente,

$$y(x, t) = \frac{1}{2} (y_0(x + ct) + y_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi)d\xi,$$

que é a solução de d'Alembert da equação da onda em uma dimensão.

Considere agora a equação da onda em três dimensões com simetria esférica. Isso é dizer que buscamos  $\phi$  satisfazendo

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}.$$

Coloque  $\phi = \frac{\psi}{r}$ , obtendo

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}$$

com solução da forma

$$\psi = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

e

$$\phi = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r}.$$

$r^{-1}f\left(t - \frac{r}{c}\right)$  representa uma onda divergente e se  $\phi = \frac{1}{4\pi r}f(r - ct)$  é o potencial de velocidade de um gás,

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r^2}f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{4\pi r c}f'\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Segue-se que o fluxo total através de uma esfera de centro na origem e raio pequeno  $\epsilon$  é

$$4\pi\epsilon^2 u = f(t) + O(\epsilon).$$

Neste caso dizemos que há uma fonte pontual de força  $f(t)$  situado na origem e o  $\phi$  dado acima é o potencial de tal fonte pontual. A diferença de pressão no instante  $t$  e o valor de equilíbrio é dada por

$$P - P_0 = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\rho}{4\pi r} f'\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Consideramos exemplos de aplicação do método de separação de variáveis a equação da onda.

Considere o problema

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \Delta z & 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad t > 0 \\ z|_{t=0} &= f(x, y) & \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0. \\ z &= 0 & \text{na fronteira.} \end{aligned}$$

Buscamos soluções elementares da forma

$$z = X(x)Y(y)e^{\pm ikct},$$

obtendo

$$\begin{aligned} X'' + k_1^2 X &= 0, \\ Y'' + k_2^2 Y &= 0, \quad k_1^2 + k_2^2 = k^2. \end{aligned}$$

Dado que  $X = 0$  em  $x = 0$ ,  $a$  e  $Y = 0$  em  $y = 0$ ,  $b$ , tomamos a solução na forma de combinações das soluções  $z = Az_+ + Bz_-$  de

$$z_{\pm}(x, y, t) = \sum_{mn} A_{mn} \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \{ \cos k_{mn} ct \pm i \operatorname{sen}(k_{mn} ct) \},$$

aqui  $k_{mn}^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$ .

As condições iniciais implicam que  $A + B = 1$

$$f(x, y) = \sum_{mn} A_{mn} \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right)$$

e

$$0 = \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{t=0} = A \frac{\partial z_+}{\partial t} \Big|_{t=0} + B \frac{\partial z_-}{\partial t} \Big|_{t=0}$$

$$\sum_{mn} \left( A_{mn} \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \right) k_{mn} c (A - B) i$$

o que implica  $A = B = \frac{1}{2}$  e

$$z(x, y, t) = \sum_{mn} A_{mn} \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \cos(k_{mn} ct),$$

com

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right) dx dy.$$

Considere agora o problema

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}, \quad t > 0,$$

no cilindro  $0 \leq r \leq a$ ,

$$z|_{r=a} = 0$$

$$z(r, \theta, 0) = f(r) \quad \frac{\partial z}{\partial t}(r, \theta, 0) = 0.$$

Separação de coordenadas leva aos problemas

$$z = R(r)\Theta(\theta)e^{\pm ikct}$$

$$\frac{r^2}{R} \left( \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + k^2 R \right) + \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = 0$$

e

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + m^2 \Theta = 0,$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R,$$

com soluções  $\Theta = e^{\pm im\theta}$  ( $m$  inteiro) e  $R = J_m(kr)$ . A condição de fronteira significa que

$$J_m(ka) = 0 \quad \text{com} \quad k = k_{m1}, k_{m2}, \dots$$

$k_{mi} \geq 0$ , obtendo soluções da forma

$$z = \sum_{mn} A_{mn} J_m(k_{mn}r) \exp \pm im\theta \pm ik_{mn}ct.$$

Dado que a solução depende somente de  $r$  e  $t$ , podemos tomar  $m = 0$  e como no exemplo acima resolve o problema na forma

$$z(x, t) = \sum_n A_n J_0(k_n r) \cos(k_n ct), \quad k_n = k_{0t},$$

$$A_n \frac{2}{a^2 (J_1(k_n a))^2} \int_0^a r f(r) J_0(K_n r) dr$$

utilizando as propriedades de ortogonalidade das funções de Bessel (apêndice C).

## 2.7 Exemplos miscelâneos avançados

### Exemplo 1

Observação: Os exemplos 1 e 2 requerem conhecimento de variáveis complexas.

A fórmula de Poisson em duas dimensões pode ser escrita no círculo unitário  $C$ ,  $z = x + iy = re^{i\theta}$ ,

$$u(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta'} + z}{e^{i\theta'} - z} f(\theta') d\theta' + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta'} + \bar{z}}{e^{i\theta'} - \bar{z}} f(\theta') d\theta'$$

e podemos definir uma função analítica  $F(z)$ ,  $\text{Re } F(z) = f(\theta)$  em  $C$  tal que  $F = u + iv$

$$iv = ib_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta'} + z}{e^{i\theta'} - z} f(\theta') d\theta'$$

(funções conjugadas, outra expressão de  $v$

$$v = b_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r \sin(\theta - \theta') f(\theta') d\theta}{1 - 2r \cos(\theta - \theta') + r^2},$$

é a fórmula de Schwarz).

Sejam  $P$  e  $P'$  pontos inversos com respeito o círculo  $C$  e  $PP' = c$ . Invertendo com respeito o círculo com centro  $P'$  e raio  $c$ , o ponto no círculo  $C$  transforma em um ponto  $S'$ . (Suponha que  $P'$  está fora de  $C$  e  $S$  dentro de  $C$ ). Sejam  $dS$  e  $dS'$  elementos de arcos em  $S$  e  $S'$ , respectivamente, e sejam as coordenadas polares de  $P$  e  $P'$ ,  $(r, \theta)$  e  $(r', \theta')$ , respectivamente, onde  $rr' = 1$ . O círculo  $C$  inverte em um círculo com centro  $P$  e raio  $(a' \cdot l = cr)$

$$PS' = c \frac{PS}{P'S} = c \frac{l - r}{r' - l} = \frac{cr}{l} = a'.$$

Também  $r^2 P' S^2 = P S^2 = (r^2 + l^2 - 2r \cos(\sigma - \theta))$ , onde  $(l, \sigma)$  são as coordenadas polares de  $S$ .

Escrevendo

$$d\sigma' = \frac{c^2 dS}{a' P' S^2} = \frac{cd\sigma}{r P' S^2} = \frac{rcd\sigma}{1 - 2r \cos(\sigma - \theta) + r^2}$$

e  $rc = 1 - r^2$  a fórmula de Poisson tem a forma:

$$v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v' d\sigma',$$

que é uma consequência direta da fórmula de Gauss.

## Exemplo 2

Suponha que  $\Omega$  tem fronteira  $C$  (fechada e regular). Pelo teorema de aplicação de Riemann sobre aplicações conformais, existe uma função analítica única  $F(z)$ , regular em  $\Omega$ , tal que  $\zeta = F(z)$  aplica  $\Omega$  conformalmente em  $|\zeta| < 1$  transformando um ponto  $z_0$  dentro de  $C$  na origem e levando uma direção dada na direção positiva do eixo real.

A transformação

$$\zeta = \frac{a(z - z_0)}{a^2 - z\bar{z}_0}, \quad |z| < a$$

leva  $|z| \leq a$  em  $|\zeta| \leq 1$ ,  $\zeta(z_0) = 0$ . Esta aplicação leva a função harmônica  $u(x, y)$  no plano- $z$  em  $U(\xi, \eta)$  harmônica em  $|\zeta| \leq 1$  e  $u(x_0, y_0) = U(0, 0)$ .

Pelo teorema de Gauss,

$$U(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} U(\xi, \eta) d\sigma \quad \Gamma = \{|\zeta| = 1\}$$

e

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C U(\xi, \eta) \frac{d\sigma}{dS} dS$$

$s$  é o comprimento de arco em  $C$ ,  $|z| = a$ ,  $z = ae^{i\phi}$ ,  $z_0 = re^{i\theta}$ ,  $r < a$ ,

$$\frac{d\sigma}{ds} = \left| \frac{d\zeta}{ds} \right| = \left| \frac{a(a^2 - |z|^2)}{a(a^2 - z\bar{z}_0)^2} \right| = \frac{a^2 - r^2}{a(a^2 - 2ar \cos(\theta - \phi)) + r^2}$$

e

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r \cos \phi, r \sin \phi) \frac{a^2 - r^2}{a(a^2 - 2ar \cos(\theta - \phi)) + r^2} d\phi,$$

a fórmula de Poisson.

## Exemplo 3 (Extensão do Princípio do Máximo)

(i) Mostre que se

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 \geq 0$$

e

$$\alpha\lambda^2 + 2B\beta\mu + \gamma\mu^2 \leq 0,$$

então

$$A\alpha + 2B\beta + C\gamma \leq 0.$$

(ii) Sejam  $\Omega$  um aberto em  $\mathbb{R}^2$  e  $L$  o operador elétrico

$$Lu = Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y,$$

$$A(x, y)\lambda^2 + 2B(x, y)\lambda\mu + C(x, y)\mu^2 \geq 0 \quad \forall \lambda, \mu$$

com coeficientes contínuos. No seguinte vamos supor que

$$u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega);$$

$$Lu \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega$$

$$\text{e } u(x) \leq u(x_0) \quad \text{para algum } x_0 \in \Omega, \forall x \in \Omega.$$

Observamos que pondo  $M = u(x_0)$ ,  $\exists$  um círculo  $C$  tal que  $C \subset \Omega$  e para algum ponto  $x_1 \in \partial C$ ,  $u(x_1) = M$  e  $u(x) < M$  para  $x \in C^0$ . Introduzimos círculos  $K$ , raio  $R$ ,  $K_1$  com raio  $R_1 < R$  e centro  $x_1$  como na figura 2.7.

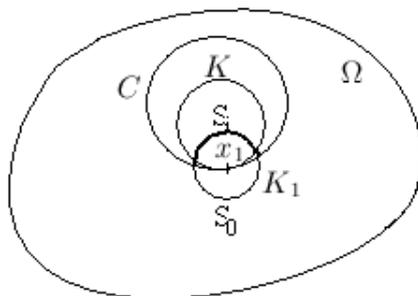


Figura 2.4:  $\partial K_1 = S_i \cup S_0$

Pondo  $r^2 = x^2 + y^2$  e tomando a origem de  $K$  como a origem de coordenadas introduzimos a função

$$h(x, y) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2}, \quad \alpha > 0.$$

Observe que  $\exists \epsilon > 0$  tal que

$$u \leq M - \epsilon \quad \text{sobre } S_i \tag{2.27}$$

$$\text{e } u \leq M \quad \text{sobre } S_0.$$

Mostre que escolhendo  $\alpha$  suficientemente grande,

$$Lh > 0 \quad \text{em } K_1 \tag{2.28}$$

$$\text{e } L(u + \delta h) > 0 \quad \text{se } \delta > 0.$$

$$h(x, y) < 0, \quad x \in S_0 \tag{2.29}$$

$$\text{e } h(x_1) = 0.$$

Pondo  $v(x, y) = u + \delta h$  e escolhendo  $\delta$  pequeno (via (2.27))  $v < M$  sobre  $S_i$ . Mostre que  $v < M$  sobre  $S_0$  (via (2.28) e (2.29)) e conseqüentemente que  $v < M$  sobre  $\partial K_1$  e  $v(x_1) = M$ .

Mostre utilizando (2.29) que

$$v_{xx}\lambda^2 + 2v_{xy}\lambda\mu + v_{yy}\mu^2 \leq 0 \tag{2.30}$$

e finalmente da parte (i) que

$$u(x) \equiv M \quad \text{em } \Omega.$$

(Argumento de E. Hopf, Berlin Sitzungsbers, 141 (1927))

Este exercício pode ser estendido a  $n$ -dimensões e tem aplicação nesta forma em geometria diferencial.

### Exemplo 4 (Teoria de existência para problemas hiperbólicos)

A questão de existência para problemas hiperbólicos - a utilização de Cauchy-Kowalewski.  
 Considere o problema

$$\begin{aligned} \square u &= f, \quad f \in L^2 \quad \text{em } \Omega = \Omega_{t_0} \\ u &= f_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = f_1 \quad \text{sobre } S_0 \\ f_0 &\text{ tendo a primeira derivada em } L^2(S_0) \\ \text{e } F_1 &\in L^2(S_0) \end{aligned} \tag{2.31}$$

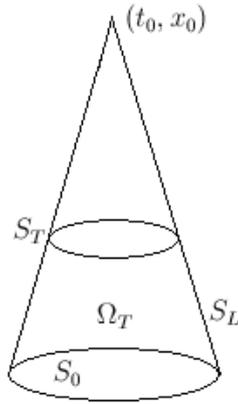


Figura 2.5: Representação Geométrica.

Ponhamos

$$\|u\|_T^1 = \left\{ \int_{S_T} \left\{ u^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right\} dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$u(T, x) = u(0, x) + \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) dt$$

$$\Rightarrow |u(T, x)| \leq |u(0, x)| + T^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{ou } \left| \frac{\partial u}{\partial t} f \right| \leq \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + f^2 \right\}.$$

Conseqüentemente  $\exists$  constantes  $k_1, k_2, k_3$  tal que para  $T \leq t_0$

$$\|u\|_T^1 \leq k_1 \|u\|_0^1 + k_2 \int_0^T \|u\|_t^1 dt + k_3 \|f\|_\Omega,$$

onde

$$\|f\|_\Omega = \left( \int_\Omega f^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\int_{\Omega} = \int_0^T \int_{S_T}.$$

Ponhamos

$$y(T) = \int_0^T \|u\|_t^1 dt = \|u\|_{\Omega}^1.$$

Então a desigualdade acima tem a forma

$$y' \leq a(T) + by,$$

onde  $b = k_2 \geq 0$  e

$$a = k_1 \|u\|_0^1 + k_3 \|f\|_{\Omega} \geq 0.$$

$a(T)$  crescendo com  $T$  e é limitada por  $a(t_0)$ ;  $y(0) = 0$ . Conseqüentemente

$$y \leq y_0,$$

onde  $y_0$  resolve

$$y' = a(T) + by, \quad \text{com } y_0(0) = 0 \quad (\text{Gronwall})$$

e em particular

$$y(T) \leq \frac{a_0}{b} (e^{bT} - 1).$$

Mais precisamente para  $T \leq t_0$ ,  $\exists c_1$  e  $c_2$  tal que

$$\|u\|_{\Omega}^1 \leq c_1 \|u\|_0^1 + c_2 \|f\|_{\Omega}.$$

Dado estas desigualdades podemos prosseguir na seguinte maneira: resolve via o teorema de Cauchy-Kowaleski (Courant & Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol II, Interscience, New York, 1989) o problema (2.31) para funções analíticas  $F_n$  e dados de Cauchy analíticas  $f_{0n}$  e  $f_{1n}$ . Um resultado de J. Leray (*Hyperbolic Differential Equations*, Institute for Advanced Study, Princeton NJ 1953) mostra que as soluções analíticas locais definem uma solução analítica global. O espaço  $H'(\Omega)$  (o espaço de Banach com a norma natural sobre funções em  $L^2(\Omega)$ , com primeira derivada em  $L^2(\Omega)$  - veja De Figueiredo, *Projeto Euclides*, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, seção 5.11) é completo.

O que basta com a desigualdade para mostrar a convergência em  $H'(\Omega)$  de uma seqüência de soluções analíticas  $(f_n)$  tende a  $f$  em  $H'(\Omega)$ ,  $(f_{0n})$  tende a  $f_0$  em  $H'(S_0)$  e  $(f_{1n})$  tende a  $f_1$  em  $L^2(S_0)$ . Esta solução é uma solução no sentido de distribuições (veja De Figueiredo).

## Exemplo 5 (Problemas mal postos)

Certos problemas podem ser formulados, mas não são estáveis sobre perturbação (Not well posed). O seguinte exemplo é de Jacques Hadamard, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*, Dover Publications 1952.

Considere o problema de Cauchy para uma equação elíptica.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\ u(0, y) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) &= u_1(y) = A_n \sin ny \end{aligned}$$

( $A_n$  pequeno com  $n \rightarrow \infty$ , por exemplo  $A_n = \frac{1}{n^p}$ ).

O problema tem solução

$$u = \frac{A_n}{n} \sin ny \sinh nx \rightarrow \infty$$

rapidamente com  $n \rightarrow \infty$  se  $x \neq 0$ . Conseqüentemente o problema é instável. De fato, a idéia expressa em Courant e Hilbert, *Methods of Mathematical physics* vol 1 Interscience New York 1953 p 227, que problemas mal postos no sentido de Hadamard não expressam fenômenos físicos consistentes, não subsiste mais como é observado por C. A de Moura em tratamento numérico de problemas inversos, mini curso Atas 25º seminário Brasileiro de Análise, São José dos Campos, 1987, 261-296. Lá é dado uma lista de exemplos típicos (tomografia computadorizada entre os exemplos) e referências.

### Exemplo 6 (Método das Imagens)

O método de imagens (veja Sir. James Jeans, *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*, C. U. P. 5ª edição, 1960 capítulo 8).

(a) Pense em um plano condutor  $S$

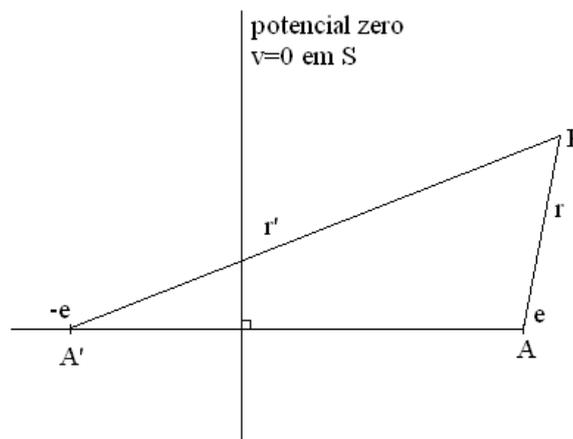


Figura 2.6: Plano Condutor

O problema é calcular a carga induzida em  $S$  por

$$v = \begin{cases} \frac{e}{r} - \frac{e}{r'} & r = |AP|, \quad r' = |A'P| \\ 0 & \text{em } S \\ \Delta = 0 & \text{salvo em } A. \end{cases}$$

Temos que a densidade de carga é dada por

$$\begin{aligned} 4\pi\rho = R &= - \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} \\ &= - \left. \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{e}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{e}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} \right\} \right|_{x=0} \\ &= - \frac{2ae}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

ou

$$\sigma = -\frac{ae}{2\pi r^3}.$$

Este é o exemplo mais simples do método de imagens. O princípio é encontrar um sistema de cargas elétricas tal que uma certa superfície coincide com a equipotencial  $v = 0$ . Depois interprete esta superfície  $S$  como um condutor (o potencial é zero). As cargas dentro deste equipotencial podem ser substituídas pela estrato equivalente de Green:

$$v_p = \iint_S \left\{ -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{v}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right\} dS.$$

No caso  $S$  é um equipotencial  $v = 0$ ,

$$\begin{aligned} v_p &= \iint_S -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial v}{\partial n} dS. \\ &= \iint_S \frac{\sigma}{r} dS, \end{aligned}$$

onde  $\sigma$  é uma densidade de eletricidade  $\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial v}{\partial n}$  (na direção do vetor normal exterior).

(b)

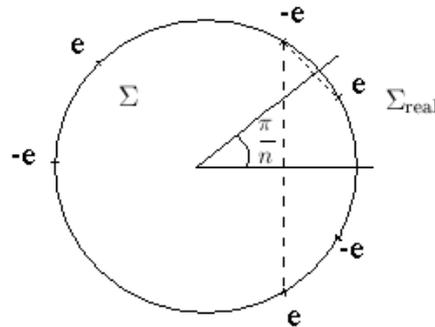


Figura 2.7:  $\Sigma$  e  $\Sigma_{real}$ .

Tomando coordenadas polares, escrevemos  $\theta = 0$  e  $\theta = \frac{\pi}{n}$ . Suponha que a carga esteja na posição  $(r, \theta)$ . Descobrimos que cargas

$$\begin{aligned} e &\text{ em } (r, \theta), \left( r, \theta + \frac{2\pi}{n} \right), \left( r, \theta + \frac{4\pi}{n} \right), \dots \\ -e &\text{ em } (r, -\theta), \left( r, -\left( \theta + \frac{2\pi}{n} \right) \right), \left( r, -\left( \theta + \frac{4\pi}{n} \right) \right), \dots \end{aligned}$$

da o potencial zero em  $\theta = 0$  e  $\theta = \frac{\pi}{n}$ .

(c) Coeficientes de capacidade e indução:

Considere vários condutores,  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , com cargas  $E_1, E_2, \dots, E_n$  e potenciais  $V_1, V_2, \dots, V_n$ . O sistema é linear e simétrico

$$\begin{aligned} V_1 &= p_{11}E_1 + p_{21}E_2 + p_{31}E_3 + \dots \\ V_2 &= p_{12}E_1 + p_{22}E_2 + p_{13}E_3 + \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

e  $p_{ij} = p_{ji}$ . Similarmente

$$\begin{aligned} E_1 &= q_{11}V_1 + q_{21}V_2 + q_{31}V_3 + \dots \\ V_2 &= q_{12}V_1 + q_{22}V_2 + q_{13}V_3 + \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

e  $q_{ij} = q_{ji}$ , sendo os  $p$ 's conhecidos como coeficientes de potencial e  $q_{i \neq j}$  como coeficientes de indução e  $q_{ii}$  coeficientes de capacidade.

Considere esferas  $A$  e  $B$  com raios  $a$ ,  $b$  e centros a distancia  $c$  um do outro, queremos encontrar o campo quando ambos não estão com cargas.

Suponha que

$$\begin{aligned} V_1, E_1 &\leftrightarrow A \leftrightarrow q_{11} \\ V_2, E_2 &\leftrightarrow B \leftrightarrow q_{22} \end{aligned}$$

são coeficientes de capacidade e

$$q_{12} = q_{21}$$

é o coeficiente de indução. As equações acima indica que com

$$V_2 = 0, \quad V_1 = 1, \quad E_1 = q_{11}, \quad e \quad E_2 = q_{12}.$$

É suficiente resolver casos particulares como esta parte resolve o problema em geral via linearidade. Então considere:  $A$  a  $V_1$  e  $B$  a  $V_2 = 0$ . Tome carga  $Va$  em  $A$  de potencial uniforme  $V$  sobre  $A$ , mas não zero sobre  $B$ . Reduz o potencial acima de  $B$  a zero superpondo um segundo campo  $-\frac{Vab}{c}$  no ponto inverso  $B'$  de  $A$  na esfera  $B$ . Isto perturba o potencial em  $A$ . Introduzimos uma carga  $\frac{Vab}{c} \frac{a}{c - \frac{b^2}{c}}$  em  $A'$ .

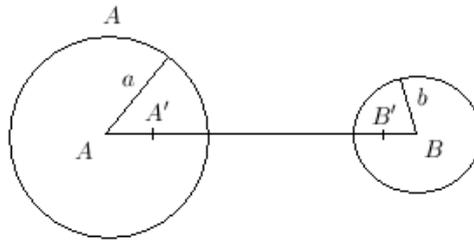


Figura 2.8:  $BB' = \frac{b^2}{c}$  e  $AA' = \frac{a^2}{a - \frac{b^2}{c}}$ .

E continue desta maneira. Este procedimento pode ser formalizado seguindo Poisson e Kirchhoff.

Sejam  $A_s$  a posição  $s$ -ésima da série de pontos  $A', A'', \dots$  e  $B_s$  a  $s$ -ésima da série de pontos  $B', B'', \dots$ .  $A_s$  é a imagem (inversão) de  $B_s$  na esfera  $A$  de raio  $a$  e  $B_s$  de  $A_{s-1}$  na esfera  $B$  de raio  $b$ . Sejam  $a_s = AA_s$ ,  $b_s = BB_s$  e as cargas em  $A_s$  e  $B_s$ ,  $e_s$ ,  $e'_s$ , respectivamente.

$$\begin{aligned} a_s(c - b_s) &= a^2 && \text{(Inversão)} \\ b_s(c - a_{s-1}) &= b^2 && \text{(Inversão)} \\ e_s &= -\frac{a}{a - b_s} e'_s && e'_s = -\frac{b}{c - a_{s-1}} e'_{s-1}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$e_s = \frac{ab}{(c-b_s)(c-b_{s-1})} e_{s-1}$$

$$e'_s = \frac{ab}{(c-a_{s-1})(c-b_{s-1})} e'_{s-1}$$

e

$$\frac{e_s}{e_{s-1}} = \frac{ab}{(c-b_s)(c-a_{s-1})} = \frac{a_s b_s}{a b} = \frac{a_s c - a^2}{ab}$$

$$\frac{e_s}{e_{s+1}} = \frac{(c-b_{s+1})(c-a_s)}{ab} = \frac{c(c-a_s)}{ab} - \frac{b}{a}.$$

Via adição obtemos:

$$\frac{e_s}{e_{s-1}} + \frac{e_s}{e_{s+1}} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab}.$$

Pondo  $u_s = \frac{1}{e_s}$ ,

$$u_{s+1} - \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab} u_s + u_{s-1} = 0 \quad (2.32)$$

e similarmente a mesma equação de diferenças tem que ser satisfeita por  $u'_s = \frac{1}{e'_s}$ . A solução de (2.32) pode ser tomada na forma

$$u_s = A\alpha^s + B\beta^s,$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são raízes de

$$t^2 - \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab} t + 1 = 0.$$

O produto destas raízes é 1, e tomando  $\alpha$  a raiz menor que 1, podemos supor que  $u_s$  é dada por

$$u_s = A\alpha^s + \frac{B}{\alpha^s},$$

com

$$e_s = \frac{\alpha^s}{A\alpha^{2s} + B}$$

e

$$e'_s = \frac{\alpha^s}{A'\alpha^{2s} + B'}.$$

Segue-se que

$$q_{11} = a + e_1 + e_2 + \dots = a + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^s}{A\alpha^{2s} + B}.$$

e

$$q_{12} = e'_1 + e'_2 + \dots = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^s}{A'\alpha^{2s} + B'}.$$

Lembre-se que

$$e_0 = \frac{1}{A+B} = \alpha,$$

$$e_1 = \frac{\alpha}{A\alpha^2 + B} = \frac{a^2 b}{c^2 - b^2}$$

e

$$\frac{1}{-\xi^2} = \frac{B}{\xi} = \frac{1}{\alpha(1-\xi^2)}, \quad \text{com } \xi = \frac{a+b\alpha}{c}.$$

Conseqüentemente

$$e_s = \frac{a\alpha^s(1-\xi^2)}{1-\xi^2\alpha^{2s}}$$

e

$$q_{11} = \alpha(1-\xi^2) \left\{ \frac{1}{1-\xi^2} + \frac{\alpha}{1-\alpha^2\xi^2} + \frac{\alpha^2}{1-\xi^2\alpha^4} + \dots \right\}.$$

Para determinar  $A'$  e  $B'$ , observe que

$$e'_1 = \frac{\alpha}{A'\alpha^2 + B'} = -\frac{ab}{c}$$

$$e'_2 = \frac{\alpha^2}{A'\alpha^4 + B} = -\frac{a^2b^2}{c(c^2 - a^2 - b^2)}$$

e

$$q_{12} = -\frac{ab}{c}(1-\alpha^2) \left( \frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{\alpha}{1-\alpha^4} + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^6} + \dots \right)$$

Cada série é da forma

$$\sum \frac{a^s}{1-\xi^2 a^{2s}}.$$

Poisson determinou expressões integrais para estas séries. De fato,

$$\int_0^\infty \frac{\sin pt}{e^{2\pi t} - 1} dt = \frac{1}{t} \left( \frac{e^p + 1}{e^p - 1} \right) - \frac{1}{2p}$$

e pondo  $p = \log \xi^2 a^{2s}$ ,

$$\frac{a^s}{1-\xi^2 a^{2s}} = \frac{1}{2} a^s - \frac{a^s}{\log \xi^2 a^{2s}} - 2 \int_0^\infty \frac{a^s \sin \log \xi^2 a^{2s}}{e^{2\pi t} - 1} dt$$

e

$$\begin{aligned} \sum \frac{a^s}{1-\xi^2 a^{2s}} &= \frac{1}{2(1-a)} - \sum \frac{a^s}{2 \log \xi + 2s \log a} - \\ &- 2 \int_0^\infty \sum \frac{a^s \sin(2 \log \xi + 2s \log a)t}{e^{2\pi t} - 1} dt \\ &= \frac{1}{2(1-a)} - \int_0^\infty \frac{\xi^{2t}}{1-a^{2t+1}} dt - 2 \int_0^\infty \frac{\sin(2t \log \xi) - a \sin(2t \log \frac{\xi}{a})}{(e^{2\pi t} - 1)[1 - 2a \cos(2t \log a) + a^2]} dt \end{aligned}$$

Cálculos numéricos foram feitos por Russell Proceedings Physical Society 23 (1911) página 352.

## Exemplo 7 (Sistema de Coordenadas ortogonais)

(Veja Jeans citado acima, seções 277 a 283)

Suponha o sistema de superfície

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \lambda \\ \psi(x, y, z) &= \mu \\ \chi(x, y, z) &= \nu. \end{aligned} \quad \text{são ortogonais}$$

Então, podemos supor (localmente) que pontos são determinados por  $(\lambda, \mu, \nu)$  e queremos a expressão da distância  $ds$  de  $(\lambda, \mu, \nu)$  do ponto vizinho  $(\lambda + \delta\lambda, \mu + \delta\mu, \nu + \delta\nu)$ . A ortogonalidade implica

$$ds^2 = \frac{d\lambda^2}{h_1^2} + \frac{d\mu^2}{h_2^2} + \frac{d\nu^2}{h_3^2}.$$

A equação de Laplace tem a forma:

$$\Delta v = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{h_2}{h_3 h_1} \frac{\partial v}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) = 0$$

(Lembre-se que  $\Delta v = \text{div}(\text{grad } v)$  e a interpretação geométrica de  $\text{div}$ ).

Por exemplo, considere o sistema

$$\frac{x^2}{a^2 + \theta} + \frac{y^2}{b^2 + \theta} + \frac{z^2}{c^2 + \theta} = 1. \quad (2.33)$$

(2.33) é uma equação para  $\theta$  (de grau 3) com raízes  $\lambda, \mu, \nu$ . Claramente, a expressão

$$(a^2 + \theta)(b^2 + \theta)(c^2 + \theta) \left[ \frac{x^2}{a^2 + \theta} + \frac{y^2}{b^2 + \theta} + \frac{z^2}{c^2 + \theta} - 1 \right]$$

é uma função racional de  $\theta$  de grau 3, coeficiente de  $\theta^3$  sendo  $-1$ . É zero quando  $\theta = \lambda, \mu, \nu$ . Isso significa que a expressão é identicamente igual a

$$-(\theta - \lambda)(\theta - \mu)(\theta - \nu)$$

ou pondo  $\theta = -a^2$  na identidade

$$x^2(b^2 - a^2)(c^2 - a^2) = (a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)(a^2 + \nu).$$

Fixando  $\mu$  e  $\nu$  e variando  $\lambda$

$$2 \frac{dx}{x} = \frac{d\lambda}{a^2 + \lambda}$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{elemento da normal } \lambda = \text{constante}) \\ &= \frac{1}{4} \sum \left( \frac{x}{a^2 + \lambda} \right)^2 (d\lambda)^2 \\ &= \frac{1}{4} (d\lambda)^2 \sum_{a,b,c} \frac{(a^2 + \mu)(a^2 + \nu)}{(a^2 + \lambda)(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} \\ &= \frac{1}{4} (d\lambda)^2 \frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} = \frac{(d\lambda)^2}{h_1^2}, \end{aligned}$$

onde

$$h_1^2 = \frac{4(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}.$$

Introduzimos

$$\Delta_\lambda = \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}.$$

Segue-se que

$$\frac{h_1}{h_2 h_3} = \frac{\Delta_\lambda}{2\Delta_\mu \Delta_\nu} (\mu - \nu) \sqrt{-1}$$

e equação de Laplace tem a forma

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left( (\mu - \nu) \frac{\Delta_\lambda}{\Delta_\mu \Delta_\nu} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left( (\nu - \lambda) \frac{\Delta_\mu}{\Delta_\nu \Delta_\lambda} \frac{\partial v}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \nu} \left( (\lambda - \mu) \frac{\Delta_\nu}{\Delta_\lambda \Delta_\mu} \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) = 0.$$

Multiplicando por  $\Delta_\lambda \Delta_\mu \Delta_\nu$ , obtemos

$$(\mu - \nu) \Delta_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \Delta_\lambda \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) + (\nu - \lambda) \Delta_\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \Delta_\mu \frac{\partial v}{\partial \mu} \right) + (\lambda - \mu) \Delta_\nu \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \Delta_\nu \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) = 0.$$

Introduzimos novas variáveis

$$\alpha = \int^\lambda \frac{d\lambda}{\Delta_\lambda}, \quad \beta = \int^\mu \frac{d\mu}{\Delta_\mu}, \quad \gamma = \int^\nu \frac{d\nu}{\Delta_\nu}$$

e a equação pode ser escrita

$$(\mu - \nu) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + (\nu - \lambda) \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + (\lambda - \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial \gamma^2} = 0. \quad (2.34)$$

Uma solução particular de (2.34) é

$$v = A + B\alpha \quad A, B \text{ constantes.}$$

Os equipotenciais são elipsóides confocais

$$S = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \right\}.$$

Condutor  $\lambda = 0$  com potencial  $v = 1$  e  $v = 0$  em  $\lambda = \infty$ .

Segue-se que  $1 = A$

$$\begin{aligned} \text{e } 0 &= \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta_\lambda} B + \lambda \\ \text{ou } B &= -\frac{1}{\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta_\lambda}} \end{aligned}$$

e conseqüentemente

$$v = 1 - \frac{\int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\Delta_\lambda}}{\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta_\lambda}} = \frac{\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta_\lambda} - \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\Delta_\lambda}}{\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta_\lambda}} = \frac{\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\Delta_\lambda}}{\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta_\lambda}}.$$

## Exercícios (Problemas Elípticos)

1. Mostre que a equação

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

tem solução da forma  $(Ar^n + Br^{-n})e^{\pm in\theta}$  com  $A$ ,  $B$  e  $n$  constantes. Resolva o problema de fronteira

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad |r| < a \\ u|_{r=a} &= A + B \sin \theta \end{aligned}$$

2. Mostre que o problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= 0 \quad \text{em } a < r < b, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ v &= \theta \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \quad r = a, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ v &= 0 \quad r = b, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ v &= 0 \quad \theta = 0, \quad a \leq r \leq b \\ v &= 0 \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad a \leq r \leq b \end{aligned}$$

tem solução

$$v = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\left(\frac{r}{b}\right)^{4n-2} - \left(\frac{b}{r}\right)^{4n-2}}{\left(\frac{a}{b}\right)^{4n-2} - \left(\frac{b}{a}\right)^{4n-2}} \right\} \frac{\text{sen}(4n-2)\theta}{(2n-1)^3}$$

3. Um fluxo de um fluido irrotacional, ideal, com divergência zero, tem potencial de velocidade  $r^n Y_n(\theta, \phi)$ . Mostre que o potencial de velocidade  $\psi$  do fluxo perturbado pela colocação de uma esfera sólida no raio  $a$  na origem é

$$\psi = \left( 1 + \frac{n}{n+1} \frac{a^{2n+1}}{r^{2n+1}} \right) r^n Y_n(\theta, \phi).$$

4. Mostre que a solução do problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad 0 < \alpha \leq \theta \leq \beta < 2\pi \\ u &= 0, \quad \theta = \alpha \\ u &= \sum a_n r^n, \quad \theta = \beta, \end{aligned}$$

é dada por

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{Q_n(\cos \alpha) P_n(\cos \theta) - P_n(\cos \alpha) Q_n(\cos \theta)}{Q_n(\cos \alpha) P_n(\cos \beta) - P_n(\cos \alpha) Q_n(\cos \beta)} r^n.$$

Observação:

$$Q_n(\mu) = \frac{1}{2} P_n(\mu) \log \frac{\mu+1}{\mu-1} - \sum_{s=0}^p \frac{2n-4s+1}{(2s+1)(n-s)} P_{n-2s-1}(\mu)$$

é a segunda solução independente da equação de Legendre. Aqui  $\frac{1}{2}(n-p)$  ou  $\frac{n}{2}-1$  dependendo sobre se  $n$  é ímpar ou par.  $Q_n(\mu)$  é singular em  $\mu = 1$  ( $\theta = 0$ ). Observe que entre os cones  $\theta = \alpha$  e  $\theta = \beta$ ,  $Q_n(\mu)$  é não singular e consideramos ambos  $P_n$  e  $Q_n$ .

5. Um dipolo elétrico com momento  $\mu$  é colocado no centro de uma esfera uniforme vazia (condutor) de raio  $a$  que é isolada e que tem carga total  $e$ . Se  $v_1$  é o potencial dentro da esfera e  $v_2$  o potencial fora da esfera, mostre que

$$v_1 = \frac{e}{a} + \frac{\mu \cos \theta}{r^2} - \frac{\mu r \cos \theta}{a^3}$$

e

$$v_2 = \frac{e}{r}.$$

6. Resolva o problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 8x,$$

$$u|_{r=a} = 0$$

em um disco  $r \leq a$ .

7. Se a carga  $q$  é distribuída sobre um condutor na forma de uma esfera com raio  $a$ , centro  $O$ , o potencial é equivalente a concentração da carga no centro  $O$  por  $V = -\frac{q}{r}$ . Três esferas concêntricas (condutoras) com raios ( $a < b < c$ ) são mantidas com os potenciais iguais nos condutores com raios  $a$  e  $c$  e com o condutor de raio  $b$  mantido no potencial  $O$ .

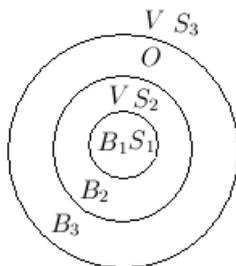


Figura 2.9: Representação Geométrica.

Isto é equivalente ao problema

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{em} \quad B_1 \cup B_2 \cup B_3$$

$$\phi|_{r=a} = \phi|_{r=c} = V$$

$$\phi|_{r=b} = 0$$

Resolva este problema.

8. (a) Seja  $u$  uma função harmônica no aberto  $G$  de  $\mathbb{R}^2$  e  $B(x_0, R) \subset G$ , mostre utilizando o teorema de Green que

(i)

$$u(x_0) = \Gamma^{-1} \int_{S(0,1)} u(x_0 + R\omega) d\omega$$

e que

(ii)

$$u(x_0) = |B(x_0, R)|^{-1} \int_{B(x_0, R)} u(x) dx.$$

(b) Observe que se  $u$  é contínua e (ii) é satisfeita, então  $u \in C^1(G)$ , com

$$(\partial_\alpha)(x_0) = |B(x_0, R)|^{-1} \int_{\partial B(x_0, R)} u(x) d\sigma_x, \quad \alpha = 1, \dots, k,$$

com  $d\sigma_\alpha = n_\alpha$  normal exterior. Aplicando o teorema de Green, mostre que  $\partial_\alpha u$  satisfaz (ii) para  $\alpha = 1, 2, \dots$ . Se (ii) é verdadeira para todas  $B(x, R) \subset G$ , mostre que  $u$  é harmônica em  $G$ .

## Exercícios (Equação do Calor)

9. Considere a equação do calor

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= k\Delta T \quad \text{em } 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < c, \\ T &= 0 \quad \text{nos lados} \\ T(x, y, z, 0) &= f(x, y, z). \end{aligned}$$

Mostre que

$$T(x, y, z, t) = \frac{8}{abc} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} F(m, n, q) e^{-\mu t} \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi z}{c} \right),$$

onde

$$F(m, n, q) = \int_0^a \int_0^b \int_0^c f(x, y, z) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi z}{c} \right) dx dy dz$$

e

$$\mu = k\pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{q^2}{c^2} \right).$$

10. Resolva o problema

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad t > 0, \quad -a < x < a.$$

satisfazendo as condições:

- (i)  $T \rightarrow 0$  com  $t \rightarrow \infty$ ,
- (ii)  $T = 0$  em  $x = \pm a$ ,
- (iii)  $T = x$  em  $t = 0$  e  $-a < x < a$ .

$$\left( T = \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \exp \left( -\frac{n^2 \pi^2 t}{a^2} \right) \right)$$

11. Considere o problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= k\Delta T \quad \text{em } a < r < b \\ T|_{r=b} &= 0 \\ T|_{r=a} &= qe^{s^2 t}, \quad q, s \text{ constantes.} \end{aligned}$$

Obtenha uma possível solução. (Dica: Consulte seção 2.5)

12. Considere a superfície da terra como sendo o plano  $z = 0$  e considere a equação do calor

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= k\Delta T \quad \text{em } z < 0, \quad t > 0, \\ T(x, y, 0) &= \theta_0 + \theta_1 \cos \omega t. \end{aligned}$$

Investigue a penetração da variação desta temperatura na terra e mostre que na profundidade  $z$  a temperatura flutua entre

$$\theta_0 - \theta_1 \exp(z\sqrt{\omega/2k}) \quad \text{e} \quad \theta_0 + \theta_1 \exp(z\sqrt{\omega/2k})$$

13. Mostre que a solução  $T(r, t)$  do problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t} & 0 < r < a, \quad t > 0 \\ T(r, 0) &= T_0 = \text{constante} & 0 \leq r \leq a \\ \frac{\partial T}{\partial r} + hT &= 0, & \text{em } r = a, \quad t > 0. \end{aligned}$$

pode ser expressa na forma

$$T(r, t) = \frac{2a^2 T_0 h}{r} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\xi_n^2 + (ah - 1)^2)^{\frac{1}{2}} \text{sen} \left( \frac{r\xi_n}{a} \right) e^{-t\xi_n^2/a^2}}{\xi_n^2 + ah(ah - 1)\xi_n},$$

onde  $0 \leq \xi_1, \xi_2, \dots$  satisfazem

$$\xi + (ah - 1) \tan \xi = 0.$$

## Exercícios (Equação da onda)

14. Prove que a energia total de uma corda fixada nos pontos  $x = 0$ ,  $x = l$  e executando pequenas vibração transversais é

$$W = \frac{1}{2} T \int_0^l \left\{ \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right\} dx.$$

Mostre que se

$$y = f(x - ct) \quad 0 \leq x \leq l,$$

então a energia da onda é igualmente dividida entre energia potencial e energia cinética.

15. Procure a solução do problema

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & 0 < x < a, \quad t > 0 \\ V &= 0 & \text{em } x = 0 \quad \text{ou} \quad x = a, \quad t > 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= 0 & \text{em } t = 0, \quad 0 \leq x \leq a \\ V &= E & \text{em } t = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \end{aligned}$$

quando  $a$ ,  $c$  e  $E$  são constantes.

16. Procure uma solução de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = xt$$

satisfazendo a condição  $u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$  em  $t = 0$ .

17. Uma corda de comprimento  $l$ , com extremos fixos, esta inicialmente em repouso na forma da curva  $y = A \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$ . Em  $t = 0$  inicia-se as vibrações com resistências do meio. Dado que a equação diferencial que governa as vibrações é

$$c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2k \frac{\partial y}{\partial t},$$

mostre que, depois de passar o tempo  $t$ ,

$$y = Ae^{-kt} \left\{ \cos m't + \frac{k}{m'} \sin m't \right\} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right),$$

onde

$$m' = \frac{m^2 \pi^2 c^2}{l^2} - k^2.$$

18. Uma esfera elástica uniforme de raio  $a$  e densidade  $\rho$  está vibrando radialmente sob nenhuma força externa. O deslocamento radial  $u$  satisfaz a equação

$$(\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  são constantes elásticas e a componente radial de atrito é

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\lambda \frac{u}{r}.$$

Prove que o período dos modos normais de vibração são  $\frac{2\pi a}{c_1 \xi}$ , quando  $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$  e os  $\xi$ 's são as raízes positivas da equação transcendental

$$4\xi \cot \xi = 4 - \beta^2 \xi^2$$

em que  $\beta^2 = (\lambda + 2\mu)/\mu$ .

# Bibliografia

- [1] Baron, T., Manning, W.R., Johnston, H.F., *Reaction kinetics in a tubular reactor*, Chemical Engineering Progress, 48, 125-132, 1952.
- [2] Mickley, H. S., Sherwood, T.K., Reed, C. E., *Applied Mathematics in Chemical Engineering*, 2 Ed., McGraw-Hill, New York, 1957.
- [3] Sneddon, I. N., *Elements of Partial Differential Equations* , McGraw-Hill Book Company, INC., New York, Toronto e Londres, 1957.
- [4] Tychonov, A. N., and Samarsky, A. A., *Partial Differential Equations of Mathematical Physics.*, Holden-Day, San Francisco, 1964.
- [5] Webster, A. G., *Partial differential equations of mathematical physics* , 2nd ed., Dover, New York, 1955.

# Capítulo 3

## Séries de Fourier e Transformadas

Estudaremos o problema da expansão de funções em intervalos limitados nos termos de funções periódicas. Para simplicidade será útil tomar o intervalo canônico  $(0, 2\pi)$ . Vamos supor que a função sob consideração  $f(x)$ , está definida em  $(0, 2\pi)$  e depois pela periodicidade este domínio é estendido a  $(-\infty, +\infty)$ ,

$$f(x + 2\pi) = f(x).$$

Escrevendo formalmente a expansão,

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx \quad (3.1)$$

e observamos as relações

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx &= \begin{cases} \pi & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m, \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \cos mx \operatorname{sen} nx dx &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx dx &= \begin{cases} \pi & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m. \end{cases} \end{aligned}$$

obtemos

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx dx \quad (3.2)$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} mx dx \quad (\text{Euler-Fourier}) \quad (3.3)$$

Na equação (3.1) temos duas questões: a convergência da série e, caso essa convirja, a sua relação com a função  $f$ . Claramente (como sempre) o primeiro passo é o estudo da soma parcial associada com a série

$$s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^n a_m \cos mx + b_m \operatorname{sen} mx.$$

Seja  $0 \leq x < 2\pi$ . Temos

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \cos mx \int_0^{2\pi} f(t) \cos mtdt + \operatorname{sen} mx \int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen} mtdt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m(x-t) \right\} f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} \left( n + \frac{1}{2} \right) (x-t)}{\operatorname{sen} \frac{x-t}{2}} f(t) dt. \end{aligned}$$

Pondo  $t = x + u$ ,

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-x}^{2\pi-x} \frac{\operatorname{sen} \left( n + \frac{1}{2} \right) u}{\operatorname{sen} \frac{u}{2}} f(x+u) du.$$

Mas o integrando tem período  $2\pi$ , ou seja, toma os mesmos valores nos intervalos  $(2\pi - x, 2\pi)$  e  $(-x, 0)$  e também os mesmos valores nos intervalos  $(-2\pi, x - 2\pi]$  e  $(0, x]$ . Conseqüentemente,

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} \left( n + \frac{1}{2} \right) u}{\operatorname{sen} \frac{u}{2}} f(x+u) du. \quad (3.4)$$

Esta fórmula é chamada integral de Dirichlet.

Claramente (3.4) pode ser escrita na forma simétrica

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \left( n + \frac{1}{2} \right) u}{\operatorname{sen} \frac{u}{2}} (f(x+u) + f(x-u)) du. \quad (3.5)$$

Obtém-se isto escrevendo  $u = -v$  em  $(\pi, 2\pi)$ ,

$$\int_{-2\pi}^{-\pi} \frac{\operatorname{sen} \left( n + \frac{1}{2} \right) v}{\operatorname{sen} \frac{v}{2}} f(x-v) dv = \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \left( n + \frac{1}{2} \right) u}{\operatorname{sen} \frac{u}{2}} f(x-u) du,$$

pela periodicidade.

Suponha que  $f = 1$ . Então,  $a_0 = 2$  e todos os outros coeficientes são zero e

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \left( n + \frac{1}{2} \right) u}{\operatorname{sen} \frac{u}{2}} 2 du. \quad (3.6)$$

Multiplicando (3.6) por  $S$  e subtraindo (3.5), obtemos

$$s_n - s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \left( n + \frac{1}{2} \right) u}{\operatorname{sen} \frac{u}{2}} (f(x+u) + f(x-u) - 2s) du. \quad (3.7)$$

Uma condição necessária e suficiente para  $s_n \rightarrow s$  é, então, que a integral em (3.7) tenda a zero quando  $n$  tende a  $+\infty$ . O problema da convergência é o problema de determinar sob quais condições a integral tende a zero, e caso isto ocorra, então  $s_n(x)$  converge a  $f(x)$  em algum sentido.

O lema seguinte é crucial no desenvolvimento da teoria.

**Lema 1.** *Lema de Riemann-Lebesgue: Seja  $f$  integrável em  $(a, b)$ , então*

$$\int_a^b f(x) \cos \lambda x dx \rightarrow 0 \quad e \quad \int_a^b f(x) \operatorname{sen} \lambda x dx \rightarrow 0$$

quando  $\lambda \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Suponha que  $f$  tem uma derivada limitada sobre  $(a, b)$ . Então

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) \cos \lambda x dx &= \left[ f(x) \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{\lambda} \right]_a^b - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(x) \operatorname{sen} \lambda x dx \\ &= O\left(\frac{1}{\lambda}\right).\end{aligned}$$

No caso geral, um resultado da teoria de Lebesgue, diz que existe uma função absolutamente contínua  $\varphi$  tal que

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx < \epsilon.$$

Então,

$$\left| \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \cos \lambda x dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx < \epsilon$$

para todos os valores de  $\lambda$  e pela primeira parte

$$\left| \int_a^b \varphi(x) \cos \lambda x dx \right| < \epsilon \quad (\lambda > \lambda_0).$$

Portanto

$$\left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx \right| < 2\epsilon \quad (\lambda > \lambda_0).$$

Uma demonstração similar é possível para a integral com  $\operatorname{sen} x$ .

**Observação 5.** Uma função  $f(x)$  é dita ser absolutamente contínua em  $(a, b)$  se dado  $\epsilon > 0$ , podemos encontrar  $\delta > 0$  tal que

$$\sum_{\nu=1}^n |f(x_\nu + h_\nu) - f(x_\nu)| \leq \epsilon,$$

para cada conjunto de intervalos distintos disjuntos  $(x_\nu + h_\nu)$  tais que  $\sum_{\nu=1}^n h_\nu \leq \delta$ .

**Observação 6.** Uma função  $f(x)$  é dita de variação limitada em  $(a, b)$  se para

$$\begin{aligned}a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \\ \sum_{\nu=0}^{n-1} |f(x_{\nu+1}) - f(x_\nu)| \leq M,\end{aligned}$$

independentemente do modo de divisão de  $(a, b)$ .

**Observação 7.** Cada função  $f$  de variação limitada pode ser escrita na forma

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

onde  $\varphi$  e  $\psi$  são funções limitadas e não decrescentes.

**Observação 8.** Uma função absolutamente contínua é de variação limitada.

**Observação 9.** *Uma condição necessária e suficiente para uma função satisfazer o teorema fundamental do cálculo é que ela seja absolutamente contínua (Titchmarsh, Pág. 364).*

Uma conseqüência do lema de Riemann-Lebesgue é que o coeficiente de Fourier tende a zero. Outra conseqüência é que o comportamento da série de Fourier para um valor de  $x$  depende apenas do comportamento da função na vizinhança deste ponto.

Seja  $\delta$  um número positivo,  $\delta < \pi$  e ponha  $g(t) = f(t)$  para  $x - \delta < t < x + \delta$  e  $g(t) = 0$  no resto do intervalo  $(x - \pi, x + \pi)$ . Denominaremos as somas parciais da série de Fourier de  $g(t)$  de  $s_n$ . Então

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen} \left(n + \frac{1}{2}\right) u}{\text{sen} \frac{u}{2}} (g(x+u) - g(x-u)) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta \frac{\text{sen} \left(n + \frac{1}{2}\right) u}{\text{sen} \frac{u}{2}} (f(x+u) + f(x-u)) du. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$s_n - S_n = \frac{1}{2\pi} \int_\delta^\pi \frac{\text{sen} \left(n + \frac{1}{2}\right) u}{\text{sen} \frac{u}{2}} (f(x+u) + f(x-u)) du.$$

Mas

$$\text{cosec} \frac{u}{2} (f(x+u) + f(x-u))$$

é integrável sobre  $(\delta, \pi)$  se  $\delta > 0$  e pelo lema de Riemann-Lebesgue  $s_n - S_n \rightarrow 0$ . Portanto, o comportamento de  $s_n$  depende apenas de  $f(t)$  no intervalo  $(x - \delta, x + \delta)$ . É esta propriedade que permite que a série represente uma função arbitrária. Em geral, a série representa uma função no ponto como um tipo de limite de seu valor médio em  $(x - \delta, x + \delta)$  e é igual a  $f(x)$  somente se  $f$  é suficientemente simples.

**Observação 10.**  $\{f(u)\}_{(u < x)}$  é monótona. Isto significa que existe  $\lim_{u \rightarrow x} \varphi(u) = f(x - 0)$ . Da mesma forma se  $f = \varphi - \psi$ , então  $\lim_{u \rightarrow x, u < x} \varphi - \lim_{u \rightarrow x, u < x} \psi = f(x - 0)$  existe. Simultaneamente, para  $f(x + 0)$ , claramente,  $\varphi(u) \rightarrow 0$ . Então, podemos escrever  $\varphi(u) = \varphi_1(u) - \varphi_2(u)$ , onde  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são funções positivas crescentes de  $u$ . Cada uma destas funções tende ao mesmo limite quando  $u \rightarrow 0$ , e subtraindo uma constante podemos supor que este limite é zero.

Supomos que  $\delta$  é suficientemente pequeno para assegurar que  $\varphi(u)$  tem variação limitada em  $(0, \delta)$ . Então

$$\int_0^\delta \frac{\text{sen} \left(n + \frac{1}{2}\right) u}{u} \varphi(u) du = J_1 - J_2,$$

onde

$$J_1 = \int_0^\delta \frac{\text{sen} \left(n + \frac{1}{2}\right) u}{u} \varphi_1(u) du, \quad J_2 = \int_0^\delta \frac{\text{sen} \left(n + \frac{1}{2}\right) u}{u} \varphi_2(u) du.$$

Dado  $\epsilon$ , escolheremos  $\eta$  tal que  $\varphi_1(\eta) < \epsilon$ . Pelo segundo teorema do valor médio temos

$$\begin{aligned} \int_0^\eta \frac{\text{sen} \left(n + \frac{1}{2}\right) u}{u} \varphi_1(u) du &= \varphi_1(\eta) \int_\xi^\eta \frac{\text{sen} \left(n + \frac{1}{2}\right) u}{u} du \quad (0 < \xi < \eta) \\ &= \varphi_1(\eta) \int_{(n+\frac{1}{2})\xi}^{(n+\frac{1}{2})\eta} \frac{\text{sen } v}{v} dv. \end{aligned}$$

A última integral é limitada para todos os valores de  $n$ ,  $\xi$  e  $\eta$ . Isto implica que

$$\left| \int_0^\eta \frac{\operatorname{sen} \left( n + \frac{1}{2} \right) u}{u} \varphi_1(u) du \right| \leq A\epsilon.$$

Com este valor fixo de  $\eta$ , pelo lema de Riemann-Lebesgue temos

$$\left| \int_\eta^\delta \frac{\operatorname{sen} \left( n + \frac{1}{2} \right) u}{u} \varphi_1(u) du \right| \leq \epsilon, \quad n > n_0.$$

Isto implica que  $J_1 \rightarrow 0$  e  $J_2 \rightarrow 0$  da mesma maneira.

**Observação 11.** *A série de Fourier de  $f(x)$  converge uniformemente em qualquer intervalo interior a um intervalo onde  $f(x)$  é contínua e de variação limitada.*

*Demonstração.* Podemos escrever  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ , onde  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  são contínuas e não decrescente. Então pela propriedade de continuidade uniforme, podemos encontrar  $\eta$  tal que

$$|f_1(x+h) - f_1(x)| < \epsilon \quad (|h| < \eta),$$

onde a escolha de  $\eta$  depende apenas de  $\epsilon$  e não do valor de  $x$  no intervalo. Referindo-se à demonstração do teste de Jordan, isto implica a convergência uniforme da integral tratada na sua demonstração. Temos também que demonstrar que as partes da integral de Dirichlet que mostramos tender à zero realmente tendem uniformemente a zero.

### 3.1 O Fenômeno de Gibbs

Defina  $G(x)$  por  $G(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} v}{v} dv$ . Observe que as integrais de  $\frac{\operatorname{sen} v}{v}$  sobre os intervalos  $(k\pi, (k+1)\pi)$  decresce em valor absoluto e são de sinal alternados para  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Isto demonstra que a curva  $y = G(x)$  tem uma forma ondulatória com máximos em  $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ . Note que a soma parcial  $s_n(x)$  de  $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$  é  $\sum_{\nu=1}^n \frac{\operatorname{sen} \nu x}{\nu}$ ,  $0 < x < 2\pi$ , não converge uniformemente na vizinhança de  $x = 0$ ,  $\varphi(x)$  sendo descontínua neste ponto (veja o exercício 9)

$$s_n(x) + \frac{x}{2} = \int_0^x D_n(t) dt = \int_0^{nx} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt + O(1). \quad (3.8)$$

Conseqüentemente,  $s_n(x)$  são uniformemente limitado e

$$s_n(x) = \int_0^{nx} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt + R_n(x), \quad \text{com } |R_n(x)| < \epsilon \text{ se } |x| < \delta \text{ e } n > n_0(\epsilon). \quad (3.9)$$

Substituindo  $x = \frac{\pi}{n}$  em (3.9) segue-se que

$$s_n\left(\frac{\pi}{n}\right) \rightarrow G(\pi) > G(\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Concluimos que  $s_n(x)$  tende a  $\varphi(x)$  para cada  $x$  em  $0 < x < 2\pi$ , mais as curvas  $y = s_n(x)$  passando em  $x = 0$  têm pontos de acumulação no intervalo  $0 \leq y \leq G(\pi)$

$$\frac{G(\pi)}{G(\infty)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt = 1.179.$$

Chamamos este fenômeno "o fenômeno de Gibbs".

Isto pode ser descrito genericamente na seguinte maneira: Suponha que  $\{f_n(x)\}$  converge para  $x_0 < x \leq x_0 + h$  ao limite  $f(x)$  e  $f(x+0)$  existe. Suponha que quando  $n \rightarrow +\infty$  e  $x \rightarrow x_0$  independentemente temos que

$$\overline{\lim} f_n(x) > f(x_0+0) \quad \text{ou} \quad \underline{\lim} f_n(x) < f(x_0+0),$$

então dizemos que  $\{f_n(x)\}$  exibe o fenômeno de Gibbs a direita.

**Proposição 1.** *Suponha que  $f(x)$  tem variação limitada. Então  $s(f)$  mostra o fenômeno de Gibbs em cada ponto de descontinuidade e somente nestes pontos.*

*Demonstração.* Suponha que  $f(x) = \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$  em cada ponto  $x$  e  $f(\xi+0)-f(\xi-0) = l \neq 0$ .  $\Delta x = f(x) - \frac{l}{\pi}\varphi(x-\xi)$  é contínua e  $s_n(\Delta)$  converge uniformemente.

O comportamento de  $S_n(x, f)$  perto de  $x = \xi$  é efetivamente determinado por  $s_n\left(\frac{l}{\pi}\varphi(x-\xi)\right)$  e  $s(f)$  demonstra o fenômeno de Gibbs. (Veja T. H. Gronwall Über die Gibbsche Erscheinung und die trigonometrischen summen  $\sin x + \dots + \frac{\sin nx}{n}$ . Math Annalen 72, 1912, 228-243. Veja também Hardy Pure Mathematics CUP examples LXXVI 9-10 ou Zygmund Trigonometric series CUP).

É curioso como idéias como esta volta a ser citado décadas após sua introdução. Numa controvérsia sobre modelagem de turbulência interpretando os modos altos de uma representação como escalas pequenas de movimento, o seguinte foi observado por Heywood e Rannacher em On the Question of Turbulence Modeling by Approximate Inertial Manifolds and the Nonlinear Galerkin Method (Siam J. Numerical Analysis 30, 1993, 1603-1621): "Se uma fronteira é presente, aproximações finitas de autofunções exibem o fenômeno de Gibbs de excesso espacial oscilatório perto da fronteira. Isto não é físico e certamente não é turbulência. É um artefato da representação" (tradução).

### Exemplo

Seja  $F(x) = \cos \alpha x$ ,  $\alpha \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Defina:

$$f(x) = \begin{cases} \cos \alpha x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ \cos \alpha(2\pi - x) & \text{se } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \pi a_n &= 2 \int_0^\pi \cos \alpha x \cos nx \, dx \\ &= \int_0^\pi [\cos(\alpha+n)x + \cos(\alpha-n)x] dx \\ &= (-1)^n \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\alpha^2 - n^2} \end{aligned}$$

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1^2} \cos x + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 2^2} \cos 2x - \dots \right) \quad (3.10)$$

Para  $x = t$ ,

$$\frac{\pi \cos \alpha\pi}{\sin \alpha\pi} = \pi \cot \alpha\pi = \frac{1}{\alpha} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 2^2} + \dots \quad (3.11)$$

Tomando  $x = 0$  em (3.10),

$$\frac{\pi}{\sin \alpha\pi} = \frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 2^2} - \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 3^2} + \dots \quad (3.12)$$

e subtraindo (3.12) de (3.11),

$$\pi \frac{1 - \cos \alpha\pi}{\sin \alpha\pi} = \pi \tan \frac{\alpha\pi}{2} = -\frac{4\alpha}{\alpha^2 - 1} - \frac{4\alpha}{\alpha^2 - 3^2} - \frac{4\alpha}{\alpha^2 - 5^2} - \dots$$

## 3.2 Somatório de Séries Usando Médias Aritméticas

Vamos estudar as propriedades de convergência da média das somas parciais

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}.$$

Se  $s_n \rightarrow s$ , claramente  $\sigma_n \rightarrow s$ , porque se  $s_n = s + \delta$ , então

$$\sigma_n = s + \frac{\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n}{n} \rightarrow s.$$

Uma série para a qual  $\sigma_n$  tende a um limite é dita  $(C, 1)$ .

Foi descoberto por Fejér que o método de somatório por média aritmética se aplica bem no caso das séries de Fourier.

Escrevemos

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_2 + \dots + s_{n-1}}{n},$$

então

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \frac{1}{2}u + \sin \frac{3}{2}u + \dots + \sin \frac{(n-1)}{2}u}{\sin \frac{1}{2}u} \{f(x+u) + f(x-u)\} du \\ &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{nu}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}} \{f(x+u) + f(x-u)\} du. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Esta fórmula (3.13) é conhecida como a integral de Fejér. Sua importância reside na positividade do fator  $\frac{\sin^2 \frac{nu}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}}$ . No caso especial  $f(x) = 1$ , obtemos

$$1 = \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{nu}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}} 2du$$

porque  $\sigma_n = 1$  para  $n > 0$ .

Então multiplicando por  $s$  e subtraindo

$$\sigma_n - s = \frac{1}{2\pi n} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{nu}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}} \{f(x+u) + f(x-u) - 2s\} du. \quad (3.14)$$

Uma condição necessária e suficiente para que a série convirja  $(C, 1)$  a  $s$  é que (3.14) tenda a zero. No problema de convergência podemos simplificar a condição.

Escrevemos

$$\varphi(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2s.$$

Então se  $\delta$  é qualquer número positivo menor que  $\pi$ , a condição necessária e suficiente para que a série convirja  $(C, 1)$  a  $s$  é que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^\delta \frac{\sin^2 \frac{nu}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}} \varphi(u) du = 0, \quad (3.15)$$

porque, claramente,

$$\left| \frac{1}{n} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{nu}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{u}{2}} \varphi(u) du \right| \leq \frac{1}{n} \int_{\delta}^{\pi} \frac{|\varphi(u)|}{\operatorname{sen}^2 \frac{u}{2}} du \longrightarrow 0.$$

Finalmente podemos por a condição na forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^{\delta} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{u}{2}}{u^2} \varphi(u) du = 0, \quad (3.16)$$

porque

$$\left| \frac{1}{n} \int_0^{\delta} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} nu \left\{ \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{u}{2}} - \frac{1}{\left(\frac{u}{2}\right)^2} \right\} \varphi(u) du \right| \leq \frac{1}{n} \int_0^{\delta} \left\{ \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{u}{2}} - \frac{1}{\left(\frac{u}{2}\right)^2} \right\} |\varphi(u)| du \longrightarrow 0.$$

**O Teorema de Fejér:** *A série de Fourier de  $f(x)$  converge  $(C, 1)$  para a soma  $\frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\}$  para cada valor de  $x$  para o qual esta expressão tem significado. Em particular, a série converge  $(C, 1)$  para  $f(x)$  em cada ponto onde  $f(x)$  é contínua.*

*Demonstração.* Pondo  $s = \frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\}$  nas fórmulas acima, então  $\varphi(u) \longrightarrow 0$  com  $u$  e temos que demonstrar que (3.16) é verdadeira. Suponha que  $|\varphi(u)| \leq \epsilon$  para  $n \leq \eta$ . Então

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \int_0^{\delta} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{nu}{2}}{\left(\frac{u}{2}\right)^2} \varphi(u) du \right| &\leq \frac{4}{n} \int_0^{\eta} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{nu}{2}}{u^2} \epsilon du + \frac{4}{n} \int_{\eta}^{\delta} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{nu}{2}}{u^2} |\varphi(u)| du \\ &\leq \frac{4\epsilon}{n} \int_0^{\eta} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{nu}{2}}{u^2} du + \frac{4}{n} \int_{\eta}^{\delta} \frac{|\varphi(u)|}{u^2} du \\ &\leq 4I_1\epsilon + 4I_2, \end{aligned}$$

mas claramente,

$$\frac{1}{n} \int_0^{\eta} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{nu}{2}}{u^2} du = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{n\eta}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2} dv < \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2} dv.$$

Portanto  $I_1 < A\epsilon$ . Fixando o valor de  $\eta$ , claramente  $I_2 \longrightarrow 0$  com  $n \longrightarrow \infty$ .

**Corolário:** *A série de Fourier de  $f(x)$  converge uniformemente  $(C, 1)$  em qualquer intervalo dentro de um intervalo no qual  $f(x)$  é contínua.*

*Demonstração.*  $f(x)$  é uniformemente contínua em tal intervalo e conseqüentemente na demonstração acima escolha  $\eta$  dependendo apenas de  $\epsilon$  e não de  $x$ . O resultado é imediato.

**O Teorema de aproximação de Weierstrass:** *Seja  $f(x)$  contínua em  $(a, b)$  e  $\epsilon > 0$ . Então existe um polinômio  $p(x)$  tal que  $|f(x) - p(x)| < \epsilon$  para  $0 \leq x \leq b$ .*

*Demonstração.* Faremos uma transformação preliminar tal que o intervalo considerado seja  $(0, 2\pi)$ . Então pelo teorema anterior existe um polinômio trigonométrico  $\sigma_n(x)$  tal que  $|f(x) - \sigma_n(x)| < \frac{\epsilon}{2}$  no intervalo. Agora, em lugar de cada seno e cosseno em  $\sigma_n(x)$  tome um número suficiente de termos na série de Taylor obtendo um polinômio  $p(x)$  tal que  $|\sigma_n(x) - p(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$  no intervalo.

**O Teorema de Fejér-Lebesgue:** *A série de Fourier de  $f(x)$  converge  $(C, 1)$  a  $f(x)$ , para cada valor  $x$ , para o qual*

$$\int_0^t |f(x+u) - f(x)| du = O(t) \quad (3.17)$$

*Em particular converge  $(C, 1)$  a  $f(x)$  quase sempre.*

*Demonstração.* (3.17) é satisfeita quase sempre para funções integráveis no sentido de Lebesgue. Seja  $x$  um ponto onde (3.17) é satisfeita. Tome  $s = f(x)$  em (3.16). Então

$$\begin{aligned} \int_0^t |\varphi(u)| du &= \int_0^t |f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| du \\ &\leq \int_0^t |f(x+u) - f(x)| du + \int_0^t |f(x-u) - f(x)| du \\ &= O(t)? \end{aligned}$$

Seja  $\phi(t) = \int_0^t |\varphi(u)| du$  e dado  $\epsilon > 0$  escolheremos  $\eta$  tal que  $\phi(t) < \epsilon t$  para  $t \leq \eta$ . Supondo que  $n > \frac{1}{\eta}$  e escrevendo

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \frac{\sin \frac{nu}{2}}{u^2} \varphi(u) du &= \int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^\eta + \int_\eta^\delta \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Observamos que  $\sin^2 \theta \leq \theta^2$  implica que

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \left(\frac{n}{2}\right)^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(u) du < \frac{1}{4} \epsilon n, \\ |I_2| &\leq \int_{\frac{1}{n}}^\eta \frac{|\varphi(u)|}{u^2} du = \frac{\phi(\eta)}{\eta^2} - n^2 \phi\left(\frac{1}{n}\right) + 2 \int_{\frac{1}{n}}^\eta \frac{\phi(u)}{u^2} du \\ &< \frac{\epsilon}{n} + 2\epsilon \int_{\frac{1}{n}}^\eta \frac{du}{u^2} < \frac{\epsilon}{n} + 2\epsilon n < 3\epsilon n \end{aligned}$$

e finalmente

$$|I_3| \leq \frac{A}{\eta^2}.$$

Então

$$\left| \frac{1}{n} \int_0^\delta \frac{\sin \frac{nu}{2}}{u^2} \varphi(u) du \right| < \frac{\epsilon}{4} + 3\epsilon + \frac{A}{n\eta^2}$$

e o resultado segue se escolhermos primeiro  $\epsilon$ , depois  $\eta$  e finalmente  $n$ .

**Corolário:** *Uma série trigonométrica não pode ser a série de Fourier de duas funções (integráveis) que são diferentes em conjunto de medida positiva (séries no mesmo intervalo de convergência claramente.)*

*Demonstração.* Se a série é a série de Fourier de  $f$  e  $g$ , então  $\sigma_n \rightarrow f$  e  $\sigma_n \rightarrow g$  quase sempre. Isto implica que  $f = g$  quase sempre.

### 3.3 Integração da Séries de Fourier

**Teorema:** As séries de Fourier, se convergente ou não, podem ser integradas termo a termo entre alguns limites, ou seja, a soma das integrais dos termos separados é a integral da função de que a série é a série de Fourier.

*Demonstração.* Suponha que  $f(x)$  tenha os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ , e seja

$$F(x) = \int_0^x \left\{ f(t) - \frac{1}{2}a_0 \right\} dt.$$

Então  $F(x)$  é periódica, contínua e de variação limitada. Isto implica que  $F(x)$  pode ser expandida em séries de Fourier, ou seja,

$$F(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx),$$

convergente para todos os valores de  $x$ . Temos

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ F(x) \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ f(x) - \frac{1}{2}a_0 \right\} \sin nx dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = -\frac{b_n}{n}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ -F(x) \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ f(x) - \frac{1}{2}a_0 \right\} \cos nx dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{a_n}{n} \end{aligned}$$

□

( $F(2\pi) = F(0) = 0$ , definição de  $a_0$ ). Temos

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n}.$$

Pondo  $x = 0$ , obtemos

$$\frac{A_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

e

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx + b_n(1 - \cos nx)}{n}. \quad (3.18)$$

A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$  é convergente.

Esta observação permite a construção de séries trigonométricas convergentes que não são séries de Fourier. Por exemplo,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log n}$  converge para todos os valores de  $x$ , mas a série

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$  é divergente.

**Observação 12.** Se  $\varphi_n$  é uma função positiva de  $n$ , tendendo para zero monotonicamente quando  $n$  tende ao infinito e se existe uma constante  $A$  tal que  $\left| \sum_{i=1}^N u_n(x) \right| \leq A$  para todos os

valores de  $N$  e  $x$ , a série  $\sum_{i=1}^N \varphi_n u_n(x)$  é uniformemente convergente.

**Teorema:** Uma série de Fourier pode ser multiplicada por qualquer função contínua de variação limitada e integrada por partes termo a termo dentro de quaisquer limites finitos

*Demonstração.* Seja  $g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx$  uma função de variação limitada.

Sabemos que a série é limitada e convergente e conseqüentemente podemos multiplicar por qualquer função integrável  $f(x)$  e integrar termo a termo. Obtemos

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx = \frac{1}{2}a_0\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\alpha_n + b_n\beta_n, \quad (3.19)$$

onde  $a_n$  e  $b_n$  são os coeficientes de Fourier de  $f(x)$ .

**O teorema de Parseval:** Se  $f(x)$  é de variação limitada podemos por  $g(x) = f(x)$  em (3.19) e obter

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2. \quad (3.20)$$

(3.20) é conhecida como o Teorema de Parseval. Vamos obter este resultado sob condições mais fracas.

**A desigualdade de Bessel:** Seja  $f(x)$  uma função de classe  $L^2(0, 2\pi)$  com coeficientes de Fourier  $a_n, b_n$ . Então

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{m=1}^n a_m \cos mx + b_m \sin mx$$

pertence a  $L^2(0, 2\pi)$  também e

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x)^2 dx &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx + \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2) \\ &- \frac{a_0}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^n \int_0^{2\pi} (a_m \cos mx + b_m \sin mx) f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2). \end{aligned}$$

Mas a expressão a esquerda não é negativa. Disto segue que

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx \quad (\text{A desigualdade de Bessel.}) \quad (3.21)$$

Conseqüentemente a série

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2)$$

existe, e ainda

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx. \quad (3.22)$$

Vale a igualdade em (3.22) para funções de variação limitada e para funções contínuas.

*Demonstração.*  $\sigma_n(x) \rightarrow f(x)$  uniformemente, o que significa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x) - \sigma_n(x)) f(x) dx = 0.$$

Mas

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n-1} (a_m \cos mx + b_m \operatorname{sen} mx) \left(1 - \frac{m}{n}\right)$$

ou

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{m=1}^{n-1} (a_m^2 + b_m^2) \left(1 - \frac{m}{n}\right) \rightarrow 0.$$

Mas  $\sum (a_m^2 + b_m^2)$  é convergente o que implica que a identidade de Parseval é válida.

**O Teorema de Riesz-Fischer:** *Seja*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx \quad (3.23)$$

uma série trigonométrica tal que  $\sum (a_m^2 + b_m^2) < \infty$ . Então (3.23) é a série de Fourier de uma função  $f(x)$  de classe  $L^2$ . As somas parciais de (3.23) convergem na média em  $L^2$  a  $f(x)$ .

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (s_n(x) - s_m(x))^2 dx &= \int_0^{2\pi} \left( \sum_{\nu=m+1}^n a_\nu \cos \nu x + b_\nu \operatorname{sen} \nu x \right)^2 dx \\ &= \pi \sum_{\nu=m+1}^n a_\nu^2 + b_\nu^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando  $m, n \rightarrow \infty$ . Portanto  $s_n(x) \rightarrow f(x)$  em  $L^2$ . Mas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} s_n(x) \cos \nu x dx = \int_0^{2\pi} f(x) \cos \nu x dx$$

ou

$$\pi a_\nu = \int_0^{2\pi} f(x) \cos \nu x dx \quad n \geq \nu$$

ou ainda

$$a_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos \nu x dx.$$

Da mesma maneira

$$b_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} \nu x dx.$$

**Parseval para  $L^2$**

Seja  $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$  e seja a série de Fourier de  $f(x)$  na forma (3.23). Então  $s_n(x) \rightarrow g(x)$  em  $L^2$ . Mas, pelo teorema sobre unicidade  $f(x) = g(x)$  quase sempre. Finalmente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} s_n(x)^2 dx = \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx.$$

### 3.4 Funções não Diferenciáveis

Utilizando funções trigonométricas é possível fazer uma discussão da existência de funções contínuas não diferenciáveis. De um ponto de vista mais moderno, constatamos que esta questão pode ser encarada do ângulo da topologia métrica (classificação via categoria) ou da teoria da medida (processos estocásticos de Wiener). Mais recente ficou claro aos vínculo com a geometria fractal de curvas.

Primeiro observamos que é fácil dar uma função contínua que é não diferenciável em um único ponto. Tome, por exemplo,  $f(x) = |x|$ . Em  $x = 0$ , temos que

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} 1 = 1$$

e

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} -\frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} -1 = -1.$$

Isto demonstra que não obstante o fato que  $f$  é contínua na reta,  $f$  não é diferenciável no ponto  $x = 0$ . De funções desse tipo podemos construir funções  $f(x)$  contínuas que não são diferenciáveis em um conjunto enumerável, por exemplo, os racionais.

A construção de uma função contínua mas não diferenciável em todos os pontos é mais difícil e apresentamos o exemplo de Weierstrass, cujo grafo é de fato um dos primeiros exemplos de uma curva fractal.

**Teorema:** *Weierstrass Math Werke, Berlin Mayer e Mille 895 = "Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments die für Kenner Werth des letzteren einen restimmenten Differential quotienten besitzen 1872, não publicado até Werke, 1895"*

Seja  $b$  satisfazendo  $0 < b < 1$  e seja  $a$  um número inteiro positivo ímpar tal que  $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ .

Então a função  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$  é contínua na reta e não diferenciável em todos os pontos da reta.

*Demonstração.* Cada termo  $b^n \cos(a^n \pi x)$  é contínua em  $x$  e a série é majorada por  $\sum_0^{\infty} b^n$  uniformemente em  $x$ . Portanto segue-se que  $f(x)$  é bem definida e contínua. Fixe  $x$ , suponha que  $h \neq 0$  e considere

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n \cos \pi a^n (x+h) - b^n \cos \pi a^n (x)}{h} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} + \sum_{n=m}^{\infty} = S_m + R_m, \end{aligned}$$

para algum inteiro positivo  $m$ .

Pelo teorema do valor médio temos que

$$\begin{aligned} |\cos \pi a^n (x+h) - \cos \pi a^n x| &= | -h \pi a^n \text{sen}(\pi a^n (x + \theta_n h)) | \\ &= |h| |\pi a^n \text{sen} \pi a^n (x + \theta_n h')| \\ &= |h| \pi a^n. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |S_m| &\leq \sum_{n=0}^{m-1} b^n \frac{|\cos a^n \pi(x+h) - \cos a^n \pi x|}{|h|} \\ &\leq \sum_{n=0}^{m-1} \pi b^n a^n = \pi \frac{a^m b^m - 1}{ab - 1} \leq \frac{\pi a^m b^m}{ab - 1}. \end{aligned}$$

Agora consideramos o limite inferior para  $R_m$ . Escreva  $a^m x = \alpha_m + \xi_m$ , onde  $-\frac{1}{2} \leq \xi_m \leq \frac{1}{2}$  e ponha  $h = \frac{1-\xi_m}{a^m}$ . Então  $0 < h \leq \frac{3}{2a^m}$ . Para  $n \geq m$ ,

$$\begin{aligned} a^n \pi(x+h) &= a^{n-m} a^m \pi(x+h) \\ &= a^{n-m} \pi \alpha_{m+1}, \end{aligned}$$

e do fato que  $a$  é ímpar, segue-se que

$$\begin{aligned} \cos a^n \pi(x+h) &= \cos(a^{n-m} \pi \alpha_{m+1}) \\ &= (-1)^{a^{n-m} \pi \alpha_{m+1}} = (-1)^{\alpha_{m+1}}. \end{aligned}$$

Também, para  $n \geq m$ ,

$$\begin{aligned} \cos(a^m \pi x) &= \cos a^{n-m} \pi(\alpha_m - \xi_m) \\ &= \cos(a^{n-m} \pi \alpha_m) \cos(a^{n-m} \pi \xi_m) \\ &= (-1)^{\alpha_m} \cos(a^{n-m} \pi \xi_m). \end{aligned}$$

Agora, obtemos que

$$\begin{aligned} R_m &= \sum_m^{\infty} \frac{\cos(a^n \pi(x+h)) - \cos(a^n \pi x)}{h} \\ &= \frac{(-1)^{\alpha_{m+1}}}{h} \sum_{n=m}^{\infty} b^n (1 + \cos(a^{n-m} \pi \xi_m)). \end{aligned}$$

Notando que

$$\begin{aligned} -\frac{2r+1}{2} \pi &\leq (2r+1) \xi_m \pi \leq \frac{2r+1}{2} \pi, \\ -r\pi - \frac{\pi}{2} &\leq (2r+1) \xi_m \pi \leq r\pi + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

e que todos os termos em  $R_m$  são negativos, obtemos que

$$\begin{aligned} |R_m| &\geq \frac{b^m}{|h|} (1 + \cos(\pi \xi_m)) \\ &\geq \frac{b^m}{|h|} \\ &> \frac{2}{3} a^m b^m. \end{aligned}$$

Estas duas estimativas, superior para  $S_m$  e inferior para  $R_m$  demonstram que

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| &\geq |R_m| - |S_m| \\ &\geq \frac{2}{3} a^m b^m - \frac{\pi a^m b^m}{ab - 1} \\ &= a^m b^m \left\{ \frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab - 1} \right\} \end{aligned}$$

e da hipótese que  $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ , é claro que

$$a^m b^m \left\{ \frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} \right\} \rightarrow +\infty \quad \text{com } m \rightarrow \infty.$$

Isto demonstra que  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  não tem limite com  $h \rightarrow 0$  e  $f(x)$  não é diferenciável. Dado que  $x$  pode ser qualquer ponto, o teorema é estabelecido.

### 3.5 Transformadas Integrais

Seja  $f(x)$  definido no intervalo  $(-\pi\lambda, \pi\lambda)$  estendida pela periodicidade a  $(-\infty, \infty)$ .

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_n \cos \frac{nx}{\lambda} + b_n \sin \frac{nx}{\lambda} = s$$

com coeficientes

$$a_n = \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) \cos \frac{nt}{\lambda} dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) \sin \frac{nt}{\lambda} dt.$$

Sabemos que  $f=s$  sob uma variedade de condições e  $f = s$  em  $L^2$ (Riesz-Fischer). A expressão acima pode ser escrita na forma

$$s = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) dt + \sum_1^{\infty} \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) \cos \frac{n(x-t)}{\lambda} dt$$

e escrevendo  $u_n = \frac{n}{\lambda}$  e  $\phi(u_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) \cos(n(x-t)) dt$  derivamos a expressão

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n) \phi(u_n).$$

Heuristicamente então esperamos no limite  $\lambda \rightarrow \infty$  que

$$s = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} \cos n(x-t) f(t) dt.$$

Esta passagem ao limite pode se justificada e de fato exatamente isto é feito por Titchmarsh utilizando o método do círculo de Weyl e por Coddington e Levinson utilizando o método de transformadas. No presente curso é mais fácil prosseguir diretamente sua derivação.

**Primeiro Teorema de Inversão:** Suponha que  $f \in L^1(-\infty, \infty)$  e tem variação limitada na vizinhança de um intervalo de  $x$ . Então

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} \cos u(x-t) f(t) dt = \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0)).$$

**Demonstração:** Observe que  $\left| \int_0^u du \int_{-\infty}^{\infty} |\cos u(x-t)f(t)| dt \right| < \infty$   
 $(\leq |u| \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty)$ . Conseqüentemente, mudando a ordem de integração

$$\int_0^u du \int_{-\infty}^{\infty} \cos u(x-t)f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u(x-t)}{(x-t)} f(t)dt$$

Dado  $\epsilon > 0$ , escolhamos T tão grande que

$$\int_{-\infty}^{-T} |f(t)| dt < \epsilon \quad e \quad \int_T^{\infty} |f(t)| dt < \epsilon \quad e \quad T > |x| + 1.$$

Segue se que

$$\left| \int_{-\infty}^{-T} \frac{\sin u(x-t)}{x-t} f(t) dt \right| < \epsilon \quad e \quad \left| \int_T^{\infty} \frac{\sin u(x-t)}{x-t} f(t) dt \right| < \epsilon$$

para todos valores de u. Com T fixo, as integrais

$$\int_{-T}^{u-\delta} \frac{\sin u(x-t)}{x-t} f(t) dt \quad e \quad \int_{\eta+\delta}^T \frac{\sin u(x-t)}{x-t} f(t) dt$$

$\rightarrow 0$  com  $u \rightarrow \infty$  pelo lema de Riemann-Lebesgue. Finalmente observamos que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^u du \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x-t)f(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{\sin u(x-t)}{x-t} f(t)dt + o(1)$$

com  $u \rightarrow \infty$ . Mas o problema é agora reduzido a um caso considerado na teoria de séries de Fourier e o resultado segue-se imediatamente.  $\square$

Se f é par e f contínua a expressão acima tem a forma

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos xt \hat{f}(t) dt$$

e

$$\hat{f}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos xt f(t) dt.$$

Há uma relação recíproca das funções f e  $\hat{f}$  similarmente com

$$\hat{f}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin xt f(t) dt$$

no caso que f seja ímpar.

Defina  $\varphi : f \rightarrow \hat{f}$  com f como em  $\varphi$  é linear e é possível mostrar que  $\varphi f \in L^2(0, \infty)$  e  $\|\varphi f\| = \|f\|$ . Similarmente para  $s : f \rightarrow \hat{f}$ . Vamos utilizar também a notação

$$(\mathfrak{F}f)(f) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} du.$$

Subseqüentemente vamos mostrar que  $\mathfrak{F}$  é um operador linear unitário em  $L^2(-\infty, \infty)$ . Antes de fazer isto vamos demonstrar um outra versão do teorema de inversão (esta versão sendo válido q.s.).

**Segundo Teorema de Inversão** Seja  $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$  e  $\mathfrak{F}f \in L^1(\mathbb{R}^1)$  então  $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathfrak{F}f)(y) e^{ixy} dy$  q.s.

**Demonstração:** Defina  $h_\lambda(y) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{\lambda}{\lambda^2 + y^2}$  então  $\frac{1}{2\pi} \|h_\lambda\|_1 = 1$ . Observe que se  $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$  então

$$\begin{aligned} f * h_\lambda(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)h_\lambda(y)dy \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)dy \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|} e^{ity} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{it(x-y)} dy \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|} (\mathfrak{F}f)(t) e^{itx} dt \end{aligned}$$

Observando que  $|e^{-\lambda|t|} \mathfrak{F}f(t) e^{itx}| \leq |\mathfrak{F}f| \in L^1(\mathbb{R}^1)$  podemos passar ao limite o lado direito com  $\lambda \rightarrow 0$  por argumentos bem conhecidos. Agora  $f * h_\lambda \rightarrow f$  em  $L^1$  com  $\lambda \rightarrow 0$  o resultado segue-se.  $\square$

Agora demonstraremos a unicidade, quer dizer: Se  $f \in L^1$  e  $\mathfrak{F}f = 0$  q.s. em  $\mathbb{R}^1$  então  $f = 0$  q.s.. Pelo teorema de inversão  $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathfrak{F}f)(y) e^{ixy} dy = 0$  q.s. (a integral  $\int_{-\infty}^s 0 = 0$ ).

### 3.5.1 Convoluções

A convolução de duas funções definidas em  $\mathbb{R}^1$   $f$  e  $g$ ,  $f * g$ , é dada pela expressão

$$f * g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi - \eta)g(\eta)d\eta.$$

Suponha que  $f(\xi) = (\mathfrak{F}F)(\xi)$  e  $g(\eta) = (\mathfrak{F}G)(\eta)$ . Observe que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi - \eta)g(\eta)d\eta &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)d\eta \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-ix(\xi-\eta)} dx \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-ix\xi} dx \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) e^{ix\eta} d\eta & \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)G(x) e^{-ix\xi} dx, & \end{aligned}$$

dado que a mudança de ordem de integração é justificada utilizando o Teorema de Inversão de transformadas de Fourier. Segue-se que

$$\mathfrak{F}(FG) = \mathfrak{F}F * \mathfrak{F}G.$$

Em particular, pondo  $G = \overline{F}$  e  $x = 0$ , obtemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{F}F(\eta)|^2 d\eta,$$

a identidade de Parseval.

### 3.5.2 Transformadas de Derivadas

$$\mathfrak{F}\left(\frac{d^r F}{dx^r}\right)(\xi) = (-i\xi)^r (\mathfrak{F}F)(\xi).$$

Considere

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}F')(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} F'(x) dx \\ &= \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ix\xi} F(x) \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} (e^{ix\xi}) F(x) dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi F(x) e^{-ix\xi} dx = i\xi \mathfrak{F}F(\xi), \end{aligned}$$

dado que  $F(x) \rightarrow 0$  com  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Aplicando este resultado  $r$  vezes, supondo que

$$F^{(j)}(x) \rightarrow 0 \quad \text{com} \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad j = 0, 1, \dots, r-1$$

obtemos o resultado. Observe que se  $\varphi = \sum_{j=0}^r c_j F^{(j)}(x)$ , então

$$(\mathfrak{F}\varphi)(\xi) = \left( \sum_{j=0}^r c_j (-i\xi)^j \right) \mathfrak{F}F(\xi).$$

### 3.5.3 Transformadas de Fourier em Várias Variáveis

Em várias variáveis definimos,

$$(\mathfrak{F}F)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} F(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

com  $x\xi = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$ . A convolução

$$(F * G)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y) G(y) dy_1 dy_2 \dots dy_n.$$

Se  $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$ ,  $\partial_j = \frac{\partial}{\partial_j}$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\partial^\alpha F)(\xi) &= (-i\xi_1)^{\alpha_1} \dots (-i\xi_n)^{\alpha_n} (\mathfrak{F}F)(\xi) \\ &= (-i)^{|\alpha|} \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} (\mathfrak{F}F)(\xi). \end{aligned}$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\Delta F)(\xi) &= -\xi^2 \mathfrak{F}F(\xi) \\ \mathfrak{F}(\text{div curl } F) &= -i(\xi_1 \mathfrak{F}(\text{curl } F)_1 + \xi_2 \mathfrak{F}(\text{curl } F)_2 + \xi_3 \mathfrak{F}(\text{curl } F)_3) \\ &= (-i)^3 (\xi_1 (\xi_2 \hat{F}_3 - \xi_3 \hat{F}_2) - \xi_2 (\xi_1 \hat{F}_3 - \xi_3 \hat{F}_1) + \xi_3 (\xi_1 \hat{F}_2 - \xi_2 \hat{F}_1)) \\ &= 0 \\ \mathfrak{F}(F * G)(\xi) &= \mathfrak{F}F(\xi) \mathfrak{F}G(\xi). \end{aligned}$$

Considere a transformada  $(\mathfrak{F}F)(\xi_1, \xi_2)$  de  $F$  que é função de  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ,

$$(\mathfrak{F}F)(\xi_1, \xi_2) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(r) e^{i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} dx_1 dx_2.$$

Coloque  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$ ,  $\xi_1 = \rho \cos \phi$ ,  $\xi_2 = \rho \sin \phi$ . Então  $dx_1 dx_2 = r dr d\theta$  e  $\xi \cdot x = r \rho \cos(\theta - \phi)$ . Segue-se que

$$(\mathfrak{F}F)(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r f(r) dr \int_0^{2\pi} e^{i\rho r \cos(\theta - \phi)} d\theta.$$

Pela periodicidade

$$\int_0^{2\pi} e^{i\rho r \cos(\theta - \phi)} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{i\rho r \cos \theta} d\theta.$$

É possível demonstrar que

$$\int_0^{2\pi} e^{i\rho r \cos \theta} d\theta = 2\pi J_0(\rho r).$$

Concluimos que

$$F(\xi_1, \xi_2) = F(\rho) = \int_0^{\infty} r F(r) J_0(\rho r) dr.$$

$\int_0^{\infty} r F(r) J_0(\rho r) dr$  é a transformada de Hankel de ordem zero da função  $F(r)$ .

Pelo teorema de Inversão de Fourier para transformadas em várias variáveis, sabemos que

$$F(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \rho F(\rho) d\rho \int_0^{2\pi} e^{-i\rho r \cos(\theta - \phi)} d\phi,$$

e como anteriormente,

$$F(r) = \int_0^{\infty} \rho F(\rho) J_0(\rho r) d\rho,$$

dando a inversão da transformada de Hankel.

Existe uma extensão a  $n > 2$  dimensões. Suponha que  $F$  é radial  $\mathbb{R}^n$  dimensões e ponha  $\rho^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$ ,  $\xi_i = \rho \alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $y_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ ,  $y_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} x_i$ ,  $j = 2, 3, \dots, n$ , com  $\alpha_{ij}$  sendo escolhido a fazer a transformação ortogonal. Então  $dx_1 dx_2 \dots dx_n = dy_1 dy_2 \dots dy_n$  e  $\xi \cdot x = \rho \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \rho y_1$ . Ponha  $\lambda^2 = y_2^2 + \dots + y_n^2$  e observe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 \dots dy_n = \omega_{n-1} \int_0^{\infty} \lambda^{n-2} d\lambda,$$

de fato, do cálculo sabemos que  $\omega_{n-1} = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$ . Podemos calcular a transformada de Fourier  $\mathfrak{F}F$  na forma

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}F)(\xi_1, \dots, \xi_n) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_0^{\infty} \omega_{n-1} \lambda^{n-2} F(\sqrt{y_1^2 + \lambda^2}) e^{i\rho y_1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_0^{\infty} F(\sqrt{y_1^2 + \lambda^2}) \lambda^{n-2} e^{i\rho y_1} d\lambda. \end{aligned}$$

Substitui  $\lambda = r \sin \phi$  e  $y_1 = r \cos \phi$  para obter

$$(\mathfrak{F}F)(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\infty r^{n-1} F(r) dr \int_0^\infty (\sin \phi)^{n-2} e^{i\rho r \cos \phi} d\phi.$$

É possível demonstrar que

$$\int_0^\infty (\sin \phi)^{n-2} e^{i\rho r \cos \phi} d\phi = \frac{2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{(\rho r)^{\frac{n}{2}-1}} J_{\frac{n}{2}-1}(\rho r).$$

Segue-se que

$$\rho^{\frac{n}{2}-1} (\mathfrak{F}F)(\rho) = \int_0^\infty r (r^{\frac{n}{2}-1} F(r)) J_{\frac{n}{2}-1}(\rho r) dr,$$

isto é dizer que  $\rho^{\frac{n}{2}-1} (\mathfrak{F}F)(\rho)$  é a transformada de Hankel de ordem  $\frac{n}{2} - 1$  da função  $r^{\frac{n}{2}-1} F(r)$ . Do Teorema de Inversão de Fourier e análise similar daquela acima concluímos que

$$F(r) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty (\mathfrak{F}F)(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi_1 \dots d\xi_n$$

e

$$r^{\frac{n}{2}-1} F(r) = \int_0^\infty \rho (\rho^{\frac{n}{2}-1} F(\rho)) J_{\frac{n}{2}-1}(\rho r) d\rho.$$

Isto demonstra que a teoria de transformadas de Fourier em  $n$ -dimensões reduz no caso de funções radiais a uma teoria em uma dimensão da transformada de Hankel.

### 3.5.4 \* Teorema de Inversão de Hankel

A fórmula estabelecida sugere que uma teoria paralela a transformada de Fourier deverá aplicar a transformada de Bessel e, de fato, isto é o caso.

**Proposição 2.** (Teorema de Inversão de Hankel)

Se  $f \in L^1(0, \infty)$  e de variação limitada perto de  $x$ , então para  $\nu \geq -\frac{1}{2}$  temos

$$\frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0)) = \int_0^\infty J_\nu(xu) \sqrt{xu} du \int_0^\infty J_\nu(uy) \sqrt{uy} f(y) dy \quad (3.24)$$

*Demonstração.* O resultado é não trivial e novamente depende do teorema de Riemann-Lebesgue. Seguimos a discussão de Titchmarsh (Theory of the Fourier Integral). Seja  $\delta$  positivo e pequeno. Então

$$\begin{aligned} & \int_0^\lambda J_\nu(xu) \sqrt{xu} du \int_0^{x-\delta} J_\nu(uy) \sqrt{uy} f(y) dy = \\ & = \sqrt{x} \int_0^{x-\delta} \sqrt{y} f(y) dy \int_0^\lambda J_\nu(xu) J_\nu(uy) u du \\ & = \sqrt{x} \lambda \int_0^{x-\delta} \frac{x J_{\nu+1}(\lambda x) J_\nu(\lambda y) - y J_{\nu+1}(\lambda y) J_\nu(\lambda x)}{x^2 - y^2} \sqrt{y} f(y) dy \quad (\text{Veja apêndice C}) \quad (3.25) \\ & = O(\sqrt{\lambda}) \int_0^{x-\delta} J_\nu(\lambda y) \frac{\sqrt{y} f(y) dy}{x^2 - y^2} + O(\sqrt{\lambda}) \int_0^{x-\delta} J_{\nu+1}(\lambda y) \frac{y^{\frac{3}{2}} f(y) dy}{x^2 - y^2}, \quad (3.26) \end{aligned}$$

para  $x$  fixo,  $f$  fixa.

Observe que

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{\lambda}} J_\nu(\lambda y) \frac{\sqrt{y} f(y) dy}{x^2 - y^2} &= O\left(\int_0^{\frac{1}{\lambda}} (\lambda y)^\nu |f(y)| dy\right) \\ &= O\left(\lambda^\nu \int_0^{\frac{1}{\lambda}} y^{\nu+\frac{1}{2}} |f(y)| dy\right) \\ &= O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{\lambda}} |f(y)| dy\right) = O(\lambda^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Para  $\lambda y \geq 1$

$$J_\nu(\lambda y) = \frac{A \cos \lambda y + B \sin \lambda y}{(\lambda y)^{\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{1}{(\lambda y)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

O termo correspondendo a  $O(\cdot)$  faz uma contribuição

$$O\left(\lambda^{-\frac{3}{2}} \int_{\frac{1}{\lambda}}^{x-\delta} \frac{|f(y)| dy}{y}\right) = O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} |f(y)| dy\right) + O\left(\lambda^{-1} \int_{\frac{1}{\lambda}}^{x-\delta} |f(y)| dy\right) = O(\lambda^{-\frac{1}{2}})$$

pelo teorema de Riemann-Lebesgue. O segundo termo em (3.26) é tratado da mesma maneira. Assim, (3.25)  $\rightarrow 0$  com  $\lambda \rightarrow \infty$ . Pela convergência uniforme da integral em  $y$  podemos inverter a ordem de integração em

$$\int_0^\lambda J_\nu(xu) \sqrt{xu} du \int_{x+\delta}^\infty J_\nu(uy) \sqrt{uy} (f(y)) dy$$

e novamente este termo tende a zero por um argumento similar mas mais simples.

Podemos supor que  $\delta$  é suficientemente pequeno para garantir que  $t$  é de variação limitada em  $(x - \delta, x + \delta)$ . Segue-se que também é  $y^{-\nu-\frac{1}{2}} f(y)$ . Escreva  $y^{-\nu-\frac{1}{2}} f(y) = x^{-\nu-\frac{1}{2}} f(x + 0) + X_1(y) + X_2(y)$ ,  $X_1, X_2 \geq 0$ , crescente e menor que  $\epsilon$ . Então,

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda J_\nu(xu) \sqrt{xu} du \int_x^{x+\delta} J_\nu(uy) \sqrt{uy} f(y) dy \\ = \sqrt{x} \int_0^\lambda J_\nu(xu) u du \int_x^{x+\delta} J_\nu(uy) y^{\nu+1} \left(x^{-\nu-\frac{1}{2}} f(x + 0) + X_1(y) + X_2(y)\right) dy. \end{aligned}$$

O primeiro termo dentro dos parênteses contribui

$$\begin{aligned} x^{-\nu} f(x + 0) \int_0^\lambda J_\nu(xu) \left(J_{\nu+1}((x + \delta)u) (x + \delta)^{\nu+1} - J_{\nu+1}(xu) x^{\nu+1}\right) du \\ \rightarrow x^{-\nu} f(x + 0) \left(x^\nu - \frac{1}{2} x^\nu\right) = \frac{1}{2} f(x + 0). \end{aligned}$$

utilizando uma identidade (Titchmarsh, Theory of the Fourier Integral)

$$\int_0^\infty J_\nu(ax) J_{\nu+1}(x) dx = \begin{cases} a^\nu, & 0 < a < 1, \\ \frac{1}{2}, & a = 1, \\ 0, & a > 1. \end{cases}$$

O segundo termo faz uma contribuição

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} \int_0^\lambda J_\nu(xu) u du &= \int_x^{x+\delta} J_\nu(uy) y^{\nu+1} X_1(y) dy \\
&= \sqrt{x} \int_x^{x+\delta} X_1(y) y^{\nu+1} dy \int_0^\lambda J_\nu(xu) J_\nu(uy) u du \\
&= \sqrt{x} X_1(x+\delta) \int_\xi^{x+\delta} y^{\nu+1} dy \int_0^\lambda J_\nu(xu) J_\nu(uy) u du, \\
&\quad (x < \xi < \delta, \text{ utilizando o teorema do valor médio}) \\
&= \sqrt{x} X_1(x+\delta) \int_0^\lambda J_\nu(xu) \left( (x+\delta)^{\nu+1} J_{\nu+1}((x+\delta)u) - \xi^{\nu+1} J_{\nu+1}(\xi u) \right) du.
\end{aligned}$$

Para  $x \geq x_0 > 0$ ,  $y \geq x_0$ ,

$$\begin{aligned}
\int_0^\lambda J_\nu(xu) J_{\nu+1}(yu) du &= O(1) + \frac{2}{\pi} \int_1^\lambda \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \frac{du}{\sqrt{xyu}} \\
&\quad + \int_1^\lambda O\left(\frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\right) du = O(1)
\end{aligned}$$

para todo  $\lambda$ . Este termo faz contribuição  $O(\epsilon)$ . O mesmo vale para o termo  $X_2$ . A proposição segue escolhendo  $\delta$  suficientemente pequeno e após  $\lambda$  suficientemente grande.  $\square$

### 3.5.5 Aplicações da Transformada de Fourier

Considere a transformada de Fourier da função  $e^{-ktx^2}$ . Calculamos a transformadas em duas maneiras, utilizando o teorema de Cauchy e por um cálculo direto. Ambos os cálculos no fim estão baseados no resultado conhecido de cálculo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = 2 \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \sqrt{\pi}.$$

Primeiro observe que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \left\{ e^{-ktx^2} \right\} (\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ktx^2} e^{i\xi x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kt\left(x - \frac{i\xi}{2kt}\right)^2} e^{-\frac{\xi^2}{4kt}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{4kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ktx^2} dx \\
&\quad (\text{utilizando o teorema de Cauchy}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2kt}} e^{-\frac{\xi^2}{4kt}}
\end{aligned}$$

O segundo método depende sobre o fato que

$$I(0) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Segue-se por diferenciação em  $\alpha$  que

$$\frac{d^n I(\alpha)}{d\alpha^n} = (-1)^n \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^{2n} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdots \left(-\frac{(2n+1)}{2}\right) \alpha^{(-\frac{(2n+1)}{2})}$$

e que

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{(4\alpha)^n}.$$

Assim, calculamos

$$\begin{aligned} I(\alpha, \beta) &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x dx \\ &= \int_0^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} \sum_0^{\infty} \frac{(-\beta^2 x^2)^n}{(2n)!} \\ &= \sum_0^{\infty} \frac{(-\beta^2)^n}{(2n)!} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n} dx \\ &= \sum_0^{\infty} \frac{(-\beta^2)^n}{(2n)!} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{(4\alpha)^n} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{-\beta^2}{4\alpha} \right)^n \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}. \end{aligned}$$

Agora observe que

$$\mathcal{F} \left( e^{-ktx^2} \right) (\xi) = 2 \int_0^{\infty} e^{-ktx^2} \cos \xi x dx$$

e aplique o resultado acima.

Em geral, transformadas de Fourier podem ser calculadas ou encontradas em tabelas na literatura. Para conveniência, indicamos uma lista de transformadas no apêndice F.

Consideramos algumas aplicações da teoria de transformadas de Fourier.

Considere o problema de evolução para a equação de calor

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0. \\ T(x, 0) &= f(x) \end{aligned}$$

Tomando a transformada de Fourier obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}T}{\partial t} &= -k\xi^2 \mathcal{F}T \\ (\mathcal{F}T)(\xi, 0) &= (\mathcal{F}f)(\xi), \end{aligned}$$

que tem a solução

$$(\mathcal{F}T)(\xi, t) = (\mathcal{F}f)(\xi) e^{-k\xi^2 t}.$$

Do teorema de inversão e o resultado sobre convoluções (3.5.1) junto com o resultado demonstrado no começo da seção obtemos

$$T(x, t) = \frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\pi t}} dy.$$

Um exemplo um pouco mais complexo é dado pelo problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0. \\ T(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Novamente tomando a transformada de Fourier nesta equação com respeito a variável  $x$  obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{F}T}{\partial t}(\xi, t) &= -k\xi^2(\mathcal{F}T)(\xi, t) + (\mathcal{F}f)(\xi, t) \\ (\mathcal{F}T)(\xi, 0) &= 0.\end{aligned}$$

Resolvendo esta equação

$$(\mathcal{F}T)(\xi, t) = \int_0^t e^{-k(t-\tau)\xi^2} (\mathcal{F}f)(\xi, \tau) d\tau.$$

Utilizando o Segundo Teorema de Inversão (seção 3.5.1), obtemos

$$\begin{aligned}T(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \left( \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-k\xi^2(t-\tau)} \right\} * f(\cdot, \tau) \right) (x) d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int_0^t \frac{dz}{(t-z)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} f(y, \tau) dy,\end{aligned}$$

um resultado obtido por outros meios na seção 2.5.

Consideramos agora um problema utilizando transformadas seno (seção 3.5).

Considere o problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0. \\ T(x, 0) &= 0, \quad x > 0, \\ T(0, t) &= T_0, \quad t > 0.\end{aligned}$$

Seja

$$(\mathcal{S})(\xi, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} T(x, t) \sin(\xi x) dx.$$

Então, integrando por partes e utilizando  $T(0, t) = T_0$  e  $T(\infty, t) = 0$ <sup>1</sup> observamos que

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \sin \xi x dx = \xi T_0 - \xi^2 \int_0^{\infty} T(x, t) \sin \xi x dx.$$

Multiplicando a equação para  $T$  por  $\sin \xi x$  e integrando de 0 a  $\infty$  obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \mathcal{S}T + k\xi^2 \mathcal{S}T &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} k\xi T_0, \\ (\mathcal{S}T)(\xi, 0) &= 0.\end{aligned}$$

Resolvendo esta equação obtemos

$$\mathcal{S}T = (\xi, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{1 - e^{-k\xi^2 t}}{\xi} \right) T_0$$

e via o teorema de inversão para transformadas seno

$$T(x, t) = \frac{2}{\pi} T_0 \int_0^{\infty} \frac{\sin \xi x}{\xi} \left( 1 - e^{-k\xi^2 t} \right) d\xi.$$

---

<sup>1</sup>Esta condição pode ser considerada uma condição de fronteira ao infinito.

Mas é possível estabelecer que

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi^2} \frac{\sin 2\xi y}{\xi} d\xi = \frac{1}{2}\pi \operatorname{erf} y,$$

onde

$$\operatorname{erf} y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-y^2} dy$$

e, finalmente, obtemos que

$$\begin{aligned} T(x, t) &= T_0 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} T_0 \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-y^2} dy \\ &= \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} e^{-y^2} dy, \end{aligned}$$

um resultado obtido por outros meios (seção 2.5.1). Evidentemente não estamos restritos aos problemas de natureza parabólica.

Voltamos a abordar o problema da equação da onda

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ y(x, 0) &= f(x) \\ \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) (x, 0) &= g(x). \end{aligned}$$

Ponha

$$\begin{aligned} Y(\xi, t) &= (\mathcal{F}y)(\xi, t) \\ Y(\xi, 0) &= \mathcal{F}f \\ \left( \frac{dY}{dt} \right) (\xi, 0) &= \mathcal{F}g. \end{aligned}$$

Tomando a transformada de Fourier da equação

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{d^2 Y}{dt^2} + \xi^2 Y &= 0 \\ Y(0) &= \mathcal{F}f = F \\ \left( \frac{dY}{dt} \right) (0) &= \mathcal{F}g = G. \end{aligned}$$

Segue-se que a solução deste problema é

$$Y = \frac{1}{2} F(\xi) (e^{ict\xi} + e^{-ict\xi}) + \frac{G(\xi)}{2ic\xi} (e^{ict\xi} - e^{-ict\xi}).$$

Tomando a transformada de Fourier inversa obtemos que

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) (e^{-i\xi(x-ct)} + e^{-i\xi(x+ct)}) d\xi \right) + \\ &+ \frac{1}{2c} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\xi)}{i\xi} (e^{-i\xi(x-ct)} - e^{-i\xi(x+ct)}) d\xi \right) \end{aligned}$$

mas

$$f(x \pm ct) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{i\xi(x \pm ct)} d\xi$$

e

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

e

$$\int_{x-ct}^{x+ct} g(\eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\xi)}{i\xi} (e^{-i\xi(x-ct)} - e^{-i\xi(x+ct)}) d\xi.$$

Segue-se que

$$y(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\eta) d\eta,$$

obtido por outros meios na seção 2.6.

Outros problemas vibratórios podem ser tratados com a mesma técnica. Considere o problema de vibrações livres transversais de uma barra infinita. A equação que governa o problema é

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= 0, \quad t > 0, x \in (-\infty, \infty) \\ y(x, 0) &= f(x) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) &= ag''(x). \end{aligned}$$

Tomando a transformada de Fourier e pondo  $Y = \mathcal{F}y$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \frac{\xi^4}{a^2} Y &= 0 \\ Y(0) &= \mathcal{F}f = F(\xi) \\ \frac{\partial Y}{\partial t}(0) &= -a\xi^2 G(\xi). \end{aligned}$$

tendo a solução

$$Y(\xi, t) = F(\xi) \cos(a\xi^2 t) - G(\xi) \sin(a\xi^2 t).$$

Tomando a transformada inversa de Fourier

$$y(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \cos(a\xi^2 t) e^{-i\xi x} d\xi - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi) \sin(a\xi^2 t) e^{-i\xi x} d\xi.$$

Lembre que no  $\infty$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 a - i\xi x} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a}}$$

e

$$\frac{1}{(2ai)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(2a)^{\frac{1}{2}}} e^{-i\frac{1}{4}\pi} = \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}} (1 - i).$$

Segue-se que substituindo  $a$  por  $ai$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(a\xi^2 t) - \sin(a\xi^2 t)) e^{-i\xi x} d\xi = \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}} (1 - i) e^{i\frac{x^2}{4a}}.$$

Tomando as partes real e imaginária nesta equação obtemos que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(a\xi^2) e^{-i\xi x} d\xi = \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}} \left( \cos \frac{x^2}{4a} + \sin \frac{x^2}{4a} \right)$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(a\xi^2) e^{-i\xi x} d\xi = \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}} \left( \cos \frac{x^2}{4a} - \sin \frac{x^2}{4a} \right).$$

Utilizando o resultado sobre convoluções obtemos que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \cos(a\xi^2 t) e^{-i\xi t} d\xi = \frac{1}{2\sqrt{at}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \left\{ \cos \frac{y^2}{4a} + \sin \frac{y^2}{4a} \right\} dy$$

com um resultado semelhante no caso de  $G$ . Finalmente,

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{1}{2(2\pi at)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \left( \cos \frac{y^2}{4a} + \sin \frac{y^2}{4a} \right) dy - \\ &- \frac{1}{2(2\pi at)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) \left( \cos \frac{y^2}{4a} - \sin \frac{y^2}{4a} \right) dy. \end{aligned}$$

Escrevendo  $u^2 = \frac{y^2}{4at}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - 2ua^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}) (\cos u^2 + \sin u^2) du - \\ &- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x - 2ua^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}) (\sin u^2 - \cos u^2) du, \end{aligned}$$

um resultado estabelecido por Boussinesq.

### 3.5.6 \*Transformada de Fourier e Hankel na teoria de dinâmica dos fluidos

Considere o fluxo de um fluido ideal, irrotacional e bidimensional na região  $y \geq 0$ . O potencial de velocidade  $\phi$  satisfaz

$$\Delta\phi = 0.$$

Supomos que fluido é injetado no semi-plano através da fenda  $|x| \leq a$  do plano  $y = 0$ , normalmente e com velocidade determinada:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \begin{cases} -f(x) & 0 < |x| < a \\ 0 & |x| > a. \end{cases}$$

Vamos supor que  $(u, v) \rightarrow 0$  com  $y \rightarrow \infty$ . Seja

$$\Phi(\xi, y) = \mathcal{F}_x \phi(0, y), \quad F(\xi) = \mathcal{F}f.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \xi^2 \Phi &= 0 \quad y \geq 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}(\xi, 0) &= -F(\xi) \end{aligned}$$

com solução

$$\Phi = \frac{F(\xi)}{|\xi|} e^{-|\xi|y}.$$

O teorema de inversão de transformada de Fourier implica em

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi)}{|\xi|} e^{i\xi x - |\xi|y} d\xi.$$

Considere o caso particular

$$f(u) = \begin{cases} U & 0 < |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

Neste caso

$$\phi = \frac{U}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \xi a}{\xi} \frac{e^{i\xi x}}{|\xi|} e^{-|\xi|y} d\xi$$

e

$$v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{U}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \xi a}{\xi} e^{-\xi|y| + i\xi x} d\xi.$$

Observe que

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin a\xi}{\xi} e^{-\xi y} d\xi = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right)$$

e

$$v = \frac{u}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2), \quad \tan \theta_1 = \frac{y}{x-a}, \quad \tan \theta_2 = \frac{y}{x+a}$$

Também,

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{iu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \xi a}{|\xi|} e^{i\xi x - |\xi|y} d\xi \\ &= \frac{u}{2\pi} \log \left( \frac{r_2}{r_1} \right), \end{aligned}$$

$$r_2 = (x+a)^2 + y^2, \quad r_1 = (x-a)^2 + y^2.$$

Considere o caso

$$v = \begin{cases} (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}, & 0 < |x| < a \\ 0 & |x| > a. \end{cases}$$

$$\phi = \text{constante}, \quad |x| \leq a, \quad |y| = 0 \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad |x| > a.$$

Neste caso

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^a \frac{e^{-i\xi x}}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \frac{\cos \xi x}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} J_0(a\xi). \quad (\text{Veja apêndice C}).$$

Segue-se que

$$\phi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_0(a\xi)}{|\xi|} e^{i\xi x - |\xi|y} d\xi$$

e

$$v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \int_0^{\infty} e^{-\xi y} J_0(a\xi) \cos \xi x d\xi$$

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \int_0^{\infty} e^{-\xi y} J_0(a\xi) \sin \xi x d\xi.$$

Além disso, observamos que no caso que  $y = 0$ ,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = - \int_0^\infty \sin \xi x J_0(a\xi) d\xi = 0 \quad |x| < a \quad (\text{Veja apêndice C})$$

o que implica que  $\phi$  é constante em  $y = 0$ ,  $|x| < a$ .

Considere o problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= 0 \\ \phi &= g(r) \quad r < a \\ \frac{\partial \phi}{\partial r} &= 0 \quad r > a \\ \phi &\rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Tomando a transformada de Bessel

$$\tilde{\phi} = \mathcal{F}\phi = \int_0^\infty r \phi(r, z) J_0(\xi r) dr,$$

obtemos que

$$\frac{d^2 \tilde{\phi}}{dz^2} - \xi^2 \tilde{\phi} = 0.$$

Tomamos uma solução na forma

$$\tilde{\phi} = A(\xi) e^{-\xi z}.$$

Segue-se que

$$\int_0^\infty r \frac{\partial \phi}{\partial z} J_0(\xi r) dr = -\xi A(\xi) e^{-\xi z}$$

e utilizamos o teorema de inversão de Hankel

$$\phi = \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi z} J_0(\xi r) dr, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = - \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi z} J_0(\xi r) dr$$

Escrevendo

$$\phi = \frac{r}{a}, \quad F(u) = uA\left(\frac{u}{a}\right) \quad G(\rho) = a^2 g(r)$$

obtemos

$$\int_0^\infty F(u) J_0(\rho u) du = \begin{cases} G(\rho) & 0 < \rho < 1 \\ 0 & \rho > 1 \end{cases}$$

e, claramente,

$$A(\xi) = \frac{F(a\xi)}{a\xi}.$$

Estas equações integrais duais podem ser abordadas via a teoria da transformação de Mellin que discutiremos a seguir. A solução é dada via  $F$ .

$$F(u) = \frac{2}{\pi} \cos u \int_0^1 \frac{gG(y) dy}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{y dy}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 G(yu) x u \sin x u du.$$

### 3.5.7 A transformada de Laplace

Considere  $f(x)$ ,  $x \in [0, \infty)$ . A transformada de Laplace de  $f$ ,  $\mathcal{L}(s)$  é definida via

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Considere  $f(t) = 1$ ,  $t > 0$

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

Para  $f(t) = e^{kt}$ ,  $t > 0$ ,  $k$  constante,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}f)(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{kt} dt = \frac{1}{k-s} e^{-(s-k)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{s-k}, \quad s > k. \end{aligned}$$

$$(\mathcal{L}t)(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Em geral

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}t^n)(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt, \quad \operatorname{Re} s > 0 \\ &= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^n d\tau, \quad \tau = st \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}, \end{aligned}$$

onde  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$  é a Função Gama. Seja  $f(t)$  uma função periódica com período  $a$ ,

$$f(t+a) = f(t), \quad t > 0.$$

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^{\infty} s^{-st} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{na}^{(n+1)a} e^{-st} f(t) dt, \quad s > 0.$$

Substituindo  $\tau = t - na$ ,  $f(\tau + na) = f(\tau)$ , obtemos

$$(\mathcal{L}f)(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nas} \left( \int_0^a e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \right).$$

Segue-se que

$$(\mathcal{L}f)(s) = \frac{\int_0^a e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-as}}.$$

Introduza a função  $M(t, c)$  (onda quadrada)

$$\begin{aligned} M(c, t) &= \begin{cases} 1 & 0 < t < c \\ -1 & c < t < 2c \end{cases} \\ M(c, t+2c) &= M(c, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2c} e^{-st} M(c, t) dt &= \int_0^c e^{-st} dt - \int_c^{2c} e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s} (1 - e^{-cs})^2\end{aligned}$$

$$(\mathcal{L}M(c, t))(s) = \frac{1 - e^{-cs}}{s(1 + e^{-cs})} = \frac{1}{s} \tanh \frac{cs}{2} \quad s > 0$$

$$\int_0^t M(c, \tau) d\tau = H(c, t),$$

onde

$$H(c, t) = \begin{cases} t & 0 < t < c \\ 2c - t & c < t < 2c \end{cases}$$

$$H(c, t + 2c) = H(c, t)$$

$$(\mathcal{L}H(c, t))(s) = \frac{1}{s^2} \tanh \frac{cs}{2} \quad s > 0.$$

Considere  $f(t) = t^{-\frac{3}{2}} \exp -\frac{k^2}{4t}$ ,

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}f)(s) &= \int_0^\infty e^{-\frac{k^2}{4t}} e^{-st} t^{-\frac{3}{2}} dt \\ &= \frac{4}{k} \int_0^\infty e^{-\tau^2} e^{-\frac{k^2 s}{4\tau^2}} d\tau, \quad \tau = \frac{k}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{4}{k} e^{-k\sqrt{s}} \int_0^\infty e^{-\left(\tau - \frac{t\sqrt{s}}{2\tau}\right)^2} d\tau.\end{aligned}$$

Coloque  $b = \frac{k\sqrt{s}}{2}$  e  $\frac{b}{\tau} = \lambda$ ,

$$\int_0^\infty e^{-\left(\tau - \frac{b}{\tau}\right)^2} d\tau = \int_0^\infty \frac{b}{\lambda^2} e^{-(\lambda - \frac{b}{\lambda})^2} d\lambda.$$

Segue-se que

$$2 \int_0^\infty e^{-\left(\tau - \frac{b}{\tau}\right)^2} d\tau = \int_0^\infty \left(1 + \frac{b}{\lambda^2}\right) e^{-(\lambda - \frac{b}{\lambda})^2} d\lambda.$$

Fazendo a substituição  $x = \lambda - \frac{b}{\lambda}$ ,

$$\int_0^\infty e^{-\left(\tau - \frac{b}{\tau}\right)^2} d\tau = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

e concluímos que

$$(\mathcal{L}f)(s) = \frac{2\sqrt{\pi}}{k} e^{-k\sqrt{s}}$$

ou

$$\left(\mathcal{L}\left(\frac{ke^{-\frac{k^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t^3}}\right)\right)(s) = e^{-k\sqrt{s}}, \quad k > 0 \quad s > 0. \quad (3.27)$$

Dado que multiplicando por  $t$  corresponde a diferenciação com respeito a  $t$  e mudança de sinal, obtemos da equação 3.27 que

$$\left(\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{k^2}{4t}}\right)\right)(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}e^{-k\sqrt{s}}, \quad k \geq 0 \quad s > 0. \quad (3.28)$$

Também da equação 3.27,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}e^{-k\sqrt{s}}\right) &= \frac{k}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{k^2}{4\tau}} \tau^{-\frac{3}{2}} d\tau \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{k}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{k}{2\sqrt{t}}} e^{-\lambda^2} d\lambda \\ &= 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right), \quad k \geq 0, \quad s > 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

**Proposição 3.** (*Derivadas*)

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^r f}{dx^r}\right)(s) = -\sum_0^{r-1} s^n f^{r-n-1}(0) + s^r(\mathcal{L}f)(s)$$

Considere

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^r f}{dx^r}\right)(s) = \int_0^{\infty} \frac{d^r f}{dx^r} e^{-sx} dx.$$

Integrando por partes,

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^r f}{dx^r}\right) = \frac{d^{r-1} f}{dx^{r-1}} e^{-sx} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} \frac{d^{r-1} f}{dx^{r-1}} e^{-sx} dx.$$

ou

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^r f}{dx^r}\right)(s) = f^{r-1}(0) + s\mathcal{L}\left(\frac{d^{r-1} f}{dx^{r-1}}\right)(s)$$

e iterando,

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^r f}{dx^r}\right)(s) = -\sum_{n=0}^{r-1} s^n f^{r-n-1}(0) + s^r(\mathcal{L}f)(s),$$

dando o resultado.

**Corolário 3.**

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f d\tau\right) = \frac{1}{s}(\mathcal{L}f)(s)$$

De fato,

$$(\mathcal{L}f)(s) = \mathcal{L}\left(\frac{d}{dt} \int_0^t f d\tau\right) = s\mathcal{L}\left(\int_0^t f d\tau\right),$$

ou

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f d\tau\right) = \frac{1}{s}(\mathcal{L}f)(s).$$

**Proposição 4.** (*Translação e Escala*)

$$\begin{aligned} \left( \mathcal{L}f \left( \frac{t}{\tau} \right) \right) (s) &= \tau(\mathcal{L}f)(\tau s) \\ (\mathcal{L}f(t - \tau))(s) &= e^{-s\tau}(\mathcal{L}f)(s) \end{aligned}$$

**Proposição 5.** (*s-diferenciação*)

$$(\mathcal{L}t^n f)(s) = (-1)^n \left( \frac{d}{ds} \right)^n (\mathcal{L}f)(s)$$

**Teorema 11.** (*Teorema de Inversão para transformada de Laplace*)

Suponha que  $f(x)$ ,  $x \in [0, \infty)$  satisfaz

$$\int_0^{\infty} e^{-cx} |f(x)| dx < \infty$$

para  $c > 0$ . Considere a função definida por

$$\begin{aligned} \bar{f}(r) &= e^{-\eta x} f(x), \quad x \in [0, \infty), \quad c > 0, \\ &= 0, \quad x \in (-\infty, 0) \end{aligned}$$

e suponha que  $\tilde{f}$  satisfaz as condições de um dos teorema de inversão anunciado na seção 3.5. Então,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta x} d\eta \int_0^{\infty} \tilde{f}(\xi) e^{-i\eta \xi} d\xi \\ &= \frac{e^{x\xi}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta x} d\eta \int_0^{\infty} \tilde{f}(\xi) e^{-(x+i\eta)\xi} d\xi \end{aligned}$$

Coloque  $s = x + i\eta$ , e

$$\phi(s) = \int_0^{\infty} f(\xi) e^{-s\xi} d\xi, \quad ds = id\eta,$$

obtendo

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \phi(s) e^{sx} ds$$

pelo menos formalmente. De fato, a derivação com rigor desta fórmula requer mais análise (veja, por exemplo, o livro de R. V. Churchill, Operational Mathematics, Mc Graw-Hill, New York, 1958).

Estabeleceremos algumas propriedades de transformada de Laplace. Utilizamos sistematicamente a notação

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx.$$

**Proposição 6.** (*Convoluções*)

Suponha que  $\phi(s) = \mathcal{L}f(s)$  e  $\psi(s) = \mathcal{L}g(s)$ , então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \phi(s)\psi(s)e^{sx} ds = \int_0^x f(y)g(x-y)dy.$$

Heuristicamente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \phi(s)\psi(s)e^{sx} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sx}\phi(s) ds \int_0^\infty g(y)e^{-sy} dy \\ &= \int_0^\infty g(y) dy \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{s(x-y)}\phi(s) ds. \end{aligned}$$

Mas

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \phi(s)e^{s(x-y)} ds = f(x-y)$$

e

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \phi(s)\psi(s)e^{sx} ds = \int_0^\infty g(y)f(x-y) dy.$$

Mas  $f(x-y) = 0$  se  $x-y < 0$ , ou se  $y > x$  e concluímos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \phi(s)\psi(s)e^{sx} ds = \int_0^x g(y)f(x-y) dy.$$

Fazendo a mudança de variável  $\eta = x - y$  obtemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \phi(s)\psi(s)e^{sx} ds = \int_0^x f(\eta)g(x-\eta) d\eta.$$

### 3.5.8 Frações Parciais

Observamos que problemas na aplicação do método de transformada de Laplace a equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes levam ao cálculo de inversão de funções racionais reais. Aqui queremos discutir a aplicação do método de frações parciais a este problema.

Suponha que  $f(s) = \frac{g(s)}{h(s)}$ ,  $g(s)$  com grau  $g$  e  $h(s)$  com grau  $h$ . Assim  $f(s) = \frac{p(s)}{h(s)} + r(s)$ , grau  $p(s) = p < \text{grau } h(s) = h$ . Utilizando a representação dada no apêndice G,

$$f(s) = \frac{p(s)}{h(s)} = \frac{p^*(s)}{h^*(s)} = \frac{p^*(s)}{(s-a_1)^{n_1} \cdots (s-a_i)^{n_i} q_1(s)^{m_1} \cdots q_j(s)^{m_j}} + r(s)$$

$$(p^*, h^*) = 1, \quad a_1 \neq a_2 \neq \cdots \neq a_i, \quad (q_r, q_s) = 1,$$

aqui  $(p, q)$  indica o máximo divisor comum entre  $p$  e  $q$ .

$$\frac{p^*(s)}{h^*(s)} = \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^{n_k} \frac{A_{kl}}{(s-a_k)^l} + \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^{m_k} \frac{B_{kl}s + C_{kl}}{q_k(s)^l} + r(s).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{p^*(s)}{q^*(s)} \right) &= \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^{n_k} A_{kl} \mathcal{L}^{-1}(s-a_k)^{-l} + \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^{m_k} B_{kl} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{s}{q_k(s)^l} \right) \\ &+ C_{kl} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{q_k(s)^l} \right) + \mathcal{L}^{-1} r(s) \end{aligned}$$

Escreva  $f_{kl}(s) = (s - a_k)^l f(s)$ . Determinamos

$$A_{kl} = \frac{f_{kl}^{n_k-l}(a_k)}{(n_k - l)!}.$$

Em maneiras mais complexas também podemos determinar os coeficientes  $B_{kl}, C_{kl}$ .

$$A_{kl} \mathcal{L}^{-1}(s - a_k)^{-l} = \frac{f_{kl}^{n_k-l}(a_k)}{(n_k - l)!} t^{l-1} e^{a_k t}.$$

Em geral a presença do fator  $\frac{B_{kl}s + C_{kl}}{q_k(s)^l}$ ,  $q_k(s) = (s - a_k)^2 + B_k^2$  levará na transformada inversa

$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B_{kl}s + C_{kl}}{q_k(s)^l} \right\}$  e presença de termos da forma

$$t^r e^{\alpha_k t} \sin \beta_k t, \quad t^r e^{\alpha_k t} \cos \beta_k t, \quad r = 1, 2, \dots, l - 1.$$

O caso  $r = 1$  foi determinado anteriormente.

## Exemplo

Considere a equação

$$y'' + ty' - y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1.$$

Tomando a transformada de Laplace e utilizando

$$\mathcal{L}(t^n y) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}y = (-1)^n \tilde{y}^{(n)}(s)$$

obtemos que

$$s^2 \tilde{y}(s) - 1 - \frac{d}{ds}(s \tilde{y}(s)) - \tilde{y}(s) = 0$$

ou

$$\tilde{y}'(s) + \left( \frac{2}{s} - s \right) \tilde{y}(s) = -\frac{1}{s}.$$

Integrando esta equação obtemos que

$$\frac{d}{ds} \left( s^2 e^{-\frac{1}{2}s^2} \tilde{y}(s) \right) - s e^{-\frac{1}{2}s^2}$$

e

$$\tilde{y}(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{C}{s^2} e^{\frac{1}{2}s^2}.$$

Mas se  $\tilde{y}(s) \rightarrow 0$  com  $s \rightarrow \infty$ ,  $C = 0$ ,

$$\mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s^2} \right) = y(t) = t.$$

Considere  $ty'' + y' + ty = 0$  (equação de Bessel). Tomando a transformada de Laplace  $\mathcal{L}$ ,

$$-\frac{d}{ds}(s^2 \tilde{y}(s) - s - y(0)) + s \tilde{y}(s) - 1 - \frac{d}{ds} \tilde{y} = 0$$

ou

$$(s^2 + 1) \tilde{y}(s) + s \tilde{y}(s) = 0,$$

e

$$\frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} = -\frac{s ds}{s^2 + 1}$$

$$\begin{aligned}\tilde{y}(s) &= \frac{C}{\sqrt{s^2 + 1}} = \frac{C}{s} \left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{C}{s} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{s^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 2!} \frac{1}{s^4} \cdots\right) \\ &= C \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n 2n!}{(2^n n!)^2 s^{2n+1}}\end{aligned}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\tilde{y}(s) = C \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} t^{2n}.$$

Se  $y(0) = 1$ ,  $C = 1$ , e  $y(t) = J_0(t)$ .

## Exemplo (Vibrações Forçadas com Ressonância)

Considere o problema

$$\begin{aligned}mx''(t) &= -kx(t) + F_0 \cos \omega t, & \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ x(0) &= x_0 & x'(0) &= \nu_0\end{aligned}$$

Tomando a transformada de Laplace e pondo  $\tilde{x}(s) = \mathcal{L}x(\cdot)$ ,

$$m(s^2 \tilde{x}(s) - sx_0 - \nu_0) = \frac{F_0 \omega}{s^2 + \omega^2} = m\omega_0^2 \tilde{x}(s)$$

e

$$\tilde{x}(s) = \frac{x_0 s + \nu_0}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{F_0}{m} \frac{\omega}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)}$$

e se  $\omega \neq \omega_0$ ,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\tilde{x}(s) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \left( \nu_0 + \frac{F_0 \omega_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \right) \sin \omega_0 t - \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \sin \omega t.$$

Assim,  $x(t)$  é a superposição linear de dois movimentos harmônicos simples de períodos  $\omega_0$  e  $\omega$ , as frequências naturais e forçadas. Temos uma singularidade no caso  $\omega \rightarrow \omega_0$ . No caso que  $\omega = \omega_0$ ,

$$\tilde{x}(s) = \frac{x_0 s + \nu_0}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$$

e

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\tilde{x}(s) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0^2} \left( \nu_0 \omega_0 + \frac{F_0}{2m} \right) \sin \omega_0 t - \frac{F_0}{2m\omega_0} t \cos \omega_0 t$$

e observamos que a amplitude das oscilações cresce com  $t \rightarrow \infty$ .

Nesta situação dizemos que a força  $F(t)$  está em ressonância com o sistema.

Considere este sistema agora com amortecimento

$$mx'' = -kx - cx' + F_0 \sin \omega t$$

de tal modo que

$$\tilde{x}(s) = \frac{\omega F_0}{m} \frac{1}{(s^2 + \omega^2)((s + b)^2 + \omega_1^2)},$$

com  $2b = \frac{c}{m} < \omega_0$  e  $\omega_1^2 = \omega_0^2 - b^2$ .  $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\tilde{x}(s)$  consiste de termos do tipo  $\sin(\omega_1 t + \theta)$  e  $e^{-bt} \sin(\omega_1 t + \theta_1)$  com  $\theta$  e  $\theta_1$  constantes. Segue-se que a componente com frequência  $\omega_1$  decai com o tempo e  $x(t)$  tende a solução da forma

$$x(t) = A \sin(\omega t + \theta), \quad A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{((i\omega + h)^2 + \omega_1^2)}$$

e conseqüentemente, não existe o fenômeno de ressonância.

### Exemplo (Aplicação a servo mecanismos)

Considere um servo mecanismo que força o ângulo de rotação  $\theta_0(t)$  de um eixo seguir o ângulo de rotação  $\theta_1(t)$  de um indicador. Supomos que o eixo e acessórios tem um momento de inércia  $I$  muito maior do que o indicador. Seja  $\phi(t) = \theta_0(t) - \theta_1(t)$ . É possível construir um servo mecanismo para medir  $\phi(t)$  e aplica ao eixo um torque proporcional a  $\phi(t)$ . Para fornecer amortecimento ao sistema supomos que o servo mecanismo também induz um componente de torque proporcional a taxa de mudança  $\phi'(t)$ .

Agora

$$\begin{aligned} I\theta''(t) &= \text{momento de inércia} \times \text{aceleração angular} \\ &= \text{torque exercido sobre o eixo} \\ &= -k\phi(t) - c\phi'(t), \end{aligned}$$

com  $k$  e  $c$  constantes positivas.

Suponha que inicialmente  $\theta_0(0) = \theta_0'(0)$ . Segue-se que  $\phi(0) = -\theta_1(0)$  e tomando a transformada de Laplace,  $\mathcal{L}\theta_0 = \tilde{\theta}_0$

$$Is^2\tilde{\theta}_0(s) = -(k + cs)\tilde{\phi}(s) - c\theta_2(s)$$

dado que  $\tilde{\theta}_0(s) = \tilde{\phi}(s) + \tilde{\theta}_2(s)$ , segue-se que

$$\tilde{\phi}(s) = -\frac{Is^2\tilde{\theta}_1(s) + c\theta_1(0)}{Is^2 + cs + k}.$$

Colocando  $\theta_2(t) = At$ , obtemos

$$\phi(t) = -\frac{A}{\omega} e^{-bt} \sin \omega t$$

com

$$b = \frac{c}{2I}, \quad \omega^2 = \frac{k}{I} - \frac{c^2}{4I^2}$$

e, portanto, se  $k > \frac{c^2}{4I}$  e  $\phi$  é uma oscilação amortecida.

Considere o problema parabólico

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ T(x, 0) &= T_0 \quad 0 < x < l. \\ \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) &= 0 \quad T(l, t) = 0, \end{aligned}$$

equações correspondendo a distribuição de temperatura em um material homogêneo com o lado  $x = 0$  isolado e o lado  $x = l$  mantido a temperatura 0.

Seja

$$t(x, s) = \mathcal{L}T(x, \cdot)(s).$$

Então,

$$st - T_0 = k \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial t}{\partial x}(0, s) = 0 \quad t(l, s) = 0.$$

Resolvendo esta equação diferencial ordinária e utilizando a primeira condição de fronteira,

$$t(x, s) = \frac{T_0}{s} + C \cosh \left( x \sqrt{\frac{s}{k}} \right),$$

com  $C$  determinado pela condição de fronteira  $t(l, s) = 0$ ,

$$t(x, s) = T_0 \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \frac{\cosh \left( x \sqrt{\frac{s}{k}} \right)}{\cosh \left( l \sqrt{\frac{s}{k}} \right)} \right\}.$$

Coloque  $q = \sqrt{\frac{s}{k}}$  e observe que

$$\begin{aligned} \frac{\cosh(xq)}{\cosh(lq)} &= e^{-lq}(e^{xq} + e^{-xq}) \frac{1}{1 + e^{-2lq}} \\ &= (e^{-(l-x)q} + e^{-(l+x)q}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-2nlq} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (e^{-q(ml-x)} + e^{-q(ml+x)}), \quad m = 2n + 1. \end{aligned}$$

Mas calculamos anteriormente que

$$\frac{1}{s} e^{-\alpha\sqrt{s}} = \mathcal{L} \left( \operatorname{erfc} \left( \frac{\alpha}{2\sqrt{t}} \right) \right), \quad \alpha \geq 0.$$

Segue-se utilizando inversão da transformada de Laplace que

$$T(x, t) = T_0 - T_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \operatorname{erfc} \left( \frac{(2n+1)l-x}{2\sqrt{kt}} \right) + \operatorname{erfc} \left( \frac{(2n+1)l+x}{2\sqrt{kt}} \right) \right\}.$$

### 3.5.9 Aplicação da Transformada de Laplace a equações Diferenciais-Integrais e Sistemas

Considere o circuito elétrico em voltagem  $E(t)$  aplicada aos elementos de resistência  $R$ , capacitância  $C$  e indutância  $L$  (veja figura).

Determine a corrente  $i(t)$  dado que  $i(0) = i_0$  e  $q(0) = q_0$ ,  $\frac{dq}{dt} = i$  e  $q = q_0 + \int_0^t i dt$ .

Temos que

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E(t)$$

$$i(0) = i_0, \quad q(0) = q_0.$$

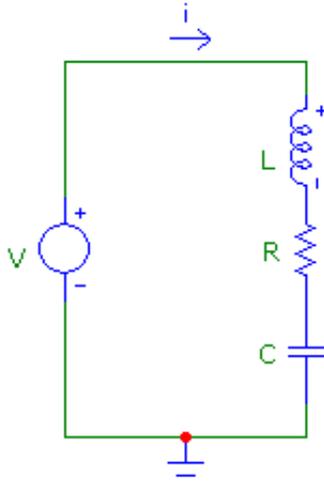


Figura 3.1: *Circuito Elétrico*

Aplicando a transformada de Laplace,

$$Ls\mathcal{L}i + R\mathcal{L}i + \frac{1}{sC}\mathcal{L}i = \mathcal{L}E(s) + Li_0 - \frac{q_0}{sC}.$$

Segue-se que

$$(\mathcal{L}i)(s) = \frac{(\mathcal{L}E)(s) + Li_0 - \frac{q_0}{sC}}{sL + R + \frac{1}{sC}}$$

e

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(\mathcal{L}E)(s) + Li_0 - \frac{q_0}{sC}}{sL + R + \frac{1}{sC}} \right\}.$$

Utilizando frações parciais

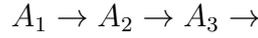
$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Li_0 - \frac{q_0}{sC}}{sL + R + \frac{1}{sC}} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s + \alpha} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B}{s + \beta} \right\} = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(\mathcal{L}E)(s)}{sL + R + \frac{1}{sC}} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s\mathcal{L}E(s)/L}{(s + \alpha)(s + \beta)} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left( \frac{\alpha}{s + \alpha} - \frac{\beta}{s + \beta} \right) \frac{\mathcal{L}E(s)}{L(\alpha - \beta)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}E(s)/(s + \alpha)) &= \mathcal{L}^{-1}((\mathcal{L}E)(s + \alpha - \alpha)/(s + \alpha)) \\ &= e^{-\alpha t} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s} (\mathcal{L}E)(s + \alpha) \right) \\ &= e^{-\alpha t} \int_0^t d\tau \mathcal{L}^{-1}((\mathcal{L}E)(s + \alpha)) \\ &= e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha\tau} E(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Considere o decaimento radioativo de substâncias  $A_1, A_2, \dots, A_r,$



Suponha que em tempo  $t$  o número de átomos de  $A_1$  é  $N_1(t)$ , e a lei de transformação radioativa (Rutherford e Soddy Phil. Mag. 4, 370, 1902) diz que o número de átomos  $-\Delta N_1$  que decai a  $A_2$  em intervalo de tempo  $(t, t + \Delta t) \propto \Delta t$  e  $N_1(t)$ .

$$-\Delta N_1(t) = \lambda_1 N_1(t) dt.$$

Similarmente, no caso que cada  $A_r$  decai,

$$-\Delta N_2(t) = -\lambda_1 N_1 \Delta t + \lambda_2 N_2 \Delta t$$

e, em geral,

$$-\Delta N_{r+1}(t) = -\lambda_r N_r \Delta t + \lambda_{r+1} N_{r+1} \Delta t.$$

Finalmente, se o  $n$ -ésimo produto é estável (não decai)

$$\Delta N_{n-1} \lambda_n N_n \Delta t.$$

Este processo é equivalente a um sistema de  $n + 1$  equações de primeira ordem

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= -\lambda_1 N_1 \\ \frac{dN_{r+1}}{dt} &= \lambda_r N_r - \lambda_{r+1} N_{r+1} \quad 1 \leq r \leq n-1 \\ \frac{dN_{n+1}}{dt} &= \lambda_n N_n. \end{aligned}$$

Tomando a transformada de Laplace e supondo que inicialmente  $N_1(0) = N_0$  e  $N_r(0) = 0$  para  $r \neq 1$ , obtemos que

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + s) \mathcal{L}N_1 &= N_0 \\ (\lambda_r + 1 + s) \mathcal{L}N_{r+1} &= \lambda_r \mathcal{L}N_r \quad 1 \leq r \leq n-1 \\ s \mathcal{L}N_{n+1} &= \lambda_n \mathcal{L}N_n. \end{aligned}$$

Este é um sistema de equações algébricas cuja solução é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}N_{r+1} &= \frac{N_0}{\lambda_r + 1} \prod_{i=1}^{r+1} \left(1 + \frac{s}{\lambda_i}\right)^{-1} \quad 1 \leq r \leq n-1 \\ \mathcal{L}N_1 &= N_0 (\lambda_1 + s)^{-1} \\ \mathcal{L}N_{n+1} &= \frac{N_0}{s} \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{s}{\lambda_i}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Utilizando o teorema da inversão de Laplace

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{N_0 e^{st}}{s + \lambda_1} ds \\ N_{r+1} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{N_0}{\lambda_{r+1}} e^{st} \prod_{i=1}^{r+1} \left(1 + \frac{s}{\lambda_i}\right)^{-1} ds \quad 1 \leq r \leq n-1, \\ N_{r+1} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{N_0}{s} \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{s}{\lambda_i}\right)^{-1} ds. \end{aligned}$$

Estas integrais podem ser avaliadas expressando a parte do integrando que é uma função racional em termos de frações parciais e utilizando as inversões (elementares)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{st}}{\lambda_r + s} ds = e^{-\lambda_r t} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{st}}{s(s + \lambda_r)} ds = \frac{1 - e^{-\lambda_r t}}{\lambda_r}.$$

Caso  $n = 1$ :

$$N_1 = N_0 e^{-\lambda_1 t}, \quad N_1 = N_0(1 - e^{-\lambda_1 t})$$

Caso  $n = 2$ :

$$\begin{aligned} N_1 &= N_0 e^{-\lambda_1 t}, & \mathcal{L}N_3 &= \frac{\lambda_2}{s} \mathcal{L}N_2, \\ \mathcal{L}N_2 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( \frac{1}{s + \lambda_2} - \frac{1}{s + \lambda_1} \right) N_0 \\ N_2 &= \frac{N_0 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \\ N_3 &= N_0 \left( 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} \right) \end{aligned}$$

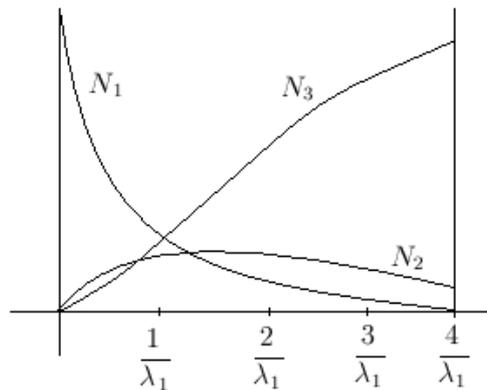


Figura 3.2: *Representação Geométrica*

### 3.5.10 Aplicação da Transformada de Laplace a Equação do Calor

Considere o problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & x &\in (0, \infty), \\ T &= T_0, & x &= 0, \quad t > 0 \\ T &= 0, & x &> 0, \quad t = 0. \end{aligned}$$

Vamos tomar a transformada de Laplace da equação diferencial com respeito a variável  $t$ . Observe que

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty T e^{-st} dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}T,$$

enquanto

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial T}{\partial t} dt &= -T(0) + s\mathcal{L}T \\ &= s\mathcal{L}T, \quad (\text{utilizando a condição } T = 0 \text{ em } t = 0).\end{aligned}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}k \frac{\partial^2 \mathcal{L}T}{\partial x^2} &= s\mathcal{L}T \\ \mathcal{L}T(0) &= \mathcal{L}T_0 = \frac{T_0}{s}.\end{aligned}$$

A solução que é finita em  $x \rightarrow \infty$  é

$$\begin{aligned}\mathcal{L}T(x, s) &= \frac{T_0}{s} e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x} \\ T(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{T_0}{s} e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x} \right) = T_0 \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{kt}} \right),\end{aligned}$$

uma solução obtida anteriormente.

### 3.5.11 \*Aplicação da transformação de Laplace à atração de Van der Waals entre partículas esféricas

Nesta seção seguimos a discussão dado no livro de Sneddon [5]. Uma questão que entra na teoria potencial é o cálculo da energia de interação entre duas esferas sobre alguma lei de força.

No caso que a lei de força é de Newton a energia mútua entre esferas é igual a aquela obtida concentrando a massa nos centros das esferas. A questão existe se existe outra lei de atração para que duas esferas homogêneas tem esta propriedade.

Uma resposta afirmativa foi dada por C. J. Bouwkamp, Physics 13, 508, 1947, utilizando a transformada de Laplace. Partimos da hipótese que a energia potencial mútua de duas partículas unitárias separadas por uma distância  $r$  é  $v(r)$  e queremos determinar se a energia potencial mútua de duas esferas de raios  $a$  e  $b$  cujos centros são separados pela distância  $c$  é dado por  $\phi(a, b)v(c)$ , com  $\phi(a, b)$  uma função de  $a$  e  $b$ .

Considere o sistema composto de uma unidade de massa e esfera de raio  $a$  e  $R$  seja a distância entre a massa pontual e o centro da esfera. Introduza coordenadas esféricas  $\eta, \theta$  na esfera, o eixo polar apontando para a massa pontual. Pondo

$$r^2 = \eta^2 - 2\eta R \cos \theta + R^2.$$

A energia mútua é

$$w = \int_0^a d\eta \int_0^\pi 2\pi \eta^2 \sin \theta d\theta \rho(\eta) v(r),$$

$\rho(\eta)$  sendo a massa específica da esfera.

Coloque  $v(r) = \int_0^r r v(r) dr$ ,  $r_0$  arbitrário,

$$\frac{\partial v(r)}{\partial \theta} = v(r) \frac{\partial r}{\partial \theta} = Rv(r) \eta \sin \theta.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} w &= \frac{2\pi}{R} \int_0^a \eta \rho(\eta) d\eta \int_0^\pi R v(r) \eta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{2\pi}{R} \int_0^a \eta \rho(\eta) d\eta (v(R + \eta) - v(R - \eta)). \end{aligned}$$

Suponha que seja possível estabelecer que

$$v(R + \eta) - v(R - \eta) = v'(R) f(\eta),$$

com  $f$  uma função somente de  $\eta$ . Neste caso

$$w = m(a)v(R),$$

com

$$m(a) = 2\pi \int_0^a \eta f(\eta) \rho(\eta) d\eta.$$

É fácil confirmar que  $v(r) = e^{-\lambda r}$ ,  $\lambda$  um número complexo, satisfaz a relação e

$$v(R + \eta) - v(R - \eta) = -2e^{-\lambda R} \sinh(\lambda \eta),$$

ou seja,

$$f(\eta) = \frac{2}{\lambda} \sinh(\lambda \eta).$$

Deverá ser observado que de fato  $e^{-\lambda r}$  é a única solução do problema. Supondo a densidade na esfera ser constante

$$m(a) = \rho \int_0^a \frac{4\pi}{\lambda} \eta \sinh(\lambda \eta) d\eta = \left( \frac{2\pi a}{\lambda} \right)^{\frac{3}{2}} \rho I(\lambda a),$$

com

$$I(z) = \left( \frac{2}{nz} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \cosh z - \frac{\sinh z}{z} \right).$$

Dado que a expressão para  $w$  dá a energia de interação de uma massa pontual e uma esfera de raio  $a$ , segue-se que a energia de interação entre duas esferas de raio  $a$  e  $b$  é

$$w = m(a)m(b)v(R),$$

com

$$v(r) = \frac{e^{-\lambda r}}{r}.$$

Segue-se que

$$w = \frac{8\pi^3 (ab)^{\frac{3}{2}} \rho^2}{\lambda^3} I(\lambda a) I(\lambda b) \frac{e^{-\lambda R}}{R}.$$

Coloque

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} R v(R) e^{sR} dR.$$

Pelo teorema de inversão de transformada de Laplace

$$v(R) = \int_0^\infty g(\lambda) \frac{e^{-\lambda R}}{R} d\lambda$$

e

$$w = \frac{8\pi^3(ab)^{\frac{3}{2}}}{R} \rho^3 \int_0^\infty g(\lambda) I(\lambda a) I(\lambda b) e^{-\lambda R} \lambda^{-3} d\lambda.$$

No caso que  $\nu(R) = R^{-n}$ ,  $n > 1$ ,

$$\int_0^\infty \lambda^{n-2} e^{-\lambda R} d\lambda = \Gamma(n-1) R^{-n+1}$$

e

$$g(\lambda) = \frac{\lambda^{n-2}}{\Gamma(n-1)}$$

e

$$Rw_n(a, b, R) = \frac{8\pi^3(ab)^{\frac{3}{2}}\rho^2}{\Gamma(n-1)} \int_0^\infty e^{-\lambda R} I(\lambda a) I(\lambda b) \lambda^{n-5} d\lambda.$$

Resulta a expressão

$$\begin{aligned} & \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{4\pi^2\rho^2} w_n(a, b, R) \\ &= ab((R+a+b)^{5-n} + (R-a-b)^{5-n} + (R-a+b)^{5-n} + (R+a-b)^{5-n}) \\ & - \frac{R}{n-6} ((R+a+b)^{6-n} + (R-a-b)^{6-n} + (R-a+b)^{6-n} + (R+a-b)^{6-n}) \\ & + \frac{1}{n-7} ((R+a+b)^{7-n} + (R-a-b)^{7-n} + (R-a+b)^{7-n} + (R+a-b)^{7-n}). \end{aligned}$$

O caso mais importante ocorre com  $n = 6$  (Van der Waals). Este caso é singular, um argumento de limite  $n \rightarrow 6$  tem de ser aplicado que introduz termos logaritmos.

$$w_6(a, b, R) = \frac{\pi^2\rho^2}{6} \left( \frac{4ab(R^2 - a^2 - b^2)}{(R^2 - (a-b)^2)(R^2 - (a+b)^2)} + \ln \frac{(R^2 - (a+b)^2)}{(R^2 - (a-b)^2)} \right)$$

### 3.5.12 \*Transformada de Mellin

Seja  $s = \sigma + it$  e  $f(s)$  regular em  $\alpha < \sigma < \beta$  e

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma + it)| dt < \infty, \quad \alpha < \sigma < \beta$$

**Proposição 7** (Inversão da transformada de Mellin). *Suponha que  $f(s) \rightarrow 0$  uniformemente em  $\alpha + \delta \leq \sigma \leq \beta - \delta$ , com  $\delta > 0$ , então se*

$$g_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{-s} f(s) ds$$

então

$$f(s) = \int_0^\infty x^{s-1} g(x) dx \quad \text{em } \alpha < \sigma < \beta$$

*Demonstração.* Dado que  $f(s) \rightarrow 0$  uniformemente em  $\alpha + \delta \leq \sigma \leq \beta - \delta$ ,  $\delta > 0$ , então  $g_\sigma(x) = g_{\sigma'}(x)$ ,  $\forall \sigma, \sigma' \in [\alpha + \delta, \beta - \delta]$ , utilizando o Teorema de Cauchy, assim  $g_\sigma(x) = g(x)$ ,  $\alpha < \sigma < \beta$ .

Escolhendo  $\sigma_1, \sigma_2, \alpha < \sigma_1 < \sigma < \sigma_2 < \beta$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{s-1}g(x) &= \int_0^1 x^{s-1}dx \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} x^{-s_1}f(s_1)ds_1 \\ &+ \int_1^\infty x^{s-1}dx \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} x^{-s_2}f(s_2)ds_2 \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Mas pelo Teorema de Fubini, dado que

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |f(\sigma_1 + it)|dt \int_0^1 x^{-1+(\sigma-\sigma_1)}dx < \infty \\ |I_2| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |f(\sigma_2 + it)|dt \int_1^\infty e^{-1+(\sigma-\sigma_2)}dx < \infty \end{aligned}$$

podemos trocar a ordem de integração em  $I_1$  e  $I_2$  e

$$\int_0^\infty x^{s-1}g(x)dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} \frac{f(s_2)ds_2}{s_2 - s} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \frac{f(s_1)ds_1}{s_1 - s}$$

Dado que a integral de  $f(s)$  sobre os segmentos horizontais ligando  $s = \sigma_1$  a  $s = \sigma_2$  tendem a zero com  $t \rightarrow \infty$ , concluímos da fórmula de Cauchy que

$$(\mathcal{M}g)(s) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty x^{s-1}g(x)dx = f(s)$$

□

O seguinte teorema de inversão pode ser reduzido a teoria de Fourier.

**Teorema 12** (Inversão da Transformada de Mellin). *Suponha que*

$$\int_0^\infty x^{\sigma-1}|g(x)|dx < \infty, \quad \alpha < \sigma < \beta$$

então se  $(\mathcal{M}g)(s) = \int_0^\infty x^{s-1}g(x)dx$  temos que

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{-s}(\mathcal{M}g)(s)ds, \quad \alpha < \sigma < \beta$$

*Demonstração.* Fazemos a substituição  $x = e^u$ . Segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{-s}f(s)ds &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-u(\sigma+it)}dt \int_{-\infty}^\infty e^{v(\sigma+it)}g(e^u)du \\ &= \frac{e^{-u\sigma}}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dt \int_{-\infty}^\infty e^{it(v-u)}e^{v\sigma}d(e^v)dv \end{aligned}$$

Agora aplicando o Teorema de Inversão de Fourier a última expressão é igual a  $e^{-u\sigma}e^{u\sigma}g(e^u) = g(x)$ . □

A noção de reciprocidade dos resultados anteriores ocorre no trabalho de Riemann sobre números primos, uma formulação explícita sendo dada por E. Cahen em 1894 enquanto uma discussão precisa foi dada por Mellin<sup>2</sup>.

Certas versões de teoremas de Parseval e convoluções existem para a transformada de Mellin. Faremos certos cálculos formais referindo o leitor para o livro [6] (seções 2.7, 3.17, 4.14) para demonstrações precisas.

Por exemplo, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} (\mathcal{M}f)(s)(\mathcal{M}g)(1-s)ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} (\mathcal{M}f)(s)ds \int_0^\infty g(x)x^{-s}dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty g(x)dx \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} (\mathcal{M}f)(s)ds \\ &= \int_0^\infty g(x)f(x)dx \end{aligned}$$

No caso que  $x^{k-1}f \in L^1(0, \infty)$  e  $(\mathcal{M}g)(1-k-it) \in L^1(-\infty, \infty)$  ou  $x^k f$  e  $x^{1-k}g \in L^2(0, \infty)$ . Também,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x)g(x)x^{s-1}dx &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty g(x)x^{s-1}dx \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} (\mathcal{M}f)(w)x^{-w}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} (\mathcal{M}f)(w)dw \int_0^\infty g(x)x^{s-w-1}dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} (\mathcal{M}f)(w)(\mathcal{M}g)(s-w)dw \end{aligned}$$

Isto é dizer que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} (\mathcal{M}f)(w)(\mathcal{M}g)(s-w)dw$$

é a transformada de Mellin de  $f(x)g(x)$ . No caso que  $x^k f \in L^2(0, \infty, \frac{dx}{x})$  e  $x^{\sigma-k}g \in L^2(0, \infty, \frac{dx}{x})$ . Também,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} (\mathcal{M}f)(s)(\mathcal{M}g)(s)x^{-s}ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty g(x)dx \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} (\mathcal{M}f)(s)x^{s-1}x^{-s}ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty g(u)f\left(\frac{x}{u}\right)\frac{du}{u} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

Se  $x^k f, x^k g \in L^1(0, \infty)$ ,  $x^k h \in L^1(0, \infty)$  e  $\mathcal{M}(x^k h)(s) = (\mathcal{M}f)(s)(\mathcal{M}g)(s)$ ,  $s = \sigma + it$ ,  $\sigma = k + 1$ .

### 3.5.13 \*Aplicação: equações integrais duais

A transformada de Mellin é de extraordinária utilidade em tratar com aspectos da teoria de transformadas generalizadas e também com problemas na teoria de operadores integrais duais.

O seguinte problema é encontrado na teoria eletrostática: determinar o potencial de um disco circular plano eletrificado de material condutor com centro na origem e eixo na direção  $Oz$ .

<sup>2</sup>*Acta Sic. Fennicae* 21, 1896(1), 1-115 e *Acta Math.* 25 (1902) 139-64

Efetivamente o problema analítico é determinar  $f$  satisfazendo as equações integrais duais:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(u)J_0(\rho u)du &= g(\rho) , \quad 0 < \rho < 1 \\ \int_0^{\infty} f(u)uJ_0(\rho u)du &= 0 , \quad \rho > 1 \end{aligned}$$

Antes de prosseguir determinaremos a transformada de Mellin de  $x^\nu J_\nu(x)$ .

**Lema 2.**

$$M(x^\nu J_\nu(x))(s) = \frac{2^{s-\nu+1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu - \frac{s}{2} + 1\right)} , \quad 0 < \sigma < \nu + \frac{3}{2}$$

*Demonstração.* Defina  $F$  por

$$F(y) = \begin{cases} (1-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}} , & 0 < y < 1 \\ 0 , & y > 1 \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned} \ell\{F()\} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \int_0^1 (1-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-\nu)^n \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{(2n)! \Gamma(\nu + n + 1)} x^{2n} \\ &= \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-\nu)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} n! \Gamma(\nu + n + 1)} \\ &= 2^{\nu-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) x^{-\nu} J_\nu(\nu) \end{aligned}$$

Também

$$\begin{aligned} \ell(y^{a-1}) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-a} \int_0^{\infty} y^{a-1} \cos y dy \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(a) \cos \frac{a\pi}{2} x^{-a} \end{aligned}$$

avaliando a integral utilizando o Teorema de Cauchy.

Utilizando estes resultados, concluímos que utilizando a fórmula de Parseval para a transformada cosseno

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} J_\nu(x) x^{a-\nu-1} dx &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(a) \cos \frac{a\pi}{2}}{2^{\nu-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} x^{-a} dx \\ &= \frac{\Gamma(a) \cos \frac{a\pi}{2}}{2^{\nu-1} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{2}\right)}{2\Gamma\left(\nu - \frac{a}{2} + 1\right)} \\ &= \frac{2^{a-\nu-1} \Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu - \frac{a}{2} + 1\right)} , \quad \text{se } \nu > \frac{1}{2} \text{ e } 0 < a < 1 \end{aligned}$$

Dado que a integral converge se  $0 < a < \nu + \frac{3}{2}$ , o resultado continua a ser válido nesta região via continuação analítica. De fato, podemos tomar  $a = s$  complexo,  $0 < \sigma < \nu + \frac{3}{2}$  e temos estabelecido que

$$\mathcal{M}(x^{-\nu}J_{\nu}(x))(s) = \frac{2^{s-\nu-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu - \frac{s}{2} + 1\right)}, \quad 0 < \sigma < \nu + \frac{3}{2}$$

□

Utilizando esse lema técnico com  $\nu = 0$  e utilizando o teorema de Parseval para transformadas de Mellin, obtemos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} (\mathcal{M}f)(s) 2^{-s} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)} \rho^{s-1} ds &= g(\rho), \quad 0 < \rho < 1 \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} (\mathcal{M}f)(s) 2^{1-s} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \rho^{s-2} ds &= 0, \quad \rho > 1 \\ &0 < k < 1 \end{aligned}$$

Colocando

$$(\mathcal{M}f)(s) = \frac{2^s \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right)} \chi(s)$$

obtemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right)} \chi(s) \rho^{s-1} ds = g(\rho), \quad 0 < \rho < 1 \quad (3.30)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right)} \chi(s) \rho^{s-1} ds = 0, \quad \rho > 1 \quad (3.31)$$

$\Gamma$  em (3.30) não tem pólos ou zeros para  $\sigma > 0$ .

$\Gamma$  em (3.31) não tem pólos ou zeros para  $\sigma < 1$ .

Multiplicando (3.30) por  $\rho^{-w}$ ,  $\sigma - u > 0$  e integrando em  $(0, 1)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right)} \frac{\chi(s)}{s-w} ds = \int_0^1 g(\rho) \rho^{-w} d\rho = (\mathcal{M}g)(1-w) \quad u < k$$

Mudando a linha de integração a  $\sigma = k' < u$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{k'-i\infty}^{k'+i\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right)} \frac{\chi(s)}{s-w} ds = (\mathcal{M}g)(1-w) - \frac{\Gamma\left(\frac{w}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{w}{2}\right)} \chi(w)$$

O lado esquerdo é regular em  $u > k'$  e para  $u > 0$  e também é o lado direito e por consequência

$$\chi(w) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{w}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{w}{2}\right)} (\mathcal{M}g)(1-w) \quad (3.32)$$

Segue-se, supondo adequadas as condições no infinito que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \left\{ \chi(s) - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} (\mathcal{M}g)(1-s) \right\} \frac{ds}{s-w} \quad u < k$$

Multiplicando (3.31) por  $\rho^{-w}$ ,  $\sigma - u < 0$  e integrando em  $(1, \infty)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{k'-i\infty}^{k'+i\infty} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right) \chi(s)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right) s - w} ds = 0 \quad u > k'$$

e

$$\frac{\Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right)} \chi(s) \quad \text{e} \quad \chi(s) \quad \text{é regular para } \sigma < 1$$

segue-se que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{k'-i\infty}^{k'+i\infty} \frac{\chi(s)}{s - w} ds = 0 \quad u > k'$$

Mudando a linha de integração de  $k'$  a  $k > u$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{\chi(s)}{s - w} ds = \chi(w) \quad u < k$$

e

$$\chi(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right) (\mathcal{M}g)(1-s)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) s - w} ds \quad u < k \quad (3.33)$$

Utilizando a inversão de Mellin junto com (3.32) e (3.33), leva a solução  $f$ .

## Exercícios

1. Mostre que

(a)

$$e^{ax} = \frac{e^{2\pi a} - 1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \cos nx - n \operatorname{sen} nx}{a^2 + n^2} \right\} \quad 0 < x < 2\pi.$$

(b)

$$e^{ax} = \frac{e^{a\pi} - 1}{a\pi} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n e^{a\pi} - 1) \frac{a \cos nx}{a^2 + n^2}.$$

[Defina  $\mathfrak{S}(x) = f(x)$  em  $(0, \pi)$  e  $\overline{\mathfrak{S}}(-x) = f(x)$  em  $(0, \pi)$ ]

(c)

$$e^{ax} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-1)^n e^{a\pi}) \frac{n \operatorname{sen} nx}{a^2 + n^2} \quad 0 < x < 2\pi.$$

[Defina  $\mathfrak{S}(x) = f(x)$  em  $(0, \pi)$  e  $\overline{\mathfrak{S}}(-x) = -f(x)$  em  $(0, \pi)$ ]

2. Obtenha as somas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \cos nx}{a^2 + n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen} nx}{a^2 + n^2}, \quad 0 < x < 2\pi$$

utilizando 1(a) acima.

3. Considere a série de Fourier associada a  $\left[\frac{x}{\pi}\right]$  no intervalo  $(0, 2\pi)$  e os valores de  $x$  onde a série de Fourier converge a um valor diferente do valor da função.

4. Utilize a igualdade de Parseval para obter o valor de  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

5. Seja  $f$  uma função par e de variação limitada em  $(-\pi, \pi)$ , com período  $2\pi$ . Mostre que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|^2 dx = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{nh}{2} a_n^2$$

$a_n$  sendo os coeficientes de Fourier de  $f$ . Obtenha o valor de  $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^2 a_{2n+1}^2$  se  $f(x) = e^x$ .

6. Se  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n < \infty$ ,  $v_n \geq 0$ , mostre que  $\exists$  uma função  $f$  contínua tal que

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = v_n \quad n = 1, 2, \dots$$

Mostre que  $\exists$  uma função contínua  $h(x)$  tal que

$$\int_0^{2\pi} h(x) \sin nx dx = \frac{1}{\log x}$$

para um número infinito de valores.

7. Suponha que  $f(x)$  satisfaz as condições  $D^s f(x)$  existe e é contínua e  $|D^s f(x)| \leq C$ ,  $s$  um inteiro. Defina  $\mathfrak{S}(x) = f(x)$  em  $(0, 2\pi)$  e estende pela periodicidade. Mostre que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + |k|^s)(|a_k^2 + b_k^2|) < \infty. \quad (3.34)$$

Isto sugere que dizemos  $f$  tem derivadas generalizadas até a ordem  $s$  no caso que (3.34) existe. Mostre um resultado similar para integral de Fourier.

## Exercícios (Transformada de Fourier)

8. Utilize a igualdade de Parseval (integral de Fourier) para obter o valor de

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \frac{\sin bx}{x} dx.$$

9. Mostre que

(a)

$$\mathfrak{S}^{-1} \{e^{-|x|}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+y^2}.$$

(b)

$$\mathfrak{F}\left\{e^{-\frac{x^2}{2}}\right\} = e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

[Dica para (b): estude  $e^{-(x+iy)^2/2}$  no retângulo  $R$  com pontos extremos  $(-\lambda, 0)$ ,  $(\lambda, 0)$ ,  $(\lambda, \lambda + iy)$ ,  $(-\lambda, -\lambda + iy)$  nesta ordem. Ou estude  $\varphi(y) = \mathfrak{F}(e^{-\frac{x^2}{2}})(y)$  e observe que  $\exists \varphi'(y)$  tal que  $\varphi'(y) = -y\varphi(y)$  e conseqüentemente  $\log \varphi(y) = -\frac{1}{2}y^2 + \text{constante}$ ].

10. Defina  $h_\lambda(y) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{\lambda}{\lambda^2 + y^2}$ . Observe que  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h_\lambda(y) dy = 1$ .

(a) Mostre que se  $g \in L^\infty(\mathbb{R}^1)$  e  $g$  é contínua em  $x$ , então

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} g \circ h_\lambda(x) = g(x).$$

(b) Mostre que se  $1 \leq p < \infty$  e  $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$ , então

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|f \circ h_\lambda - f\| = 0.$$

11. Mostre que se  $f \in C^2(\mathbb{R}^1)$  e  $|f| + |f'| + |f''| \leq \frac{c}{1+x^2}$ , então

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(2\pi x) = (2\pi)^{-1} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{n}{2\pi}\right)$$

(Fórmula de Poisson).

12. Suponha que  $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$  e  $\alpha$  e  $\lambda$  são números reais. Mostre as seguintes propriedades da integral de Fourier:

(i) Se  $g(x) = f(x)e^{i\alpha x}$ , então  $\mathfrak{F}g(\xi) = \mathfrak{F}f(\xi - \alpha)$ .

(ii) Se  $g(x) = f(x - \alpha)$ , então  $\mathfrak{F}g(\xi) = \mathfrak{F}f(\xi)e^{-i\xi\alpha}$ .

(iii) Se  $g \in L^1(\mathbb{R}^1)$  e definimos a convolução  $h$  de  $f$  e  $g$ ,  $h = f * g = \int_{\mathbb{R}^1} f(x-y)g(y)dy$ , então  $\mathfrak{F}h(\xi) = \mathfrak{F}f(\xi)\mathfrak{F}g(\xi)$ .

(iv) Se  $g(x) = f(-x)$ , então  $\mathfrak{F}g(\xi) = \overline{\mathfrak{F}f(\xi)}$ .

(v) Se  $g(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$  e  $\lambda > 0$ , então  $\mathfrak{F}g(\xi) = \lambda \mathfrak{F}f(\lambda\xi)$ .

(vi) Se  $g(x) = -ixf(x)$  e  $g \in L^1(\mathbb{R}^1)$ , então  $\mathfrak{F}g$  é diferenciável e  $(\mathfrak{F}g)'(\xi) = \mathfrak{F}f(\xi)$ . A função de Bessel  $J_\nu(z)$  é definida para  $\nu > -1$  pela série

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)}.$$

Mostre que se  $\nu > -\frac{1}{2}$ ,

(a)

$$J_\nu(z) = \frac{z^\nu}{2^{\nu-1} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z \cos \theta) \sin^{2\nu} \theta d\theta$$

e se  $\mu > -1$  e  $\nu > -1$

(b)

$$J_{\mu+\nu+1}(z) = \frac{z^{\nu+1}}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\mu(z \cos \theta) \sin^{\mu+1} \theta \cos^{2\nu+1} \theta d\theta$$

13. Suponha que  $f(x) \in C^1[0, \pi]$  com  $f(0) = f(\pi) = 0$  e estenda o domínio de definição da função  $f(-x) = -f(x)$ ,  $x \in [0, \pi]$ , ao intervalo  $(-\pi, \pi)$ . Utilizando séries de Fourier e a igualdade de Parseval mostre que

$$\int_0^\pi |f|^2 dx \leq c \int_0^\pi |f'|^2 dx, \quad \text{com } c = 1$$

e que este valor para  $c$  é o melhor possível (A desigualdade de Wirtinger).

14. Seja  $C$  uma curva plana simples dada parametricamente por  $(x(t), y(t))$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , com  $x(t), y(t) \in C^1(0, 2\pi)$ ,  $x(0) = x(2\pi)$ ,  $y(0) = y(2\pi)$ , com comprimento normalizado a 1 ( $\int_0^{2\pi} (x'(t)^2 + y'(t)^2) dt = 1$ ). Seja  $A$  a área contida dentro de  $C$ . Mostre que  $A$  é dada por

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x(t)y'(t) - x'(t)y(t) dt.$$

Utilizando séries de Fourier e a fórmula de Parseval e Plancherel mostre que

$$A \leq \frac{1}{4\pi},$$

tomando o valor máximo no caso que  $C$  seja um círculo.

15. Suponha que  $f$  seja uma função par que é  $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ . Utilizando a fórmula de Poisson (Veja Ex. 4), mostre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(x) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^\infty f(x) dx - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty f'(x) \frac{\text{sen } 2\pi nx}{\pi n} dx$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(x) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^\infty f(x) dx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(0)}{2\pi^2 n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty f^{(n)} \frac{\cos 2\pi nx}{2\pi^2 n^2} dx$$

e iterando

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(x) = \int_0^\infty f(x) dx + \frac{1}{2}f(0) - f'(0) + \frac{1}{720}f'''(0) - \frac{1}{30240}f^{(4)}(0), \quad \text{etc.}$$

(A fórmula de Euler-Maclaurin).

16. Utilizando a fórmula de Poisson verifique que a função  $\theta$

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp -\pi n^2 t$$

satisfaz

$$\theta(t) = t^{-\frac{1}{2}} \theta\left(\frac{1}{t}\right)$$

(A identidade de Jacobi)

[Utilize o exercício 2b]

17. Mostre a desigualdade de Heisenberg

$$\int x^2 |f(x)|^2 dx \times \int \xi^2 |(\mathfrak{F}f)(\xi)|^2 d\xi \geq \frac{1}{16\pi^2} \left( \int |f(x)|^2 \right)^2.$$

[Estabeleça o resultado primeiro para  $f \in C_0^\infty$  observando que

$$\frac{1}{2}(f' \bar{f} + \bar{f}' f) = \operatorname{Re}(f' \bar{f}) \leq |f' \bar{f}|$$

e utilize o teorema de Plancherel e desigualdade de Schwarz.]

18. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \frac{\operatorname{sen} z \sqrt{\xi^2 - 1}}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi = \begin{cases} \pi I_0(\sqrt{z^2 - x^2}) & \text{para } |x| \leq z \\ 0 & \text{para } |x| > z, \quad z > 0, \end{cases}$$

onde  $I_0$  denomina a função de Bessel de conjuntos imaginários. Conseqüentemente mostre (formalmente) que a solução do problema inicial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0, \quad u|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = h(x)$$

é dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} I_0(\sqrt{t^2 - (x-\tau)^2}) h(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x-t}^{x+t} I_0(\sqrt{t^2 - (x-\tau)^2}) f(\tau) d\tau.$$

## Exercícios (Transformada de Laplace)

Estabeleça as seguintes transformadas inversas:

$$19. \quad F(s) = \frac{-1}{(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad f(t) = \frac{(b-c)e^{at} + (b-a)e^{bt} + (a-b)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$20. \quad F(s) = \frac{4s+1}{(s^2+s)(4s^2-1)}, \quad f(t) = e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}} + e^{-t} - 1$$

$$21. \quad F(s) = \frac{s+a}{(s+b)(s+c)^2}, \quad f(t) = \frac{a-b}{(b-c)^2} e^{-at} + \left( \frac{a-c}{b-c} t - \frac{a-b}{(b-c)^2} \right) e^{-ct}$$

$$22. \quad F(s) = \frac{2b^4}{(s^2+b^2)s^2}, \quad f(t) = 2 \cos bt + b^2 t^2 - 2$$

$$23. \quad F(s) = \frac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^3}, \quad f(t) = t \cos bt$$

$$24. \quad F(s) = \frac{25s^2}{(s+1)^2(s^2+4)}, \quad f(t) = (5t-8)e^{-t} + 10 \sin(2t + \theta), \quad \theta = \arg(3+4i).$$

## Exercícios (Aplicações da transformada de Laplace em Equações Diferenciais)

Resolva as equações diferenciais:

25.

$$\begin{aligned} y''(t) + aty'(t) - 2ay(t) &= 1 \\ y(0) = y'(0) &= 0 \quad a > 0 \end{aligned}$$

Resposta:  $y(t) = \frac{t^2}{2}$ .

26.

$$ty''(t) + (2t + 3)y'(t) + (t + 3)y(t) = ae^{-t}$$

Resposta:  $y(t) = \left(c + \frac{at}{3}\right)e^{-t}$ .

27. Considere a equação de Bessel de ordem  $n$

$$t^2y''(t) + ty'(t) + (t^2 - n^2)y(t) = 0.$$

Fazendo a substituição  $y(t) = t^{-n}z(t)$  mostre que

$$tz''(t) + (1 - 2n)z'(t) + tz(t) = 0.$$

Resolva esta equação pelo método de transformada de Laplace e assim mostre que a solução  $z(t)$  regular na origem  $t = 0$  é tal que

$$y(t) = CJ_n(t).$$

28. Considere

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t} &= \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ I(0, t) &= 0 \quad I(1, t) = 0 \\ I(x, 0) &= x. \end{aligned}$$

Mostre que

$$T(x, t) = x - \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{erfc} \left( \frac{2n + 1 - x}{2\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{2n + 1 + x}{2\sqrt{t}} \right) \quad t > 0.$$

29. Considere o problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + R(t) \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ T(x, 0) &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) &= 0, \quad T(1, t) = 0. \end{aligned}$$

Mostre que

$$T(x, t) = \int_0^t R(\tau) d\tau - \int_0^t R(t - \tau) E(x, \tau) d\tau,$$

com

$$E(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \operatorname{erfc} \left( \frac{2n + 1 + x}{2\sqrt{t}} \right) + \operatorname{erfc} \left( \frac{2n + 1 - x}{2\sqrt{t}} \right) \right\}.$$

# Bibliografia

- [1] Ash, R. B. and Novenger, W. P. *Complex Variable*, Dover, New York, 2007.
- [2] Churchill, R. V., *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, New York, 1941.
- [3] Courant, R., Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics*, Wiley, 1975.
- [4] Davis, H. F., *Fourier Series and Orthogonal Functions* , Allyn & Bacon, 1966.
- [5] Sneddon, I. N., *Fourier Transform* , Dover, INC., New York, Toronto e Londres, 1957.
- [6] Titchmarsh, E., *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* , Clarendon Press, Oxford, 1937.
- [7] Tolstov, G. P., *Fourier Series* , Dover, New York, 1976.

# Capítulo 4

## Existência e Unicidade para as equações da onda e do calor

Para conveniência do leitor, apresentamos alguns resultados básicos sobre a existência e unicidade das equações de onda e de calor apresentadas nos capítulos 1 e 2. Para estudos mais aprofundados a teoria de equações diferenciais parciais recomendamos os livros de Evans [2] e Hellwig [6].

### 4.1 Equação da Onda

Vamos recordar alguns resultados sobre a equação da onda em uma dimensão:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x) \\ u_t(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned}$$

Temos

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{2} + \int_{x-t}^{x+t} \psi(y) dy, \quad (4.1)$$

fórmula de d'Alembert (ver capítulo 2, seção 2.6). Se  $\psi \equiv 0$

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{2} \quad (4.2)$$

É fácil ver que (4.2) diz que efeitos propagam com velocidade 1. Se no limite o efeito de  $\varphi$  é concentrado em um ponto  $\varphi \sim \delta(x)$  ao tempo  $t = 0$ . No tempo  $t$ ,

$$u \sim \frac{\delta(x+t) + \delta(x-t)}{2}.$$

Considere a problema geral

$$\begin{aligned} \square u &= F' \\ u &= \varphi \quad t = 0, \\ u_t &= \psi \quad t = 0. \end{aligned}$$

Um problema equivalente é

$$\begin{aligned} \square w &= F' + \varphi_x'' + t\psi_x'' = F \\ w &= 0 \quad t = 0, \\ w_t &= 0 \quad t = 0. \end{aligned}$$

Utilizando coordenadas característica,

$$\begin{aligned} \xi &= x + t \\ \eta &= x - t \end{aligned}$$

ou

$$-4w_{\xi\eta} = F\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}\right)$$

e a solução é

$$w = -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\xi} \int_{-\infty}^{\eta} F\left(\frac{\xi_1 + \eta_1}{2}, \frac{\xi_1 - \eta_1}{2}\right) d\xi_1 d\eta_1$$

e com respeito as variáveis  $x, t$ ,

$$w(x, t) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} F(y, s) dy ds.$$

$$\Omega = \{(y, s) : s \geq 0, x - t + s \leq y \leq x + t - s\}$$

#### 4.1.1 Um princípio (fraco) de máximo (domínios de dependência e influência)

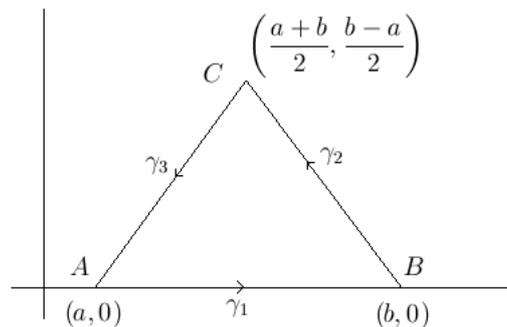


Figura 4.1:

Vamos colocar  $p = u_x$  e  $q = u_t$ . O teorema de Green aplicado na região  $\Omega$  da

$$\iint_{\Omega} (p_x - q_t) dx dt = \oint_{\partial\Omega} p dt + q dx$$

ou

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u_{xx} - u_{tt}) dx dt &= \oint_{\partial\Omega} u_x dt + u_t dx = \\ &= \int_{\gamma_1} u_t dx + \int_{\gamma_2} u_x dt + u_t dx + \int_{\gamma_3} u_x dt + u_t dx \end{aligned}$$

Em  $\gamma_2$ ,  $dx = -dt$  e em  $\gamma_1$ ,  $dx = dt$ . Segue-se que

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \square u dx dt &= \int_{\gamma_1} u_t dx - \int_{\gamma_2} u_x dx + u_t dx + \int_{\gamma_3} u_x dx + u_t dt = \\ &= \int_{\gamma_1} u_t dx - (u(C) - u(B)) + (u(A) - u(C)) = \int_{\gamma_1} u_t dx - 2u(C) + u(B) + u(A). \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$u(C) = \frac{1}{2} \int_{\gamma_1} u_t dx + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \square u dx dt + \frac{u(A) + u(B)}{2} \quad (4.3)$$

Suponha que

$$u_t(x, 0) \leq 0 \quad \text{e} \quad \square u \leq 0 \quad \text{em } \Omega,$$

Obtemos de (4.3)

$$u(C) \leq \frac{u(A) + u(B)}{2} \leq \max_{a \leq x \leq b} |u(x, 0)|.$$

Se tomássemos qualquer outro ponto  $C_1$  na região  $\Omega$ , poderíamos ter considerado um triângulo isósceles  $A_1 B_1 C_1$ , similar a  $ABC$  com  $A_1 B_1$  sobre o eixo  $x$  e ângulo reto em  $C_1$ . Assim, obteríamos

$$u(C_i) \leq \frac{u(A_1) + u(B_1)}{2} \leq \max_{a \leq x \leq b} |u(x, 0)|.$$

Ou seja, se  $\square u = 0$  em  $\Omega$  e  $u_t(x, 0) = \varphi(x) \leq 0$ , **um ponto máximo tem de ser localizado no segmento inicial  $AB$ .**

**Observação 13.** *Este resultado não indica se  $u$  pode assumir seu máximo em um ponto interior, assim é um princípio de máximo fraco. De fato,*

$$u(x, t) = \cos x \cos t$$

satisfaz

$$\square u = 0$$

e

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) (x, 0) = 0.$$

O máximo de  $u$  é assumido em  $(0, 0)$ ,  $(2\pi, 0)$ , mas também em  $(\pi, \pi)$ .

#### 4.1.2 A equação da onda em dimensões maiores que um

$$\square u = 0$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}) \in C^3(\mathbb{R}^n) \quad (4.4)$$

$$u_t(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}) \in C^3(\mathbb{R}^n).$$

Vamos considerar a média esférica de função

$$I(\mathbf{x}, r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\mathbf{y}|=1} F(\mathbf{x} + r\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}, \quad (4.5)$$

onde  $dS_{\mathbf{y}}$  é a medida sobre a esfera  $|\mathbf{y}| = 1$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $r \geq 0$  e  $\omega_n$  é a área de  $|\mathbf{y}| = 1$  em  $\mathbb{R}^n$ .

Tentaremos utilizar (4.5) para reduzir (4.4) a uma equação de uma variável. Observamos que  $I \in C^m$  se  $F \in C^m$ . Claramente

$$\begin{aligned} \int_{|\mathbf{z}| \leq R} F(\mathbf{x} + \mathbf{z}) d\mathbf{z} &= \int_0^R \left( \int_{|\omega|=\rho} F(\mathbf{x} + \rho) dS_\omega \right) d\rho \\ &= \omega_n \int_0^R r^{n-1} I(\mathbf{x}, r) dr \end{aligned} \quad (4.6)$$

utilizando o teorema de Fubini.

Segue-se que

$$\begin{aligned} \Delta \left( \int_0^R \omega_n r^{n-1} I(\mathbf{x}, r) dr \right) &= \int_{|\mathbf{z}| \leq R} \Delta F(\mathbf{x} + \mathbf{z}) d\mathbf{z} \\ &= \int_{|\mathbf{z}|=R} \nabla F(\mathbf{x} + \mathbf{z}) \cdot \eta dS_{\mathbf{z}} \\ &= \int_{|\mathbf{z}|=R} \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x} + \mathbf{z}) \frac{z_j}{R} dS_{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

De (4.7) obtemos que

$$\begin{aligned} \Delta \int_0^R \omega_n r^{n-1} I(\mathbf{x}, r) dr &= \int_{|\xi|=1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x} + R\xi) \xi_j R^{n-1} dS_\xi \\ &= \omega_n R^{n-1} \frac{\partial}{\partial R} I(\mathbf{x}, R). \end{aligned}$$

Derivando com respeito a  $R$ , obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R} \left( \omega_n R^{n-1} \frac{\partial}{\partial R} I(\mathbf{x}, R) \right) &= \frac{\partial}{\partial R} \Delta \int_0^R \omega_n r^{n-1} I(\mathbf{x}, r) dr \\ &= \Delta \omega_n R^{n-1} I(\mathbf{x}, R) \end{aligned}$$

ou

$$\frac{\partial^2 I}{\partial R^2} + \frac{n-1}{R} \frac{\partial I}{\partial R} - \Delta I = 0 \quad (4.8)$$

(A equação de Darboux)

**Caso  $n = 3$ :**

$$\square u = 0 \quad \text{em três dimensões.}$$

Tomando a média esférica

$$I(\mathbf{x}, t, R) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\mathbf{y}|=1} u(\mathbf{x} + R\mathbf{y}, t) dS_{\mathbf{y}}.$$

Obtemos que

$$\Delta_{\mathbf{x}} I(\mathbf{x}, t, R) - I_{tt}(\mathbf{x}, R, t) = 0 \quad (4.9)$$

e via (4.8)

$$\frac{\partial^2 I}{\partial r^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial I}{\partial r} - \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0. \quad (4.10)$$

De (4.10) obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rI) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}(rI) = 0. \quad (4.11)$$

(4.11) é a equação da onda para a função  $rI$  com as condições iniciais,

$$\begin{aligned} rI(\mathbf{x}, 0, R) &= \frac{R}{4\pi} \iint_{|\mathbf{y}|=1} \varphi(\mathbf{x} + R\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = RI_{\varphi}(x, R) \\ \frac{\partial}{\partial t} rI(\mathbf{x}, 0, R) &= \frac{R}{4\pi} \iint_{|\mathbf{y}|=1} \psi(\mathbf{x} + R\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = RI_{\psi}(x, R) \end{aligned}$$

Utilizando a fórmula de d'Alembert obtemos que

$$rI(\mathbf{x}, t, R) = \frac{(R+t)I_{\varphi}(\mathbf{x}, R+t) + (R-t)I_{\varphi}(\mathbf{x}, R-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{R-t}^{R+t} \xi I_{\psi}(\mathbf{x}, \xi) d\xi$$

ou

$$I(\mathbf{x}, t, R) = \frac{(R+t)I_{\varphi}(\mathbf{x}, R+t) + (R-t)I_{\varphi}(\mathbf{x}, R-t)}{2R} + \frac{1}{2R} \int_{R-t}^{R+t} \xi I_{\psi}(\mathbf{x}, \xi) d\xi. \quad (4.12)$$

Pela definição de  $I(\mathbf{x}, t, R)$  segue-se que

$$\lim_{R \rightarrow 0} I(\mathbf{x}, t, R) = u(\mathbf{x}, t)$$

deve ser uma solução de (4.4) e para obter uma fórmula explícita para  $u$  temos que calcular os limites em (4.12). Estendendo as médias esféricas  $I_{\varphi}$  e  $I_{\psi}$  a valores negativos de  $r$  como funções pares, (4.12) tem a forma:

$$I(\mathbf{x}, t, R) = \frac{(t+R)I_{\varphi}(\mathbf{x}, t+R) - (t-R)I_{\varphi}(\mathbf{x}, t-R)}{2R} + \frac{1}{2R} \int_{t-R}^{t+R} \xi I_{\psi}(\mathbf{x}, \xi) d\xi.$$

O teorema do valor médio implica que

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{2R} \int_{t-R}^{t+R} \xi I_{\psi}(\mathbf{x}, \xi) d\xi = tI_{\psi}(\mathbf{x}, t). \quad (4.13)$$

Um cálculo direto nos dá

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{2R} \{(t+R)I_{\varphi}(\mathbf{x}, t+R) - (t-R)I_{\varphi}(\mathbf{x}, t-R)\} = \frac{\partial}{\partial t} (tI_{\varphi}(\mathbf{x}, t)) \quad (4.14)$$

Finalmente de (4.12), (4.13) e (4.14) obtemos que

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( t \iint_{|\mathbf{y}|=1} \varphi(\mathbf{x} + t\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \right) + \frac{t}{4\pi} \iint_{|\mathbf{y}|=1} \psi(\mathbf{x} + t\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}. \quad (4.15)$$

ou

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi t} \iint_{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|^2=t^2} \varphi(\mathbf{z}) dS_{\mathbf{z}} \right) + \frac{1}{4\pi t} \iint_{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|^2=t^2} \psi(\mathbf{z}) dS_{\mathbf{z}}. \quad (4.16)$$

Vamos mostrar que (4.15) é solução de (4.4). Seja  $t > 0$ , observamos que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (tI_{\psi}(x, t)) = t \frac{\partial^2}{\partial t^2} I_{\psi}(x, t) + 2 \frac{\partial}{\partial t} I_{\psi}(x, t) \quad (4.17)$$

Também

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(I_\psi(x, t)) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{|\mathbf{y}|=1} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(\mathbf{x} + t\mathbf{y}) y_j dS_{\mathbf{y}} \\ &= \frac{1}{4\pi t^2} \iint_{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|=t} \nabla \psi(\mathbf{z}) \cdot \boldsymbol{\eta} dS_{\mathbf{z}}\end{aligned}\quad (4.18)$$

e utilizando o teorema de Gauss segue-se que

$$\frac{\partial}{\partial t}(I_\psi(x, t)) = \frac{1}{4\pi t^2} \iiint_{|\mathbf{z}-\mathbf{x}| \leq t} \Delta \psi(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \frac{1}{4\pi t^2} \int_0^t \left( \iint_{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|=r} \Delta \psi(\mathbf{z}) dS_{\mathbf{z}} \right) dr$$

Derivando em relação a  $t$ , obtemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(I_\psi(x, t)) = \frac{1}{4\pi t^2} \iint_{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|=t} \Delta \psi(\mathbf{z}) dS_{\mathbf{z}} - \frac{1}{4\pi t^3} \iiint_{|\mathbf{z}-\mathbf{x}| \leq t} \Delta \psi(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$$

Substituindo as expressões de  $\frac{\partial}{\partial t} I_\psi$  e  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} I_\psi$  em (4.17) segue-se que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(tI_\psi(x, t)) = \frac{1}{4\pi t} \iint_{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|=t} \Delta \psi(\mathbf{z}) dS_{\mathbf{z}} = \Delta \left( \frac{1}{4\pi t} \iint_{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|=t} \psi(\mathbf{z}) dS_{\mathbf{z}} \right) = \Delta(tI_\psi(x, t))$$

ou seja,  $tI_\psi(x, t)$  é a solução da equação da onda. O mesmo argumento mostra que

$$tI_\varphi(x, t) = \frac{t}{4\pi} \iint_{|\mathbf{y}|=1} \varphi(\mathbf{x} + t\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}$$

é a solução da equação da onda. A derivada desta solução é também uma solução. Assim (4.15) também é uma solução de (4.4). Resta verificar as condições iniciais. Mas

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\partial}{\partial t}(tI_\varphi(\mathbf{x}, t)) + tI_\psi(\mathbf{x}, t) \right) = I_\varphi(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x})$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t)|_{t=0} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} tI_\varphi(\mathbf{x}, t) + t \frac{\partial}{\partial t} I_\psi(\mathbf{x}, t) + I_\psi(\mathbf{x}, t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \Delta(tI_\varphi(\mathbf{x}, t)) + t \frac{\partial}{\partial t} I_\psi(\mathbf{x}, t) + I_\psi(\mathbf{x}, t) \\ &= I_\psi(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

**Caso  $n = 2$ :**

$$\begin{aligned}\square v &= 0 \\ v(x_1, x_2, 0) &= \varphi(x_1, x_2) \in C^2 \\ v_t(x_1, x_2, 0) &= \psi(x_1, x_2) \in C^3\end{aligned}\quad (4.19)$$

Vamos usar o método da descida de Hadamard. Suponhamos que

$$\begin{aligned}u(x_1, x_2, x_3, t) &= v(x_1, x_2, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{4\pi t} \iint_{(\xi_1-x_1)^2 + (\xi_2-x_2)^2 + \xi_3^2 = t^2} \varphi(\xi_1, \xi_2) dS_{\xi_1, \xi_2} \right\} + \\ &+ \frac{1}{4\pi t} \iint_{(\xi_1-x_1)^2 + (\xi_2-x_2)^2 + \xi_3^2 = t^2} \psi(\xi_1, \xi_2) dS_{\xi_1, \xi_2}\end{aligned}\quad (4.20)$$

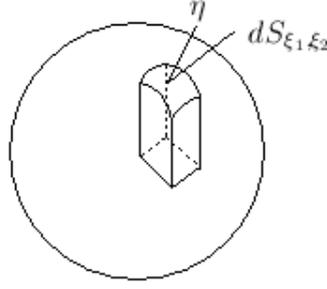


Figura 4.2:

Seja  $\eta$  o vetor normal unitário,

$$G = (\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + \xi_3^2 - t^2$$

$$\eta_3 = \frac{\frac{\partial G}{\partial \xi_3}}{\sqrt{(\nabla_{\xi} G)^2}} = \frac{\sqrt{t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}}{t}$$

$$dS_{\xi_1, \xi_2} = \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\eta_3}$$

$d\xi_1 d\xi_2$  projeção sobre  $\xi_3 = 0$  de  $dS_{\xi_1, \xi_2}$ . Conseqüentemente (4.20) tem a forma

$$v(x_1, x_2, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2\pi} \iint_{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 \leq t^2} \frac{\varphi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}} \right) \quad (4.21)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 \leq t^2} \frac{\psi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}} \quad (4.22)$$

a solução da equação da onda em duas dimensões.

**Teorema 13.** *Seja  $u \in C^2$  a solução de*

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

tal que

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \quad \text{em} \quad \{|x|; |x - x_0| \leq r\} \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad r \in \mathbb{R}^+.$$

Então  $u \equiv 0$  em  $C = \{(x, t); |x - x_0| \leq r - |t|\}$

*Demonstração.* A seguinte identidade pode ser demonstrada

$$2 \frac{\partial u}{\partial t} \left( \Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (|\nabla u|^2), \quad (4.23)$$

com

$$|\nabla u|^2 = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$$

Integrando (4.23) sobre  $C_T$  e utilizando o fato que  $\square u = 0$  segue-se que

$$0 = \int_{C_T} \left( 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (|\nabla u|^2) \right) dudt, \quad du = dx_1 - dx_n. \quad (4.24)$$

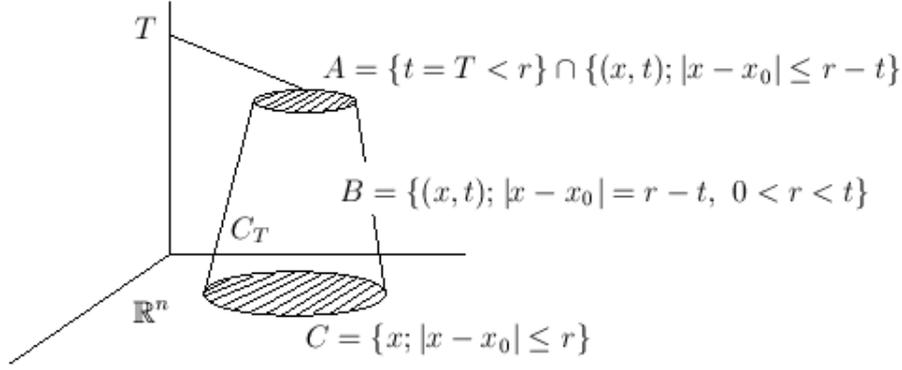


Figura 4.3:  $C_T = A \cup B \cup C \cup \text{interior}$

Aplicando o teorema de Gauss a (4.24) segue-se que

$$\begin{aligned}
0 &= \iint_B \left( 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_j} \eta_j - |\nabla u|^2 \eta_{n+1} \right) dS \\
&= \iint_C \left( 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_j} \xi_j - |\nabla u|^2 \xi_{n+1} \right) dS \\
&= \iint_A \left( 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_j} \lambda_j - |\nabla u|^2 \lambda_{n+1} \right) dS
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\text{Vetores normais unitários externos a } \begin{cases} B : \eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n+1}) \\ C : \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n+1}) \\ A : \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \end{cases}$$

Pela hipótese a integral sobre  $C$  é zero e o vetor normal a superfície  $A$  é igual a  $\lambda = (0, 0, \dots, 0, 1)$ . Assim podemos escrever (4.25) na forma

$$\iint_B \left( 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_j} \eta_j - |\nabla u|^2 \eta_{n+1} \right) dS = \iint_A |\nabla u|^2 dS \tag{4.26}$$

A seguinte identidade é válida

$$\begin{aligned}
\eta_{n+1} \left( \sum_{j=1}^n 2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_j} \eta_j - |\nabla u|^2 \eta_{n+1} \right) &= - \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \eta_{n+1} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \eta_j \right)^2 + \\
&+ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (\eta_{n+1}^2 - \sum_{j=1}^n \eta_j^2).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Substituindo (4.27) em (4.26) obtemos:

$$\begin{aligned}
\iint_A |\nabla u|^2 dS &= - \iint_B \frac{1}{\eta_{n+1}} \left[ \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \eta_{n+1} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \eta_j \right)^2 \right. \\
&+ \left. \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (\eta_{n+1}^2 - \sum_{j=1}^n \eta_j^2) \right] dS
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Observe que em  $B$  tem-se que

$$\eta_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{logo} \quad \sum_{j=1}^n n\eta_j^2 = \frac{1}{2}.$$

Assim de (4.28) segue-se que

$$0 \leq \iint_A |\nabla u|^2 dS = - \iint_B \sqrt{2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\partial u}{\partial t} \eta_j \right)^2 dS \leq 0.$$

Logo

$$\iint_A |\nabla u|^2 dS = 0,$$

o que implica em

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x, T) = 0 = \frac{\partial u}{\partial t}(x, T),$$

para  $1 < j \leq n$  e logo  $u \equiv \text{constante}$  em  $\{(x, t); |x - x_0| \leq 1 - T\}$ . O resultado é imediato.  $\square$

## 4.2 Equação do Calor

Considere a solução da equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l$$

que é contínua em  $[0, T] \times [0, l] = \Gamma$ . Então o princípio do máximo é válido na forma:

**Teorema 14.** *O máximo ou mínimo de  $u(x, t)$  é assumida em  $[0, l]$ ,  $t = 0$  ou  $x = 0$ ,  $x = l$ ,  $t \in [0, T]$ .*

*Demonstração.* Seja

$$\begin{aligned} M &= \max\{u : x \in [0, l] \text{ e } t = 0, \text{ ou } x = 0, x = l \text{ e } t \in [0, T]\} \\ &= \max\{u : (x, t) \in \partial\Gamma \setminus [0, l] \times \{T\}\} \end{aligned}$$

Se a afirmação não é válida, então existe  $(x_0, t_0) \in (0, l) \times [0, T]$  e  $\epsilon > 0$  tal que

$$u(x_0, t_0) = M + \epsilon.$$

Introduza a função  $v(x, t) = u(x, t) + k(t_0 - t)$ , com  $kT < \frac{\epsilon}{2}$ . Observamos que  $v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \epsilon$  e  $k(t_0 - t) < kT < \frac{\epsilon}{2}$ . Segue-se que

$$\begin{aligned} &\max\{v : (x, t) \in \partial\Gamma \setminus [0, l] \times \{T\}\} \\ &\leq M + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Assim,  $v(x, t)$  assume seu máximo no ponto  $(x_1, t_1)$ ,  $0 < t_1$ ,  $0 < x_1 < l$ . Neste ponto,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_1, t_1) \leq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x_1, t_1) \geq 0$$

mas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1, t_1) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_1, t_1) \leq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t_1) = \frac{\partial v}{\partial t}(x_1, t_1) \geq k > 0.$$

Segue-se que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t_1) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1, t_1) \geq k > 0,$$

uma contradição. O argumento é similar para o mínimo.  $\square$

**Corolário 4.** Se  $u(x, t)$ ,  $\underline{u}(x, t)$ ,  $\bar{u}(x, t) \in C^0([0, T] \times [0, l])$  satisfazem a equação do calor e as desigualdades

$$\underline{u}(x, t) \leq u(x, t) \leq \bar{u}(x, t), \quad t = 0, \text{ ou } x = 0, \text{ ou } x = l,$$

então

$$\underline{u}(x, t) \leq u(x, t) \leq \bar{u}(x, t), \quad \text{em } [0, T] \times [0, l].$$

*Demonstração.* Aplicação imediata do princípio do máximo  $\square$

**Teorema 15.** (*Unicidade*)

Suponha que  $u$  é a solução da equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad -\infty < x < \infty$$

e que  $u(x, t)$  é contínua em  $x$  e  $t$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,  $t \geq 0$  e  $|u(x, t)| \leq M < \infty$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,  $t \geq 0$ . Então  $u$  é única.

*Demonstração.* Suponha que existe duas solução  $u_1$  e  $u_2$  satisfazendo as condições e ponha  $w = u_1 - u_2$ .

$$|w| \leq |u_1| + |u_2| \leq 2M < \infty, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

e  $w(x, 0) = 0$ . Considere a região  $|x| < L$  e introduza a função auxiliar

$$v(x, t) = \frac{4M}{L^2} \left( \frac{x^2}{2} + a^2 t \right)$$

$v$  é contínua em  $[-L, L] \times [0, T]$ ,  $\forall L, T > 0$ .

$$v \geq |u(x, 0)| > 0 \quad \text{e} \quad v(\pm L, t) \geq 2M \geq w(\pm L, t).$$

Aplicando o corolário anterior na região  $|x| \leq L$ ,  $0 < t \leq T$  com  $\underline{u} = -v(x, t)$ ,  $u = w(x, t)$  e  $\bar{u} = v(x, t)$ , obtemos que

$$-\frac{4M}{L^2} \left( \frac{x^2}{2} + a^2 t \right) \leq w(x, t) \leq \frac{4M}{L^2} \left( \frac{x^2}{2} + a^2 t \right)$$

e tomando  $L \rightarrow 0$ , concluímos que

$$w(x, t) = 0$$

$\square$

Deveria ser observado que um famoso contra-exemplo de Tychonov indica que a solução da equação do calor é única somente sujeito a condições sobre seu crescimento espacial no infinito. Assim, no seguinte teorema trabalhamos para simplicidade sob fortes condições.

**Teorema 16.** (*Existência*)

Considere  $u(x, t)$  satisfazendo a equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

$u_0(x)$  sendo contínua em  $(-\infty, \infty)$  e  $|u_0| \leq M < \infty$ ,  $-\infty < x < \infty$ . Então existe uma única solução contínua e limitada do problema.

*Demonstração.* Estabelecemos a existência e a unicidade sendo garantidas pelo resultado anterior. Sabemos que via argumentação heurística dada anteriormente que a solução tem a representação:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4ta^2}} u_0(y) dy.$$

Observe que

$$1 \equiv \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4ta^2}} dy.$$

Derivando formalmente dentro da integral observamos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ e^{-\frac{(x-y)^2}{4ta^2}} \right\} u_0(y) dy = I_1.$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4ta^2}} \right\} u_0(y) dy = I_2.$$

são dominadas por

$$|I_1| \leq \frac{M}{\sqrt{4a^2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ e^{-\frac{z^2}{4ta^2}} \right\} \right| dz$$

e

$$|I_2| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2t\sqrt{4a^2\pi t}} e^{-z^2} + \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}} \frac{z^2}{t} e^{-z^2} \right\} dz$$

estas últimas integrais sendo uniformemente convergente para  $t \geq t_0 > 0$ . Dado que os integrandos de  $I_1$  e  $I_2$  são contínuos para  $-\infty < y < \infty$  e  $t \geq 0$ , a derivação dentro da integral é justificada. Segue-se que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}}{\sqrt{4a^2\pi t}} u_0(y) dy = 0.$$

Resta estabelecer que

$$\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = u_0(x).$$

Mas

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} u_0(x + 2a\sqrt{t}z) dz$$

Segue-se que

$$u(x, t) - u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \left( u_0(x + 2a\sqrt{t}z) - u_0(x) \right) dz$$

e

$$|u(x, t) - u_0(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x + 2a\sqrt{tz}) - u_0(x)| e^{-z^2} dz.$$

Agora, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $N_0(\epsilon)$  tal que

$$\int_{-\infty}^N e^{-z^2} dz < \frac{\epsilon}{6M} \quad \text{e} \quad \int_N^{\infty} e^{-z^2} dz < \frac{\epsilon}{6M}.$$

para  $N > N_0(\epsilon)$ .

Segue-se que

$$|u(x, t) - u_0(x)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^N |u_0(x + 2a\sqrt{tz}) - u_0(x)| e^{-z^2} dz$$

Mas  $(u_0(x + 2a\sqrt{tz}) - u_0(x))$  é uniformemente contínua em  $t$  e para  $z \in [-N, N]$  e consequentemente existe  $\delta(\epsilon)$  tal que  $t < \delta(\epsilon)$ ,  $|u_0(x + 2a\sqrt{tz}) - u_0(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ . Concluimos que

$$\begin{aligned} |u(x, t) - u_0(x)| &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz \\ &< \epsilon \quad \text{para todo } 0 \leq t < \delta(\epsilon). \end{aligned}$$

□

### 4.2.1 O contraexemplo de Tychonov

Considere a função analítica em  $\xi$ ,  $f(\xi) = e^{-\frac{1}{\xi^2}}$ ,  $|\xi - t| \leq \frac{t}{2}$ ,  $0 < t < \infty$ . Utilizando a representação para derivadas (Apêndice B),

$$f^k(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\xi-z|=\frac{t}{2}} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}} d\xi.$$

Observe que

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\xi^2} = \frac{16}{9t^2} \left( \frac{1}{2}(1 + \cos \phi)^2 + \frac{1}{4} \right) \geq \frac{4}{9t}$$

escrevendo  $\xi = t + t + \frac{t}{2}e^{i\phi}$ . Segue-se que

$$f^k(t) = \frac{k!}{2\pi} \int_{|\xi-z|=\frac{t}{2}} \frac{e^{-\frac{4}{9t^2}}}{(\xi-z)^{k+1}} d\xi = \frac{2^k k!}{t^k} e^{-\frac{4}{9t^2}}.$$

Defina

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k f(t)}{dt^k} \frac{x^{2k}}{2k!}, \quad -\infty < x, t < \infty$$

e note que

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{2k!} \frac{x^{2k}}{t^k} e^{-\frac{4}{9t^2}} \\ &< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{x^2}{t} \right)^k e^{-\frac{4}{9t^2}} \\ &= e^{\frac{x^2}{t}} e^{-\frac{4}{9t^2}}. \end{aligned}$$

Segue-se que  $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = 0$  uniformemente em  $x \in [x_0, x_1]$ ,  $\forall x_0, x_1$ . Também, calculamos que

$$u_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^k f(t)}{dt^k} \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d^{j+1} f(t)}{dt^{j+1}} \frac{x^{2j}}{(2j)!}$$

e

$$u_t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^{k+1} f(t)}{dt^{k+1}} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Como anteriormente estas séries são uniformemente convergentes em  $x \in [x_0, x_1]$ ,  $\forall x_0, x_1$  e  $u_t - u_{xx} = 0$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,  $t > 0$ . Certamente,  $u(x, t) \not\equiv 0$ , mas  $u \equiv 0$  também é uma solução do problema

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & t > 0 \\ u(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Para outros contraexemplos e maiores informações veja Hellwig [6] (4.3) e Widder [13] (II.6). Muitos exemplos e aplicações podem ser encontrados no livro de Crank [1].

## Exercícios

1. Considere a região  $D$  formada por  $2\alpha \leq x \leq 2\beta$ ,  $t = 0$  e as linhas fazendo ângulos  $\frac{\pi}{4}$  com o eixo e passando por  $(2\alpha, 0)$  e  $(2\beta, 0)$ .

(a) Suponha que

$$|\square u| \leq A$$

em  $D$  e

$$|u_t(x, 0)| \leq B \quad \text{e} \quad |u_t(x, 0)| \leq C.$$

Mostre que

$$|u(x, t)| \leq B + tC + \frac{1}{2}At^2$$

(b) Suponha que

$$|\square u| \geq -u$$

em  $D$  e

$$|u_t(x, 0)| \leq M < 0 \quad \text{e} \quad |u_t(x, 0)| < 0.$$

Mostre que

$$|u(x, t)| \leq M.$$

2. Considere o equação da onda com uma variável espacial,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

(a) Mostre que o princípio de Huygens vale para os dados iniciais

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0.$$

(b) Mostre que o princípio de Huygens não vale para os dados iniciais

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = g(x).$$

Para uma discussão do princípio de Huygens e suas generalizações, inclusive a teoria da relatividade referenciamos o leitor ao [3], [5] e [8].

3. Suponha que  $\phi$  satisfaz

$$\square\phi = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^3$$

com condições iniciais para  $t = 0$

$$\phi = f(x, y), \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad z = 0$$

$$\phi = 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad z \neq 0.$$

Mostre que  $\phi$  é zero para  $z^2 > c^2t^2$  e  $\phi = \bar{f}$  para  $z^2 < c^2t^2$ , sendo  $\bar{f}$  o valor médio de  $f$  do círculo no plano  $z = 0$  cujos pontos estão na distância  $cz$  do ponto  $(x, y, z)$ .

4. No exercício 2, substituindo o plano  $z = 0$  pela esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , mostre que  $\phi = \frac{a}{r}\bar{f}$  no círculo sobre esfera cujos pontos estão a distância  $cz$  de  $(x, y, z)$  e  $\phi = 0$  caso contrário.

5. Se  $T$  é a tensão de uma membrana em estado de equilíbrio e  $w$  o deslocamento vertical do plano de equilíbrio, para pequenas vibrações podemos supor que  $T$  é constante e se  $\rho dx dy$  é a massa do elemento  $dx dy$  a energia cinética  $E$  é

$$\frac{1}{2} \int \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy$$

e a energia potencial

$$V = \frac{1}{2} T \iint \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dx dy.$$

Utilizando o método do cálculo de variações para o Lagrangeano  $L = E - V$  mostre que a equação de Euler é

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad c^2 = \frac{T}{\rho}.$$

6. Suponha que  $u$  satisfaz

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 \Delta u + F(x, t), & x \in D & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & u_t(x, 0) &= g(x), & x \in D \end{aligned}$$

onde  $D$  é um domínio limitado com fronteira  $\partial D$ .

(a) Mostre que

$$\frac{d}{dt} \int_D \left( \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{c^2}{2} |\nabla u|^2 \right) dx = c^2 \int_{\partial D} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma + \int_D u_t F dx.$$

(b) Mostre que existe no máximo uma solução  $u$  que satisfaz a condição de fronteira de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \phi(x, t) \quad x \in \partial D \quad t \geq 0.$$

- (c) Mostre que existe no máximo uma solução  $u$  que satisfaz a condição de fronteira de Robin

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + a(x)u = \phi(x, t) \quad x \in \partial D \quad t \geq 0,$$

onde  $a(x) \geq 0$ .

- (d) Mostre que existe no máximo uma solução  $u$  que satisfaz a condição de fronteira de Dirichlet

$$u(x, t) = \phi(x, t) \quad x \in \partial D \quad t \geq 0,$$

7. Considere o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{aligned} u_{tt} + ku_t &= c^2 \Delta u + F(x, t), & x \in D & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & x \in D & \\ u(x, t) &= 0, & x \in \partial D & \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

- (a) Mostre que

$$\frac{d}{dt} \int_D \left[ \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{c^2}{2} |\nabla u|^2 \right] dx = -k \int_D u_t^2 dx + \int_D F u_t dx.$$

- (b) Em caso de uma membrana,  $c^2 = \frac{\tau}{\rho}$  e

$$\frac{d}{dt} \int_D \left[ \frac{1}{2} \rho u_t^2 + \frac{\tau}{2} |\nabla u|^2 \right] dx = -2k \int_D \frac{1}{2} \rho u_t^2 dx + \int_D \rho F u_t dx.$$

Observe que a taxa de variação da energia cinética mais a potencial é igual a contribuição da fonte menos a taxa com que a energia é dissipada.

- (c) Mostre que existe no máximo uma solução  $u$  que satisfaz o problema de de valor inicial e de fronteira.

8. Considere a propagação da onda em um meio não homogêneo

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} &= \operatorname{div}(c \nabla u) - qu + \rho F(x, t), & x \in D & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & x \in D & \\ u(x, t) &= \phi(x), & x \in \partial D & \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

onde a condição de fronteira é independente do tempo e  $\rho$ ,  $c$  e  $q$  são funções não negativas de  $x$ , com  $\rho, c > 0$ .

- (a) Estabeleça a relação de energia

$$E(t) = E(0) + \int_0^t \int_D \rho F u_t dx d\tau$$

onde

$$E(t) = \int_D \left( \frac{1}{2} \rho u_t^2 + \frac{1}{2} c |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} q u^2 \right) dx.$$

- (b) Mostre que o problema dado tem no máximo uma solução.  
(c) Se  $F \equiv 0$ , mostre que (dado a existência) a solução depende continuamente dos dados iniciais e de fronteira.

9. Mostre que se  $u_0(x) \in C^0(\mathbb{R}^1)$  e  $|u_0(x)| \leq Me^{Ax^2}$ ,  $M, A \geq 0$

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} u_0(y) dy, \quad 0 < t \leq T$$

$$u(x, t) = u_0(x), \quad T < \frac{1}{\sqrt{4a^2 A}}, \quad \text{em } C^0((-\infty, \infty) \times [0, T])$$

é a solução do problema

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \\ u|_{t=0} &= u_0(x). \end{aligned}$$

(veja Hellwig [6], 4.1)

10. Defina

$$G_a(x, t) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}}{\sqrt{4\pi a^2 t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Mostre que

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_a(x, t) dx = 1, \quad t > 0$$

(b)

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \int_{-\delta}^{\delta} G_a(x, t) dx = 1, \quad \delta > 0$$

(c) Se  $t_1 > 0$ ,  $t_2 > 0$ , definindo

$$G_a(\cdot, t) * \phi(\cdot) = \int_{-\infty}^{\infty} G_a(y, t) \phi(x - y) dy, \quad t > 0$$

então

$$G_a(\cdot, t_1) * G_a(\cdot, t_2)(x) = G_a(x, t_1 + t_2).$$

11. Mostre que

$$G_1(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ty^2} \cos(xy) dy$$

12. A superfície  $x = 0$  do sólido semi-infinito  $x \geq 0$  é mantida em temperatura  $\theta_0$  durante  $0 \leq t \leq T$  e é mantida em temperatura zero para  $t > T$ . Mostre que se  $t > T$ ,

$$\theta(x, t) = \theta_0 \left\{ \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{k(t-T)}} - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{kt}} \right\}$$

e determine o valor de  $\theta$  se  $t < T$ .

13. Prove que a equação da difusão

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial t}$$

possui soluções do tipo

$$V = At^n \cdot {}_1F_1 \left( -n; \frac{1}{2}; -\frac{x^2}{4t} \right),$$

onde  $A$  e  $n$  são constantes e  ${}_1F_1(\alpha; \beta; z)$  denota a função hipergeométrica confluyente de argumento  $z$  e parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ .

14. Se a concentração  $c$  de um componente difundindo em um meio de duas fases é determinado pelas equações

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad x < 0, \quad \frac{\partial c}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad x > 0,$$

as condições de fronteira

$$c_1 = kc_2, \quad D_1 \left( \frac{\partial c}{\partial x} \right)_{-0} = D_2 \left( \frac{\partial c}{\partial x} \right)_{+0} \quad \text{em } x = 0$$

e a condição inicial

$$c = \begin{cases} c_0, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

em  $t = 0$ , mostre que quando  $x > 0$ ,

$$c = c_0 \frac{kD_1^{\frac{1}{2}}}{kD_2^{\frac{1}{2}} + D_1^{\frac{1}{2}}} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2tD_1^{\frac{1}{2}}} \right) \right],$$

e derive a expressão correspondente para  $x < 0$ .

# Bibliografia

- [1] Crank, J., *The Mathematics Diffusion*, OUP, Oxford, 1975.
- [2] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, AMS, Providence, Rhode Island, 1998.
- [3] Friedlander, *Huygens' Principle and Hyperbolic Equations*, Academic Press, New York, 1988.
- [4] Guenther, R. B., and Lee, J. W., *Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations*, Dover, New York, 1996.
- [5] Günther, P. , *The Wave Equations on a Curved Space-Time*, C.U.P., London, 1975.
- [6] Hellwig, G. , *Partial Differential Equations*, Teubner, Stuttgart, 1977.
- [7] Íório jr., R. J. and Íório, V., *Equações Diferenciais Parciais, uma Introdução.* , Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1988.
- [8] Naker, G. L. , *Space-Time and Singularities*, C.U.P., Cambridge, 1988.
- [9] Protter, M., Weinberger, H. F., *Maximum Principle in Differential Equations*, Prentice-Hall, N. J., 1967.
- [10] Sneddon, I. N., *Elements of Partial Differential Equations* , McGraw-Hill Book Company, INC., New York, Toronto e Londres, 1957.
- [11] Tychonov, A. N., *Uniqueness theorems for the heat conduction equation*, Mat. Sb. 42:2, 199-215, 1935.
- [12] Tychonov, A. N., and Samarsky, A. A., *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Holden-Day, San Francisco, 1964.
- [13] Widder, D. V., *The Heat Equation*, Academic Press, New York, 1975.

# Capítulo 5

## Algebra Tensorial e Cálculo Tensorial

### 5.1 Tensores

Considere um espaço vetorial  $V$  de dimensão  $n$  sob um corpo  $F$  e seu dual algébrico  $V^*$ . É conhecido da algebra linear (veja Roman [10]) que todos os espaços vetoriais de dimensão  $n$  são isomorfos e, portanto,  $V$  e  $V^*$  são isomorfos. Não obstante em algebra tensorial distinguimos entre  $V$  e  $V^*$ .

Da algebra linear sabemos que corresponde uma base  $\underline{e}_i$  de  $V$  e uma base única  $\underline{e}^j$  de  $V^*$  tal que

$$\langle \underline{e}_i, \underline{e}^j \rangle = \delta_j^i$$

Considere  $\underline{\lambda} \in V$ ,  $\underline{\lambda} = \sum_{i=1}^n \lambda^i \underline{e}_i = \lambda^i \underline{e}_i$  (utilizando a convenção de somatório tensorial) e  $\underline{\mu}^* \in V^*$ ,  $\underline{\mu}^* = \mu_i \underline{e}^i$ . Chamamos os vetores de  $V$ , vetores contravariantes e os vetores de  $V^*$ , vetores covariantes.

Correspondendo a uma mudança de base de  $\underline{e}_i$  a  $\underline{e}'_i$  em  $V$ , existe uma mudança correspondente de  $\underline{e}^j$  a  $\underline{e}^{j'}$  em  $V^*$ . Suponha que

$$\underline{e}'_i = c_i^k \underline{e}_k,$$

então

$$\underline{\lambda} = \sum_{i=1}^n \lambda^i \underline{e}_i = \sum_{i=1}^n \lambda^{i'} \underline{e}'_i = \sum_{i=1}^n \lambda^{i'} c_i^k \underline{e}_k,$$

e

$$\lambda^k = c_i^k \lambda^{i'}.$$

Ponha  $C = (c_i^k)$ , então

$$\underline{e}' = C \underline{e}$$

e

$$(\lambda') = (C^t)^{-1}(\lambda),$$

dado que  $C$  é não singular. Esta é a regra de transformação de um vetor contravariante sob mudança de base. Suponha que

$$\underline{e}^{j'} = \gamma_r^j \underline{e}^r \quad \text{ou} \quad (\underline{e}') = \gamma(\underline{e})$$

Sabemos que

$$\langle \underline{e}'_i, \underline{e}^{j'} \rangle = \delta_j^i = \langle \underline{e}_i, \underline{e}^j \rangle \quad \text{e} \quad \langle c_i^k \underline{e}_k, \gamma_r^j \underline{e}^r \rangle = \delta_j^i.$$

Isto é dizer que

$$\langle c_i^k, \gamma_r^j \rangle \delta_r^k = \delta_j^i \quad \text{ou} \quad c_i^k \gamma_r^j = \delta_j^i.$$

Segue-se que  $C\Gamma^t = I$  e concluímos que  $\Gamma = C^{t-1}$  e

$$\mu'_i = c_i^k \mu_k \quad \text{ou} \quad \underline{\mu}' = C\underline{\mu},$$

a regra de transformação de vetores covariantes.

No caso que  $CC^t = I$ ,  $(C^t)^{-1} = (C^{-1})^{-1} = C$  e não há diferença entre vetores covariante e contravariante. Isto é o caso de transformações ortogonais quando  $F = \mathbb{R}$ .

Considere dois espaços lineares  $V$  e  $W$  de dimensão  $m$  e  $n$  e funções bilineares definidas sobre  $V^* \times W^*$ ,  $B(V^*, W^*)$ . Seja  $Q, R \in B(V^*, W^*)$ , definimos operações de adição e multiplicação por um escalar  $\alpha$  em  $B(V^*, W^*)$  por

$$(Q + R)(\lambda, \mu) = Q(\lambda, \mu) + R(\lambda, \mu)$$

e

$$(\alpha Q)(\lambda, \mu) = \alpha Q(\lambda, \mu)$$

$B(V^*, W^*)$  com estas leis de composição é um espaço linear, chamada produto tensorial  $V \otimes W$  de  $V$  e  $W$ .

Seja  $\underline{e}^i$  uma base de  $V^*$  dual a  $\underline{e}_i$  e  $\underline{e}^\alpha$  uma base de  $W^*$  dual a  $\underline{e}_\alpha$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\alpha = n + 1, \dots, n + m$ . Seja

$$\underline{\lambda} \in V^* \quad \text{e} \quad \underline{\mu} \in W^*$$

Se  $\underline{T} \in V \otimes W$ ,

$$\begin{aligned} \underline{T}(\lambda, \mu) &= T(\lambda_i \underline{e}^i, \mu_\alpha \underline{e}^\alpha) \\ &= \lambda_i \mu_\alpha \underline{T}(\underline{e}^i, \underline{e}^\alpha). \end{aligned}$$

Ponha

$$T^{i\alpha} = \underline{T}(\underline{e}^i, \underline{e}^\alpha).$$

Assim,

$$T^{i\alpha} = \underline{T}(\lambda, \mu) = \lambda_i \mu_\alpha T^{i\alpha}.$$

Defina

$$\underline{e}_{i\alpha}(\lambda, \mu) = \lambda_i \mu_\alpha, \quad \underline{e}_{i\alpha} \in V \otimes W \quad \text{e} \quad \underline{e}_{i\alpha}(\underline{e}^j, \underline{e}^\beta) = \delta_j^i \delta_\alpha^\beta$$

e

$$\begin{aligned} \underline{T}(\lambda, \mu) &= T^{i\alpha} \delta_i^j \delta_\alpha^\beta \lambda_j \mu_\beta \\ &= T^{i\alpha} \underline{e}_{i\alpha}(\lambda_j \underline{e}^j, \mu_\beta \underline{e}^\beta) = T^{i\alpha} \underline{e}_{i\alpha}(\lambda, \mu). \end{aligned}$$

Segue-se que

$$\underline{T} = T^{i\alpha} \underline{e}_{i\alpha}$$

e  $\underline{e}_{i\alpha}$  forma uma base de  $V \otimes W$ . De fato, suponha que  $x^{i\alpha} \underline{e}_{i\alpha} = 0$ , ( $x^{i\alpha} \neq 0$ ). Segue-se que  $\forall \lambda, \mu$ , temos

$$x^{i\alpha} \underline{e}_{i\alpha}(\lambda, \mu) = 0$$

que leva a

$$x^{i\alpha} \underline{e}_{i\alpha}(\underline{e}^j, \underline{e}^\beta) = 0$$

ou

$$x^{i\alpha} \delta_i^j \delta_\alpha^\beta = 0$$

o que implica  $x^{i\alpha} = 0$ .

Suponha que  $\underline{\lambda}$  tem componentes  $\lambda_i$  com respeito a  $\underline{e}^i$  e  $\mu, \mu^\alpha$  com respeito a  $\underline{e}_\alpha$ . Defina  $\lambda \otimes \mu$  a ser o elemento de  $V \otimes W$  com componentes com respeito a  $\underline{e}_{i\alpha}, \lambda^i \mu^\alpha$ , ou

$$\lambda \otimes \mu = \lambda^i \mu^\alpha \underline{e}_{i\alpha}.$$

Elementos de  $V \otimes W$  da forma  $\lambda \otimes \mu$  são chamados simples ou decomponíveis. Em particular,

$$\underline{e}_{i\alpha} = \underline{e}_i \otimes \underline{e}_\alpha.$$

Seja  $\mathcal{L}(V^*, W)$  o conjunto de aplicações lineares de  $V^*$  em  $W$ , então

$$V \otimes W = B(V^*, W^*) \approx \mathcal{L}(V^*, W).$$

De fato, observe que se

$$\underline{T} = T^{i\alpha} \underline{e}_{i\alpha}$$

e ponhamos

$$\begin{aligned} \underline{\lambda}^* &= \lambda_i \underline{e}^i \in V^*, & \underline{\mu} &= \mu^\alpha \underline{e}_\alpha \in W, \\ \mu^\alpha &= T^{i\alpha} \lambda_i \end{aligned}$$

define uma aplicação linear única de  $V^*$  em  $W$ . Inversamente, uma aplicação dessa forma é unicamente determinada pelos coeficientes  $T^{i\alpha}$  que define um elemento único de  $V \otimes W$ . Esta correspondência é independente de bases em  $V$  e  $W$  (isto é dizer que é natural).

Seja  $S, T \in M(V^* \times W^* \times Z^*)$ . Defina

$$(S + T)(\lambda, \mu, \nu) = S(\lambda, \mu, \nu) + T(\lambda, \mu, \nu) \quad \forall \lambda, \mu, \nu \in V^* \times W^* \times Z^*$$

e

$$(\alpha S)(\lambda, \mu, \nu) = \alpha S(\lambda, \mu, \nu) \quad \alpha \in F.$$

Defina  $\underline{e}_{i\alpha\gamma}$  por

$$\underline{e}_{i\alpha\gamma}(\lambda, \mu, \nu) = \lambda_i \mu_\alpha \nu_\gamma$$

e note que

$$\underline{e}_{i\alpha\gamma}(e^j, e^\beta, e^\chi) = \delta_i^j \delta_\alpha^\beta \delta_\gamma^\chi.$$

Se  $T \in M(V^*, W^* Z^*)$ ,

$$\begin{aligned} T(\lambda, \mu, \nu) &= T(\lambda_i e^i, \mu_\alpha e^\alpha, \nu_\gamma e^\gamma) \\ &= \lambda_i \mu_\alpha \nu_\gamma T(e^i, e^\alpha, e^\gamma). \end{aligned}$$

Coloque

$$T(e^i, e^\alpha, e^\gamma) = T^{i\alpha\gamma},$$

então

$$\begin{aligned} T(\lambda, \mu, \nu) &= T^{i\alpha\gamma} \lambda_i \mu_\alpha \nu_\gamma \\ &= T^{i\alpha\gamma} \delta_i^j \lambda_j \delta_\alpha^\beta \mu_\beta \delta_\gamma^\chi \nu_\chi \\ &= T^{i\alpha\gamma} \underline{e}_{i\alpha\gamma}(\lambda_j e^j, \mu_\beta e^\beta, \nu_\chi e^\chi) \\ &= T^{i\alpha\gamma} \underline{e}_{i\alpha\gamma}(\lambda, \mu, \nu) \end{aligned}$$

e  $T = T^{i\alpha\gamma} e_{i\alpha\gamma}$ . Como no caso bilinear é facilmente estabelecido que  $e_{i\alpha\gamma}$  são linearmente independentes e uma base. O isomorfismo natural entre  $M(V^*, W^*, Z^*)$  e  $V \otimes W \otimes Z$  é estabelecido fazendo corresponder ao elemento  $T^{i\alpha\gamma} e_{i\alpha\gamma}$  do primeiro o elemento  $T^{i\alpha\gamma} e_i \otimes e_\alpha \otimes e_\gamma$  do segundo.

Similarmente

$$M(V_1^* \times V_2^* \times \cdots \times V_k^*) \simeq V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_k$$

Defina

$$\begin{aligned} V^1 &= V, \\ V^r &= V^1 \otimes \cdots \otimes V^1 \quad (r \text{ vezes}), \end{aligned}$$

tensores contravariantes de ordem  $r$ . Definindo

$$\begin{aligned} V_1 &= V^*, \\ V_s &= V_1 \otimes \cdots \otimes V_1 \quad (s \text{ vezes}), \end{aligned}$$

tensores covariantes de ordem  $s$ ,  $V^r \otimes V_s$  formam tensores de ordem  $r + s$ , contravariantes de ordem  $r$  e covariantes de ordem  $s$  (tensores mistos do tipo  $(r, s)$ ). As vezes escrevemos  $V_s^r = V^r \otimes V_s = T_s^r(V)$  e  $F = V_0^0 = V^0 \otimes V_0$ .

Suponha que  $f : V \rightarrow W$  é uma aplicação linear.  $f$  induz uma aplicação linear

$$T^r(f) : T^r(V) \rightarrow T^r(W), \quad r \geq 0$$

via

$$T^r(f)(V_1 \otimes \cdots \otimes V_r) = f(V_1) \otimes \cdots \otimes f(V_r).$$

Considere os espaços vetoriais  $V, W, Z$  com bases  $e_i, e_\alpha, e_\gamma$

$$(V \otimes W) \otimes Z \approx V \otimes (W \otimes Z) \quad \text{naturalmente.}$$

De fato,  $T \in (V \otimes W) \otimes Z$  pode ser escrita como

$$T = T^{i\alpha\gamma} (e_i \otimes e_\alpha) \otimes e_\gamma$$

com  $T^{i\alpha\gamma}$  determinado unicamente. Considere

$$T^{i\alpha\gamma} (e_i \otimes e_\alpha) \otimes e_\gamma \rightarrow T^{i\alpha\gamma} e_i \otimes (e_\alpha \otimes e_\gamma) \in V \otimes (W \otimes Z).$$

Similarmente, qualquer elemento de  $V \otimes (W \otimes Z)$  determina um elemento único em  $(V \otimes W) \otimes Z$  e esta correspondência é um isomorfismo natural. Pela associatividade do produto tensorial, obtemos uma aplicação bilinear de  $T^r(V) \times T^s(V) \rightarrow T^{r+s}(V)$  e, assim, podemos definir uma estrutura de algebra sobre o somatório direto

$$\bigoplus_{r=1}^{\infty} T^r(V) = T(V),$$

a algebra tensorial de  $V$  sobre  $F$ .

Os resultados anteriores fornecem a base para uma volta a formulação clássica de tensores via as propriedades de componentes sob transformações lineares regulares.

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & \xrightarrow{g_1} & Z_1 \\
 & \searrow g_2 & \nearrow f \\
 & & Z_2
 \end{array}$$

**Observação 14.** *Definições alternativas do produto tensorial existem na literatura. Em dimensão finita não nos preocupamos com as topologias impostas ser compatíveis com a estrutura linear: todas são topologicamente isomorfas. Estas questões são importantes em dimensão infinita e diversos produtos tensoriais topológicos distintos podem existir. Uma definição usada em análise funcional é a seguinte: Considere o dual algébrico das formas bilineares em  $V \times W$ ,  $B(V, W)^*$ . Existe uma aplicação natural  $\phi$  de  $V \times W$  em  $B(V, W)^*$  definida por*

$$\phi(v, w)(h) = h(v, w), \quad \forall (v, w) \in V \times W, \quad h \in B(V \times W).$$

$\phi \in B(V \times W)$  mas  $\phi(V \times W)$  não é um subespaço vetorial de  $B(V, W)^*$ . O subespaço vetorial gerado por  $\phi(V \times W)$  é chamado o produto tensorial de  $V$  e  $W$ . De fato,  $(B(V, W), V \otimes W)$  são em dualidade e  $(V \otimes W)^* = B(V, W)$ . Em dimensão finita  $V \otimes W = B(V, W)^* \approx B(V^*, W^*)$  e retomamos a nossa definição original.

Sejam  $V, W, Z$  espaços vetoriais sobre o corpo  $F$ . Introduza a categoria  $\beta$ :

1.

$$Ob(\beta) = \{(z, g); g \in B(V, W; Z), \text{ aplicações bilineares de } V \times W \text{ em } Z\}$$

2. Se  $g_1 \in B(V, W, Z_1)$ ,  $g_2 \in B(V, W, Z_2)$ , um morfismo  $f$  de  $(Z_1, g_1)$  a  $(Z_2, g_2)$  é uma aplicação  $f: Z_1 \rightarrow Z_2$  tal que  $f \circ g_1 = g_2$  é comutativa.

Existem nesta categoria um objeto inicial universal, chamado o produto tensorial de  $V$  e  $W$ . Com esta definição

$$\mathcal{L}(V, \mathcal{L}(W, Z)) \approx B(V, W, Z) \approx \mathcal{L}(V \otimes W, Z)$$

e com  $Z = F$ ,

$$\mathcal{L}(V, W^*) \approx B(V, W) \approx (V \otimes W)^*.$$

Mais informações podem ser encontradas em [10].

Uma base  $\underline{e}_i$  de  $V^1$  determina uma base dual única  $\underline{e}^j$  de  $V_1$  e em geral uma base  $\underline{e}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$  em  $V_s^r$ . Dado que qualquer elemento  $\underline{T}$  de  $V_s^r$  é expresso unicamente na forma

$$\underline{T} = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \underline{e}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}.$$

Os números  $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$  são chamadas componentes de  $\underline{T}$  relativa a base  $(\underline{e}_i)$  de  $V^1$ .

Dois tensores do tipo  $(r, s)$  podem ser somados ou multiplicados por escalares para formar tensores do mesmo tipo. Relativo a uma base, os componentes do somatório de dois tensores é o somatório dos componentes respectivos dos tensores. Tensores  $R, S$  dos tipos  $(r, s), (p, q)$  podem ser multiplicados para formar um tensor do tipo  $(r + p, s + q)$  como a seguir: se  $R$  e  $S$  tiver componentes  $R_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}, S_{j_{s+1} \dots j_{s+q}}^{i_{r+1} \dots i_{r+p}}$  respectivamente com respeito a base  $(\underline{e}_i)$  de  $V^1$ , defina  $T = R \otimes S$  via

$$T_{j_1 \dots j_{s+q}}^{i_1 \dots i_{r+p}} = R_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} S_{j_{s+1} \dots j_{s+q}}^{i_{r+1} \dots i_{r+p}}.$$

De fato, este produto é invariante sob mudança de base. Recordamos que  $(\underline{e}'_i) = C(\underline{e}_i)$  da origem a

$$\underline{\lambda}' = (C^t)^{-1}\underline{\lambda} \quad \text{e} \quad \underline{\mu}' = C\underline{\mu}.$$

Sejam  $\underline{e}_i, \underline{e}_\alpha$  bases de  $V$  e  $W$  e  $\underline{e}_{i\alpha}$  a base de  $V \otimes W$ . A mudança de base  $V \otimes W$  é dada por

$$\underline{e}'_{i\alpha} = (C)_{ij}(C)_{\alpha\beta}\underline{e}_{j\beta}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} T &= T^{i\alpha}\underline{e}_{i\alpha} = T'^{j\beta}\underline{e}'_{j\beta} \\ &= T'^{j\beta}(C)_{ij}(C)_{\alpha\beta}\underline{e}_{j\beta} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T'^{j\beta} &= (C^t)_{ji}^{-1}(C^t)_{\beta\alpha}^{-1}T^{i\alpha} \\ &= \gamma_i^j\gamma_\alpha^\beta T^{i\alpha}, \quad \gamma_i^j = (C^t)_{ij}^{-1} \end{aligned}$$

o que corresponde a transformação contravariante apropriada. Em geral, a mudança de base em  $V^1$  induz mudança em  $V_s^r$  da forma

$$e'^{j_1 \dots j_r}_{i_1 \dots i_s} = c_{i_1}^{k_1} \dots c_{i_s}^{k_s} \gamma_{h_1}^{j_1} \dots \gamma_{h_r}^{j_r} e_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r}$$

e a transformação correspondente de  $T$

$$T'^{j_1 \dots j_r}_{i_1 \dots i_s} = \gamma_{i_1}^{k_1} \dots \gamma_{i_s}^{k_s} c_{h_1}^{j_1} \dots c_{h_r}^{j_r} T_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r}.$$

Observe que se esta relação é satisfeita, então

$$T = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \underline{e}'_{i_1 \dots i_s}{}^{j_1 \dots j_r}$$

é um vetor em  $V_s^r$  independente de base. Estas propriedades de transformação leva ao resultado clássico (Lei de Quociente de tensores) que é de grande utilidade nas aplicações de álgebra e cálculo tensorial.

**Teorema 17.** A Lei de quocientes

Considere a relação  $A_{(t)(q)}^{(r)(p)} B_{(p)}^{(q)} = D_{(t)}^{(r)}$ , onde  $D_{(t)}^{(r)}$  é um tensor conhecido e a relação é válida para todos os tensores arbitrários  $B_{(p)}^{(q)}$ , então  $A_{(t)(q)}^{(r)(p)}$  é um tensor.

*Demonstração.* Suponha que  $A_{(t)(q)}^{(r)(p)}$  tem uma representação em todos sistemas de coordenadas e  $A_{(t)(q)}^{(r)(p)} \rightarrow \tilde{A}_{(t)(q)}^{(r)(p)}$ . Então

$$\tilde{A}_{(t)(q)}^{(r)(p)} \tilde{B}_{(p)}^{(q)} = \tilde{D}_{(t)}^{(r)}.$$

Escrevemos

$$C_{(i)}^{(q)} = C_{i_1}^{q_1} \dots C_{i_t}^{q_t}, \text{ etc.}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{(t)(q)}^{(r)(p)} \tilde{B}_{(p)}^{(q)} &= \tilde{A}_{(t)(q)}^{(r)(p)} C_{(i)}^{(q)} \gamma_{(p)}^{(j)} B_{(j)}^{(i)} \\ &= C_{(m)}^{(r)} \gamma_{(t)}^{(m)} D_{(n)}^{(m)} \\ &= C_{(m)}^{(r)} \gamma_{(t)}^{(n)} A_{(n)(j)}^{(m)(i)} B_{(i)}^{(j)}, \end{aligned}$$

com  $B_{(i)}^{(j)}$  arbitrário.

Concluimos que

$$\tilde{A}_{(t)(q)}^{(r)(p)} C_{(i)}^{(q)} \gamma_{(p)}^{(j)} = C_{(m)}^{(r)} \gamma_{(t)}^{(n)} A_{(n)(q)}^{(m)(p)}$$

Multiplicando outra vez por  $\gamma_{(r)}^{(i)} C_{(j)}^{(r)}$  e utilizando  $\gamma_{(r)}^{(i)} C_{(i)}^{(q)} = \delta_{(r)}^{(q)}$ ,  $C_{(j)}^{(r)} \gamma_{(p)}^{(j)} = \delta_{(p)}^{(r)}$ , obtemos

$$\tilde{A}_{(t)(q)}^{(r)(p)} = C_{(j)}^{(r)} C_{(m)}^{(p)} \gamma_{(p)}^{(i)} \gamma_{(t)}^{(n)} A_{(n)(i)}^{(m)(j)}$$

que é a regra de transformação de um tensor de ordem  $(r + p, t + q)$ .  $\square$

Outras formulações deste resultado são possíveis. Mencionamos um resultado que é dado no livro Willmore [19] (Teorema 4.1).

Estes são componentes de um tensor do tipo  $(r + R, s + S)$  se e somente se  $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_s$  vetores contravariantes e  $\forall \mu_1, \dots, \mu_r$  vetores covariantes

$$T_{j_1 \dots j_s j_{s+1} \dots j_{s+S}}^{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_{r+R}} \lambda_1^{j_1} \dots \lambda_s^{j_s} \mu_{i_1}^1 \dots \mu_{i_r}^r$$

são as componentes de um tensor do tipo  $(R, S)$ .

Este resultado é uma consequência da nossa versão da lei de Quocientes. De fato,

$$\lambda_1^{j_1} \dots \lambda_s^{j_s} \mu_{i_1}^1 \dots \mu_{i_r}^r$$

é um tensor do tipo  $(s, r)$  e tensores dessa forma formam uma base de tensores gerais do tipo  $(s, r)$ . Isto implica que as condições do resultado anterior são válidas e a conclusão.

Uma operação frequentemente encontrada é a seguinte: Seja  $T \in V_s^r$  com componentes  $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ . Suponha que o índice  $i_p$  é associado com um  $j_q$  e considere

$$S_{j_1 \dots j_{q-1} j_{q+1} \dots j_s}^{i_1 \dots i_{p-1} i_{p+1} \dots i_r} = T_{j_1 \dots j_{q-1} h j_{q+1} \dots j_s}^{i_1 \dots i_{p-1} h i_{p+1} \dots i_r},$$

(utilizando a convenção tensorial de somatório em  $h$ ) então  $S \in V_{s-1}^{r-1}$ . Este resultado envolve um cálculo simples.

Resumindo esta discussão: Existem quatro operações fundamentais com tensores

1. Se  $S, T \in V_s^r$ ,  $S + T \in V_s^r$ ;
2. Se  $S \in V_s^r$  e  $\alpha \in F$ ,  $\alpha S \in V_s^r$ ;
3. Se  $S \in V_s^r$ ,  $T \in V_{s'}^{r'}$ ,  $S \otimes T \in V_{s+s'}^{r+r'}$ ;
4. contração de  $T \in V_s^r$  para dar um tensor em  $V_{s-1}^{r-1}$ .

Um tensor do tipo  $(2, 0)$  é simétrico se

$$T(\alpha, \beta) = T(\beta, \alpha), \quad \forall \alpha, \beta \in V_1.$$

Tomando  $\alpha = \underline{e}^i$ ,  $\beta = \underline{e}^j$ ,

$$T^{ij} = T(\underline{e}^i, \underline{e}^j) = T(\underline{e}^j, \underline{e}^i) = T^{ji}$$

ou seja, as componentes  $(T^{ij})$  formam uma matriz simétrica. Similarmente, se  $T$  é do tipo  $(0, 2)$ ,

$$T_{ij} = T_{ji}.$$

Em geral se  $T$  é  $(n, 0)$  ou  $(0, n)$ ,  $T$  é simétrico se

$$T_{1\dots n} = T_{\pi(1)\dots\pi(n)} \quad \text{com qualquer permutação } \pi$$

Similarmente,

$$T^{1\dots n} = T^{\pi(1)\dots\pi(n)}.$$

Um tensor  $T$  do tipo  $(2, 0)$  é anti-simétrico se

$$T(\alpha, \beta) = -T(\beta, \alpha) \quad \forall \alpha, \beta \in V_1$$

ou

$$T_{ij} = -T_{ji}.$$

Considere  $g \in V_2^0$ ,  $g$  é simétrico e  $g(\lambda, x) = 0 \quad \forall x \Rightarrow \lambda = 0$  ( $g$  é não singular).  $g$  especifica um métrica Riemanniana ou pseudo-Riemanniana  $\langle \xi, \eta \rangle = g_{ij}\xi^i\eta^j$ . No caso que  $g$  é anti-simétrico especifica um produto escalar simplético via  $\langle \xi, \eta \rangle = g_{ij}\xi^i\eta^j$  em dimensões pares.

No caso  $F = \mathbb{C}$ , existe uma base  $e_1, \dots, e_n$  em  $V$  tal que

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, 1 \leq i \leq p \\ -1 & \text{se } i = j, p+1 \leq i \leq p+q \leq n \\ 0 & \text{noutros casos} \end{cases}$$

No caso simplético existe uma base  $e_1, \dots, e_n$  em  $V$  tal que

$$\begin{aligned} \langle e_{i-1}, e_{ii} \rangle &= -\langle e_{ii}, e_{i-1} \rangle = 1, \quad i = 1, \dots, p, \quad p \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \\ \langle e_i, e_j \rangle &= 0 \quad \text{noutros casos.} \end{aligned}$$

De fato, se  $\langle \xi, \eta \rangle = 0 \quad \forall \xi, \eta$ ,  $\langle \rangle \equiv 0$ . Suponha que  $\xi, \eta$  satisfaz  $\langle \xi, \eta \rangle \neq 0$ . Ponha  $e_1 = \xi$  e  $e_2 = \frac{\eta}{\langle \xi, \eta \rangle}$  e sejam  $V_1$  o subespaço gerado por  $e_1$  e  $e_2$  e  $V_1^\perp$  o complemento ortogonal  $V_1^\perp = \{x; \langle \xi, \eta \rangle = \langle \eta, x \rangle = 0\}$  com  $\dim V_1^\perp = 2$ .

Restrinja  $\langle \rangle$  a  $V_1^\perp$  e aplique o argumento para obter  $e_1, \dots, e_{2p}$  tal que  $\langle \rangle \equiv 0$  sobre o seu complemento ortogonal  $V_0$  suplementa o conjunto  $e_1, \dots, e_{2p}$  com qualquer base em  $V_0$ . Nesta base

$$\langle \xi, \eta \rangle = \xi^1\eta^{n+1} + \xi^n\eta^{2n} - \xi^{n+1}\eta^1 - \dots - \xi^{2n}\eta^n.$$

O grupo de transformações lineares de  $\mathbb{R}^{2n}$  preservando  $\langle \rangle$  é determinado por  $Sp(n, R)$ , o grupo simplético.

## 5.2 Tensores Associados

Considere um tensor  $g_{ij}$  do tipo  $(0, 2)$  definindo o produto escalar de vetores  $\langle \xi, \eta \rangle = g_{ij}\xi^i\eta^j$ . A discussão anterior estabelece que se  $g_{ij}$  é simétrica define uma métrica Riemanniana ou pseudo-Riemanniana enquanto um tensor anti-simétrico define um produto escalar simplético. Existe um tensor inverso  $g^{kl}$  do tipo  $(2, 0)$  definido por

$$g_{ik}g^{kj} = g^{jk}g_{ki} = \delta_i^j$$

e um produto escalar de vetores covariantes

$$\langle \xi, \eta \rangle = g^{ij}\xi_i\eta_j.$$

Podemos introduzir uma operação de baixar ou aumentar índices em um tensor. Por exemplo, dado um tensor  $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$  do tipo  $(p, q)$ , o tensor  $\hat{T}_{i_1 j_1 \dots j_q}^{i_2 \dots i_p}$  do tipo  $(p-1, q+1)$  é

$$\hat{T}_{i_1 j_1 \dots j_q}^{i_2 \dots i_p} = g_{ik} T_{j_1 \dots j_q}^{ki_2 \dots i_p}$$

Que  $\hat{T}$  é um tensor pode ser visto assim:

$$S = g \otimes T$$

é um tensor e tomando a contração com respeito a  $l$  e  $l'$  em

$$S_{i_1 l' j_1 \dots j_q}^{li_2 \dots i_p} = g_{il'} \otimes T_{j_1 \dots j_q}^{li_2 \dots i_p}$$

obtemos o tensor  $\hat{T}$ . Similarmente podemos aumentar um determinado índice

$$\hat{T}_{j_2 \dots j_q}^{j_1 i_1 \dots i_p} = g^{jk} T_{kj_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$$

obtendo um tensor do tipo  $(p+1, q-1)$ .

Seja  $e^1, \dots, e^n$  uma base em  $V^*$ , então uma base no espaço de tensores simétricos do tipo  $(0, 2)$  é

$$e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i, \quad i \leq j$$

e uma base no espaço de tensores anti-simétricos é

$$e^i \wedge e^j = e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i.$$

Um tensor simétrico  $T_{ij}$  é decomposto como

$$(T_{ij}) = \sum_i T_{ii} e^i \otimes e^i + \sum_{i < j} T_{ij} (e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i)$$

e o anti-simétrico como

$$(T_{ij}) = \sum_{i < j} T_{ij} e^i \wedge e^j.$$

Em geral a definição de anti-simetria é estendido ao caso de tensores do tipo  $(0, k)$  via  $T_{i_1 \dots i_k}$  é anti-simétrico se para cada permutação  $\pi(1, \dots, k)$ ,

$$T_{\pi(1), \dots, \pi(k)} = \text{sgn } \pi T_{1 \dots k}.$$

Seja  $\Lambda^k V$  o subespaço de todos tensores anti-simétricos de grau  $k$ . Dado  $\omega_1 \in \Lambda^p$  e  $\omega_2 \in \Lambda^q$ , definimos o produto exterior  $\omega_1 \wedge \omega_2$  de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  em  $\Lambda^{p+q}$  como

$$\omega_1 \wedge \omega_2(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!} e^{i_1 \dots i_{p+q}} (\omega_1 \otimes \omega_2)(\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_{p+q}})$$

onde

$$e^{i_1 \dots i_s} = \begin{cases} 1 & \text{se } i_1 \dots i_s \text{ é uma permutação par de } 1, \dots, s \\ -1 & \text{se } i_1 \dots i_s \text{ é uma permutação ímpar de } 1, \dots, s \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e  $\lambda_1 \dots \lambda_{p+q}$  são vetores contravariantes arbitrários.

Defina  $\Lambda^* V$  por

$$\Lambda^* V = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k V, \quad n = \dim V,$$

obtendo um espaço vetorial de dimensão  $2^n$  ( $\Lambda^0 \simeq F$ ). Observe que se  $k > n$ , então um tensor anti-simétrico  $T_{i_1 \dots i_k}$  é identicamente zero  $\Lambda^k V = 0$ ,  $k > n$ .  $\Lambda^* V$  é uma álgebra sob a multiplicação  $\wedge$ . De fato, é evidente que

$$\begin{aligned} f \wedge (g_1 + g_2) &= f \wedge g_1 + f \wedge g_2 \\ (f_1 + f_2) \wedge g &= f_1 \wedge g + f_2 \wedge g, \end{aligned}$$

$f_1, f_2, g_1, g_2, f, g \in \Lambda^* V$ .

Se  $(e^i)$  é uma base de  $\Lambda^1 V = V^*$ , então uma base de  $\Lambda^* V$  é  $1, e^{i_1}, e^{i_1} \wedge e^{i_2} (i_1 < i_2), e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge e^{i_3} (i_1 < i_2 < i_3), \dots, e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_n} (i_1 < i_2 < \dots < i_n)$ . Também, da definição de  $\wedge$ , se  $f \in \Lambda^r V$  e  $g \in \Lambda^s V$

$$f \wedge g = (-1)^{rs} g \wedge f.$$

Recordamos que uma álgebra  $L$  é graduada se

$$L = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} L_\alpha$$

$\mathcal{A}$  sendo um semi-grupo comutativo e sob multiplicação

$$L_\alpha \cdot L_\beta \subset L_{\alpha+\beta}.$$

Casos importantes são  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$  (o grupo dos inteiros),  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}^+$  (o grupo dos inteiros não negativos) e  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_2$  (módulo 2).

Uma classe importante de álgebra graduadas são as álgebras graduadas comutativas e anticomutativas. Estas são álgebras  $\mathbb{Z}$ -graduadas  $L$  tal que

$$\xi \eta = (-1)^{\alpha\beta} \eta \cdot \xi \quad \xi \in L_\alpha, \eta \in L_\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$$

$\Lambda^* V$  é uma álgebra graduada comutativa - a chamada álgebra exterior ou álgebra de Grassmann.

### 5.3 Tensores Relativos

Suponha que  $T_{(q)}^{(p)}$  transforma conforme

$$T_{(q)}^{(p)} = (\det \gamma)^M \gamma_{(q)}^{(i)} C_{(j)}^{(p)} T_{(i)}^{(j)}.$$

Então dizemos que  $T_{(q)}^{(p)}$  é um tensor relativo de peso  $M$ .

$$(\det \gamma)^{-M} T_{(q)}^{(p)}$$

é um tensor.

### 5.4 Operador de Hodge

Considere transformações em quais  $\det \gamma > 0$  e  $\sqrt{g} = \det \gamma$ . Associamos em cada  $T \in \Lambda^k V$  um tensor  $*T \in \Lambda^{n-k} V$  via

$$(*T)_{i_{k+1} \dots i_n} = \frac{1}{k!} \det g \epsilon_{i_1 \dots i_n} T^{i_1 \dots i_k}$$

com

$$T^{i_1 \dots i_k} = g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} T_{j_1 \dots j_k}.$$

$\sqrt{g} \epsilon_{i_1 \dots i_n}$  é um tensor relativo as mudanças de coordenadas com Jacobiano positivo e  $*T$  também é um tensor com respeito a tais mudanças. Observe que

$$*(S + T) = *S + *T$$

$$*(*T) = (-1)^{k(n-k)} \text{sgn } g T$$

## 5.5 Variedades Diferenciais

Em geral trabalhamos em espaços de dimensão finita, mas nesta seção achamos conveniente definir variedades baseadas em espaços de Banach de dimensão infinita. Falando informalmente, uma variedade é um espaço topológico obtido costurando conjuntos abertos em espaços de Banach. Mais precisamente temos a seguinte definição:

**Definição 4.** *Seja  $M$  um espaço topológico. Uma carta local é uma par  $(V, \psi)$  consistindo de uma conjunto aberto  $V$  de  $M$  e um homeomorfismo  $\psi : V \rightarrow \psi(V) \subset F$ ,  $F$  um espaço de Banach.  $M$  é chamado uma variedade topológica se  $M$  admite uma família  $\mathcal{A} = \{U_i, \phi_i\}_{i \in J}$  de cartas,  $\phi_i(U_i) \subset F_i$ , espaços de Banach, tal que  $\{U_i\}_{i \in J}$  cobre  $M$ .  $\mathcal{A}$  é um atlas de  $M$ . Se  $(U_i, \phi_i), (U_j, \phi_j)$  são cartas e  $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ,  $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_{ij}) \rightarrow \phi_i(U_{ij})$  é um homeomorfismo. As aplicações  $\phi_{ij}$  são chamadas funções de transição de  $\mathcal{A}$ .*

Evidentemente podemos impor diversas hipóteses de regularidade sobre  $\phi_{ij}$ . Se  $\phi_{ij}$  são  $C^p$ -difeomorfismos  $1 < p < \infty$ ,  $\mathcal{A}$  é chamado um atlas diferencial de classe  $C^p$ . Uma estrutura diferencial de classe  $C^\infty$  é chamada suave. Uma variedade com um atlas  $C^p$  é chamada uma variedade  $C^p$ . Se  $F_j = F$ ,  $j \in J$ , dizemos que  $M$  é modelado sobre  $F$ . Se  $F = \mathbb{R}^m$ ,  $M$  é uma variedade real de dimensão  $m$ . Se  $F = \mathbb{C}^m$ ,  $M$  as funções de transição  $\phi_{ij}$  são holomorfas e  $M$  é chamado uma variedade complexa de dimensão  $m$ .

### Exemplos de Variedades Diferenciais

(a) Considere a esfera unitária  $S^n$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e escolha dois pontos, o polo norte  $P_+ = (0, \dots, 0, 1)$  e o polo sul  $P_- = (0, \dots, 0, -1)$ .

Em  $S^n \setminus P_+$  defina

$$\pi_+(x_1, \dots, x^{n+1}) = (y_+^1, \dots, y_+^n, 0) \quad (y_+^1, \dots, y_+^n) = \frac{x^1, \dots, x^n}{1 - x^{n+1}}$$

e em  $S^n \setminus P_-$  defina

$$\pi_-(x_1, \dots, x^{n+1}) = (y_-^1, \dots, y_-^n, 0) \quad (y_-^1, \dots, y_-^n) = \frac{x^1, \dots, x^n}{1 + x^{n+1}}$$

Assim, obtemos um atlas  $(U_+, U_-)$ ,  $U_+ = S^n \setminus P_+$ ,  $U_- = S^n \setminus P_-$ . Com  $\phi_+ = (y_+)$ ,  $\phi_- = (y_-)$  na interseção  $U_+ \cap U_-$  temos que  $|y_+||y_-| = 1$ .

(b) Considere o conjunto de todas as linhas retas passando a origem em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Cada linha corta a esfera inteira em dois pontos que pode ser traçada por reflexão  $x \rightarrow -x$ . Tome o atlas  $(U_+, U_-)$  em  $S^n$ , escolhendo um conjunto de abertos de  $U_\pm$  cobrindo  $S^n$  tal que nenhum tem interseção com sua imagem sob reflexão  $\sigma$ : por exemplo,

$$U_{\pm, i, +} = U_\pm \cap \{x^i > 0\} \quad \text{e} \quad U_{\pm, i, -} = U_\pm \cap \{x^i < 0\}, \quad i = 1, \dots, n + 1.$$

Nestas cartas utiliza  $\phi_\pm = y_\pm$ . Obtemos cartas em qual cada  $U$  parametriza as linhas retas atravessando a esfera em pontos de  $U$ . Estas cartas cobrem  $\mathbb{R}P^n$  e existe mudança suave de coordenadas em sua interseção.

(c) Considere um conjunto  $M$  e um grupo  $G$ .  $G$  age em  $M$  se  $\forall g \in G, \exists \alpha(g) : M \rightarrow M$ ,  $\alpha(g)$  inversível, tal que

$$\begin{aligned}\alpha(gh) &= \alpha(g)\alpha(h) \\ \alpha(g^{-1}) &= \alpha(g)^{-1} \\ \alpha(1) &= I\end{aligned}$$

A ação é livre se  $\neg \exists \alpha : M \rightarrow M$  (salvo  $\alpha(1) = I$ ) tal que  $\alpha(g)(x_0) = x_0$  por algum  $x_0 \in M$ .

Seja  $x \in M$  a órbita de  $x$  e  $\{\alpha(g)x = gx\}$ . Suponha que  $M$  é um espaço topológico e que  $G$  age em  $M$ . A ação é discreta se

(i) Se  $x, y \in M$ ,  $Gx \neq Gy$ , existe vizinhanças  $U$  e  $V$  de  $x$  e  $y$  tal que  $GU \cap GV = \emptyset$ .

(ii)  $\forall x \in M$ ,  $\exists$  uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que  $U \cap gU \neq \emptyset$  somente se  $gx = x$ .

Suponha que  $G$  age na variedade de dimensão  $n$ ,  $M$  via  $\alpha(g) : M \rightarrow M$ ,  $\alpha(g)$  difeomorfismo que são livres e discretos. Existe um atlas suave em  $M \setminus G$  tal que

(i)  $M \setminus G$  é uma variedade suave de dimensão  $n$ .

(ii)  $\pi : M \rightarrow M \setminus G$ ,  $\pi(p) = Gp$ ,  $p \in M$ , é suave.

*Demonstração.* Escolha  $u \in M$ ,  $U$  sendo uma vizinhança de  $x$  tal que são disjuntos por pares para  $x \in G$ . Suponha que existem coordenadas locais em  $U(x^1, \dots, x^n)$ . Neste caso dizemos que  $U$  é uma carta em  $M \setminus G$  com coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$ . Tais cartas cobrem  $M \setminus G$ .

Suponha que  $Gx \in U_\alpha \cap U_\beta$ . Se as cartas correspondem as vizinhanças dos pontos  $gx$ , a mudança de coordenadas na interseção tem as mesmas funções de transição com o  $M$ . Seja  $U_\alpha$  a projeção de uma vizinhança do ponto  $g_\alpha x$  e  $U_\beta$  a projeção de uma vizinhança de  $g_\beta x$ . A transição é efetuada por  $g_\alpha g_\beta^{-1} : U_\alpha \rightarrow U_\beta$  ou  $x_\beta^i = (g_\beta g_\alpha^{-1})(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ ,  $i = 1, \dots, n$  e temos um atlas suave em  $M \setminus G$ .  $M \setminus G$  é Hausdorff utilizando a primeira propriedade na definição de ação discreta. Em  $S^n$ ,  $\mathbb{Z}_2$  age  $x \rightarrow -x$ ,  $-x \rightarrow x$  e  $\mathbb{R}P^n = S^n \setminus \mathbb{Z}_2$ .  $\square$

(d) Considere  $V_{n,k} = \{(f_1, \dots, f_k), f_i \in \mathbb{R}^n, f_i \text{ ortonormais}\}$ .  $O(n)$  age em  $V_{n,k}$

$$(f_1, \dots, f_k) \rightarrow (Of_1, \dots, Of_k), \quad O \in O(n)$$

Tome uma base ortonormal  $e_1, \dots, e_n$  em  $\mathbb{R}^n$  e  $(e_1, \dots, e_k) \in V_{n,k}$ . O grupo de isotropia é  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ ,  $A \in O(n-k)$ . Assim,  $V_{n,k} = O(n)/O(n-k)$  e  $\dim V_{n,k} = nk - \frac{k(k+1)}{2}$ .

Se  $x = (f_1, \dots, f_k) \in V_{n,k}$ ,  $f_i = \sum_{j=1}^n x_{ji} e_j$ ,  $i = 1, \dots, k$  e  $V_{n,k} \rightarrow \mathbb{R}^{n,k}$  via  $(f_1, \dots, f_k) = ((x_{11}, \dots, x_{n1}), \dots, (x_{1k}, \dots, x_{nk}))$ . As relações de ortogonalidades são

$$\sum_{m=1}^n x_{mi} x_{mj} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, k \quad i \leq j$$

definindo a variedade regular em  $\mathbb{R}^{n,k}$  de Stiefel. Considere  $G_{n,k} = \{\text{todos subespaços do } \mathbb{R}^n\}$ . Em  $G_{n,k}$  o grupo  $O(n)$  age transitivamente e  $x^{n-k+1} = \dots = x^n = 0$  é mantido ob ação de matrizes  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ ,  $A \in O(k)$ ,  $B \in O(n-k)$ . Segue-se  $G_{n,k} = O(n) \setminus O(k) \times O(n-k)$  e  $\dim G_{n,k} = nk - k^2$ .  $O(k)$  age em  $V_{n,k} : (f_1, \dots, f_k) \rightarrow (Of_1, \dots, Of_k)$  é invariante sob a ação de  $O(k)$ . O espaço de órbitas desta ação é a variedade Grassmann  $G_{n,k}$  é

$$V_{n,k} \xrightarrow{O(k)} G_{n,k}.$$

Considere  $M$  uma espaço de Hausdorff e  $m$  um inteiro positivo. Seja  $\mathcal{F}^s$  um conjunto de funções reais em  $M$  com as propriedades:

1. Se  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r \in \mathcal{F}^s$  e  $u$  seja  $C^s$ -diferenciável em  $\mathbb{R}^r$ , então  $u(\phi_1, \dots, \phi_r) \in \mathcal{F}^s$ .
2. Se  $f \sim g$ ,  $g \in \mathcal{F}^s$ , então  $f \in \mathcal{F}^s$  ( $\sim$  significa  $f = g$  na vizinhança de cada ponto  $p \in M$ ).
3. Para cada  $p \in M$ ,  $\exists \phi_1, \dots, \phi_m \in \mathcal{F}^s$  e uma vizinhança  $U$  de  $p$  tal que  $q \rightarrow (\phi_1(q), \dots, \phi_m(q))$ ,  $q \in U$ ,  $U$  e as funções  $\phi_1, \dots, \phi_m$  podem ser escolhidos de tal maneira que cada  $f \in \mathcal{F}$  coincide em  $U$  com  $u(\phi_1, \dots, \phi_m)$ ,  $u$   $C^s$ -diferenciável em  $\mathbb{R}^m$ .

Então existe um atlas único  $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in A}$  tal que o conjunto das funções  $C^s$ -diferenciáveis em  $M$  (com atlas  $A$ ) é  $\mathcal{F}^s$ .  $\mathcal{F}^s$  é uma álgebra real.

Definimos um vetor tangencial  $\lambda$  como a aplicação linear de  $\mathcal{F}^s$  em  $\mathcal{F}^{s-1}$  tal que se  $\phi_1, \dots, \phi_r \in \mathcal{F}^s$  e  $x \in C^s(\mathbb{R}^r)$ ,

$$\lambda(u(\phi_1, \dots, \phi_r)) = \sum_{j=1}^r \left( \frac{\partial u}{\partial \phi_j} \right) (\phi_1) \lambda(\phi_j). \quad (5.1)$$

Observe que a escolha particular para  $u$ ,  $u = \phi_1, \phi_2$

$$\lambda(\phi_1, \phi_2) = \phi_2 \lambda \phi_1 + \phi_1 \lambda \phi_2 \quad (5.2)$$

Seja  $(x^i)$  um sistema de coordenadas locais ( $\in \mathcal{F}^s$ ). Então  $\forall f \in \mathcal{F}^s$  pode ser expressa na forma  $f(x^1, \dots, x^m)$ . As aplicações  $e_j(f) = \left( \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) (x^i)$ ,  $(e_j(x^i) = \delta_j^i)$ , aplica linearmente  $\mathcal{F}^s$  em  $\mathcal{F}^{s-1}$  e definindo  $\lambda^i = \lambda(x^i)$ ,

$$\lambda(f) = \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \lambda(x^j) = \sum_{j=1}^m \lambda^j \left( \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = \sum_{j=1}^m \lambda^j e_j.$$

Segue-se que qualquer vetor tangencial é uma combinação linear dos  $e_j$ 's. Suponha que  $a^j e_j = 0$ , então

$$a^j e_j(x^i) = a_j \delta_j^i = a_i = 0$$

e os vetores  $e_j$  são linearmente independentes. Isto quer dizer que os  $m$ -vetores  $e_i$  formam uma base  $(e_i)$  associada com o sistema de coordenadas. Em outras palavras o espaço tangencial tem dimensão  $m$ . Observe que quando  $s = \infty$  e quando consideramos analiticidade real (existência local de séries de Taylor) (5.1) e (5.2) são equivalentes. Isto não é verdade quando  $s$  é finito (veja A. G. Walker and W. F. Newns, *Tangent Planes to a Differentiable Manifold*, J. London Math. Soc., 1956, 400-407).

Normalmente escrevemos  $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$  e  $\lambda = \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

Em cada ponto  $p \in M$  existe um  $m$ -dimensional espaço vetorial  $T^1(p)$  gerado pelo  $\{e_j(p)\}_{j=1}^m$ , identificando  $T^1(p)$  com  $V^1$  podemos definir em cada ponto  $p$  o espaço de tensores de todos os tipos e, também, a álgebra de Grassmann das formas alternantes. Evidentemente, podemos introduzir campos vetoriais  $\lambda$  relativo a base  $(e_j)$  com menor regularidade, via

$$\lambda = \lambda^i e_i, \quad \lambda^i \in C^t(M), \quad t \leq s - 1.$$

Neste caso dizemos o campo vetorial é de classe  $t$ . Da mesma maneira podemos definir campos tensoriais  $T_{(j)}^{(i)}$  de classe  $t$  exigindo que relativo uma base natural em algum sistema de coordenadas locais  $T_{q_1 \dots q_j}^{p_1 \dots p_i}$  são de classe  $t$ .

Considere  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$  ( $U_\alpha, U_\beta$  cartas locais com coordenadas  $x^i, x^{j'}$ , respectivamente e bases matriciais correspondentes  $e'_i$  e  $e'_j$ ). Então,

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^{j'}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

e evidentemente

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} = \delta_j^i.$$

Suponha que  $M$  e  $M'$  são duas variedades diferenciais de dimensão  $m$  e  $m'$ , respectivamente e  $\phi : M \rightarrow M'$ ,  $p' = \phi(p)$ , satisfaz  $\forall f \in C^s(M')$ ,  $f' \circ \phi \in C^s(M)$ , então  $d\phi : T_p \rightarrow T_{p'}$  via  $\lambda' = (d\phi)(\lambda)$ ,  $\lambda'(f') = \lambda(f' \circ \phi)$ . Em termos de coordenadas locais  $x^i$  e  $x^{i'}$  temos que

$$\lambda^i = \lambda(x^i), \quad \lambda^{i'} = \lambda'(x^{i'}), \quad i = 1, \dots, m, \quad i' = 1, \dots, m'$$

e

$$\lambda^i = \lambda(x^{i'} \circ \phi) = \lambda(x^{i'}(x)) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \lambda^{i'}.$$

Similarmente, a aplicação  $d\phi$  induz uma aplicação do espaço de tensores de ordem  $s$ ,

$$\phi_* T = d\phi T = (T^{i_1 \dots i_r})' = \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial x^{j'_2}}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial x^{j'_r}}{\partial x^{i_r}} T^{i_1 \dots i_r}.$$

Também,  $\phi$  induz a aplicação dual levando  $T_1(p')$  em  $T_1(p)$  definida por

$$\phi^*(\mu')(\lambda) = \mu'(d\phi(\lambda)), \quad \forall \lambda \in T_1(p).$$

Em termos de coordenadas locais

$$\mu_i = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \mu_{j'}$$

e

$$\phi^* T = \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{j'_r}}{\partial x^{i_r}} T_{j'_1 \dots j'_r}(p').$$

Em particular  $T_1(p) = T_s^1(p)^*$  são as formas diferenciais em  $M$  com base  $dx^1, \dots, dx^m$ . Uma base para  $q$ -formas  $\Lambda^q(M)$  é dada por  $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}$  e cada  $q$ -forma  $\Lambda$  pode ser expressa por

$$A = A_{i_1 \dots i_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}, \quad q \leq m.$$

Agora vamos ver como as variedades tensoriais se enquadram nesta estrutura.

Defina  $T_s^r(M) = \bigcup_{p \in M} T_s^r(p)$ ,  $M$  sendo uma variedade diferencial de classe  $k$ .

A álgebra tensorial generaliza ao cálculo tensorial neste contexto. Podemos considerar os módulos produtos  $T^1 \times \dots \times T^1$  ( $s$  vezes) sobre  $\mathcal{F}$  e o  $\mathcal{F}$ -módulo de  $\mathcal{F}$ -aplicações multilineares  $T_s$  de  $T^1 \times \dots \times T^1$  em  $\mathcal{F}$ . Similarmente  $T^r$  é o  $\mathcal{F}$ -módulo de  $\mathcal{F}$ -aplicações multilineares de  $T_1 \times \dots \times T_1$  ( $r$ -vezes) em  $\mathcal{F}$ .  $T_s^r$  é o  $\mathcal{F}$ -módulo de todas as aplicações de  $T_1 \times \dots \times T_1 \times T^1 \times \dots \times T^1$  ( $r$ -vezes  $T_1$  e  $s$ -vezes  $T^1$ ). Escrevemos  $T_s^r(M)$  em vez de  $T_s^r$ .  $T_0^r = T^r$ ,  $T_s^0 = T_s$  e  $T_0^0 = \mathcal{F}$ .

Um campo tensorial  $T$  em  $M$  do tipo  $(r, s)$  é por definição um elemento de  $T_s^r(M)$ . O campo tensorial  $T$  é contravariante de grau  $r$  e covariante de grau  $s$ . Em particular, campo tensorial de tipo  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  em  $M$  são  $\mathcal{F}$ , os campos vetoriais em  $M$  e 1-formas em  $M$ . Se  $p \in M$ , definimos

$$T_s^r(p) = \left\{ \text{as aplicações reais multilineares de } \underbrace{T_p(M)' \times \dots \times T_p(M)'}_r \times \underbrace{T_p(M) \times \dots \times T_p(M)}_s \right\}$$

em  $\mathbb{R}$ .

$$T_s^r = \underbrace{T_p(M) \otimes \dots \otimes T_p(M)}_r \otimes \underbrace{T_p(M)' \otimes \dots \otimes T_p(M)'}_s$$

ou

$$T_s^r = \otimes^r T_p(M) \otimes^s T_p(M)'.$$

É fácil ver que  $T_s^r(M) = T_r^s(M)'$  ( $r, p \geq 0$ ). Defina

$$T(M) = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} T_s^r$$

$$T(p) = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} T_s^r(p).$$

A noção de  $\otimes$  pode ser estendida a  $T$  via

$$(S \otimes T)(p) = S(p) \otimes T(p), \quad S \in T_s^r, T \in T_\gamma^\rho, p \in M.$$

$T$  é um  $\mathcal{F}$ -módulo via

$$f(S \otimes T) = fS \otimes T = S \otimes fT, \quad f \in \mathcal{F}, S, T \in T.$$

$T$  é uma álgebra associativa sob  $\otimes$  e

$$T^* = \sum_{r=0}^{\infty} T^r, \quad T_* = \sum_{s=0}^{\infty} T_s$$

sob álgebras de  $T$ .

Seja  $\tilde{V}$  um espaço vetorial de dimensão  $m$  sobre  $\mathbb{R}$  e  $\tilde{T}_s^r$  o correspondente espaço de tensores do tipo  $(r, s)$ . Fixando uma base em  $\tilde{V}$  determinamos uma base em  $\tilde{T}_s^r$ . Seja  $(U, x)$  uma carta com coordenadas locais  $\{x^i(p)\}$  em  $\mathbb{R}^m$  determinando uma base  $dx^i(p)$  em  $T_1^*(p)$  e uma base bem definida em  $T_s^r(p)$ . Considere a aplicação

$$\phi_U : U \times \tilde{T}_s^r \rightarrow T_s^r(U)$$

$\phi_U(p, t)$ ,  $p \in U$ ,  $t \in \tilde{T}_s^r$ , pertencem a  $T_s^r(p)$  com os mesmos componentes  $\xi_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$  relativa a base  $T_s^r(p)$  com  $t$  em  $\tilde{T}_s^r$ .  $\phi$  é injetora. Seja  $V$  uma segunda vizinhança em  $M$ ,  $U \cap V = \emptyset$  e considere

$$\begin{aligned} \phi_{U,p} : \tilde{T}_s^r &\rightarrow T_s^r(p) \\ \phi_{U,p}(t) &= \phi_n(p, t). \end{aligned}$$

Então,  $g_{UV}(p) = \phi_{U,p}^{-1} \circ \phi_{V,p}$  é injetora de  $\tilde{T}_s^r$  em  $\tilde{T}_s^r$ . Seja  $x^{i'}(p)$  as coordenadas locais de  $p$  em  $V$ , determinando bases  $dv^{i'}(p)$  em  $T_i^*(p)$  e  $f_i(p)$  em  $T_i(p)$ . Colocando  $\tilde{t} = g_{UV}(p)t$ , segue-se que

$$\begin{aligned} \phi_U(p, t) &= \phi_V(p, \tilde{t}) \\ \phi_U(p, t) &= \tilde{\xi}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}(p) \end{aligned}$$

e

$$\phi_V(p, \tilde{t}) = \xi_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} f_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}(p)$$

com  $\xi_j^i, f_i^j$  as bases induzidas em  $T_s^r(p)$ .

Segue-se que

$$\tilde{\xi}^{(i)} = \left( \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{j'_1}} \right)_{x(p)} \dots \left( \frac{\partial x^{i'_s}}{\partial x^{j'_s}} \right)_{x(p)} \xi^{(j)}$$

defina  $g_{U,V}(p)$  e  $g_{U,V}(p)$  é um automorfismo linear. Dando a  $\tilde{T}_s^r$  a topologia de estrutura diferencial herdada de seus elementos considerados com pontos em um espaço euclidiano,  $\tilde{T}_s^r$  é uma variedade diferencial. Defina uma topologia em  $T_s^r(M)$  exigindo que para cada  $U$ ,  $\phi(U)$  aplica aberto de  $U \times \tilde{T}_s^r$  em abertos de  $T_s^r(M)$ .  $T_s^r(M)$  assim definido é um espaço de Hausdorff separável e uma variedade diferencial de classe  $k - 1$ .

Seja  $GL(\tilde{T}_s^r)$  o grupo de todos automorfismos lineares de  $\tilde{T}_s^r$  que são inversíveis. A família  $\{g_{UV}, U, V \in \mathcal{U}, U \cap V \neq \emptyset\}$ ,  $\mathcal{U}$  um atlas de  $M$  formam as funções de transição correspondendo a  $\mathcal{U}$ . Defina  $\pi : T_s^r(M) \rightarrow M$  por  $\pi(T_s^r(p)) = p$ . Para  $l < k$ ,  $f : M \rightarrow T_s^r(M)$  de classe  $l$  satisfazendo  $\pi \circ f = I$ , que é chamado um campo tensorial de tipo  $(r, s)$  e classe  $l$ .  $T_s^r(M)$  é um fibrado tensorial sobre base  $M$  com grupo de estrutura  $GL(n^{r+s}, R)$  e fibre  $T_s^r$ .

Podemos introduzir a operação  $d$  de derivação exterior que leva  $p$ -formas a  $(p+1)$ -formas em  $\Lambda^*(T, (M)) = \bigoplus_{k=0}^m \Lambda^k(T, (M))$ .

De fato, podemos definir  $d$  via

(i)  $d(w + \eta) = dw + d\eta$ ,  $w \in \Lambda^p$ ,  $\eta \in \Lambda^q$

(ii)  $d(w \wedge \eta) = dw \wedge \eta + (-1)^p w \wedge d\eta$

(iii) Se  $f$  é um escalar e  $\lambda$  um vetor

$$(df)(\lambda) = \lambda(f)$$

(iv) Se  $f$  é escalar,  $d(df) = 0$

Observe que se  $\eta = A_{i_1 \dots i_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} \in \Lambda^q(T_1(M))$  ( $\Lambda^q(M)$ ), utilizando (ii) e (i), obtemos que

$$d\eta = dA_{i_1 \dots i_q} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} \in \Lambda^{q+1}(M),$$

com  $dA_{i_1 \dots i_q} = \delta_{q+1} A_{i_1 \dots i_q} dx^{q+1}$ .

Cada 1-forma  $w$  pode ser escrita na forma

$$w = A^i df_i,$$

$$dw = dA^i df_i \quad \text{de (ii) e (iv)}$$

e

$$ddw = 0$$

Dado que qualquer  $q$ -forma é expressa como uma combinação linear de produtos exteriores de 1-formas segue-se que  $dd\eta = 0$ .

Formas são o instrumento natural para expressar noções de volume orientado (a noção de área orientada ocorre naturalmente no teorema de Stokes e aplicações em matemática aplicada tais como a teoria clássica de eletromagnetismo).

Considere o cubo  $k$ -dimensional singular em  $\mathbb{R}^n$

$$\sigma : I^k \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad I^k \equiv [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \equiv I_1 \times \dots \times I_k,$$

$\sigma$  suave  $x^j = 0$  e  $x^j = 1$  determina duas faces  $l_j^-$  e  $l_j^+$ , com orientações  $(-1)^0$  e  $(-1)^{j+1}$ .

**Teorema 18.** *Seja  $\phi$  uma  $(k-1)$ -forma e  $d\phi$  sua diferencial exterior, então*

$$\int_{\sigma(\partial I^k)} \phi = \int_{\sigma(I^k)} d\phi$$

*Demonstração.* Coloque  $w = \sigma^*(\phi)$ . Observe que

$$\int_{\sigma(I^k)} d\phi = \int_{I^k} \sigma^*(d\phi)$$

e

$$\int_{\sigma(\partial I^k)} \phi = \int_{\partial I^k} \sigma^*(\phi).$$

Temos que demonstrar que

$$\int_{\partial I^k} w = \int_{I^k} dw.$$

Mas

$$w = \sum_i w_i(x^1 \cdots x^k) dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k \quad (\widehat{\phantom{x}} \text{ indica omissão do termo}),$$

$w_i$  suave. Também,

$$\begin{aligned} dw &= \sum_i \frac{\partial w_i}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k \\ &= \sum_i (-1)^{i-1} \frac{\partial T_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_{I^k} dw &= \int_{I^k} \sum_i (-1)^{i-1} \frac{\partial T_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k \\ &= \sum_i \int_{I^1} \cdots \int_{\widehat{I^i}} \cdots \int_{I^k} \left( \int_{I_i} \frac{\partial T_i}{\partial x^i} dx^i \right) dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k \\ &= \sum_i \int_{I^1} \cdots \int_{\widehat{I^i}} \cdots \int_{I^k} \{ T_i(x^1, \dots, x^k)|_{x^i=1} - T_i(x^1, \dots, x^k)|_{x^i=0} \} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k \\ &= \int_{\partial I^k} w, \quad \text{onde } \widehat{\phantom{x}} \text{ indica omissão do termo} \end{aligned}$$

□

Extensões deste resultado pode ser obtido por aproximações de Whitney. De fato,

**Teorema 19.** (*Teorema de Stokes*)

Seja  $w$  um  $n-1$  forma sobre uma variedade compacta orientada de dimensão  $n$ , com fronteira suave ou seccionalmente suave  $\partial M$ . Então

$$\int_{\partial M} w = \int_M dw$$

Considere uma variedade suave  $M$  baseado em  $E$ . Um fibrado linear  $C^s(C^\infty, \text{analítica})$  sobre  $M$  consiste de

1. Um espaço  $X$  e uma aplicação sobrejetora  $\pi$  de  $X$  em  $M$  (projeção),
2.  $\pi^{-1}(x)$ ,  $x \in M$ , é um espaço topológico linear (o fibre de  $x$ ),
3. um espaço topológico linear  $F$ ,
4. uma cobertura  $\mathcal{U}$  aberta de  $M$ ,
5. para cada  $U \in \mathcal{U}$ , existe  $\tau_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  satisfazendo

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\tau_U} & U \times F \\ \pi \searrow & & \swarrow pr_1 \\ & U & \end{array}$$

é comutativa

6.  $(\tau_n)_X : X_x \rightarrow \{x\} \times F$  são isomorfismos lineares.

7. Se  $U$  e  $V \in \mathcal{U}$

$$\begin{aligned} \tau_{UV} : U \cap V &\rightarrow B(F, F) \quad (\text{topologia uniforme de operadores}) \\ \tau_{UV}(x) &= (\tau_U)_x (\tau_V)_x^{-1}, \quad x \in U \cap V \end{aligned}$$

é  $C^s(C^\infty, \text{analítica})$

Uma seção de um fibrado linear e uma aplicação  $s, s : M \rightarrow X$  tal que  $\pi \circ s = id$ .

## 5.6 Conexões Afim e Diferenciação Covariante

O diferencial de uma função  $f(p)$  definida em uma variedade diferencial é um vetor covariante, isto é dizer que as derivadas parciais de uma função com respeito a um sistema de coordenadas locais são as componentes de um campo vetorial covariante. Isto certamente não é o caso para as derivadas de um campo vetorial (contravariante)  $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ . Observe que

$$\frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \tilde{u}^k} = \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^j} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^k} \eta_l^i + \frac{\partial^2 \tilde{u}^i}{\partial u^j \partial u^l} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^k} \xi^j, \quad (5.3)$$

onde  $\underline{\xi}^i = \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^j} \xi^j$  em  $(U \cap \tilde{U})$ , o segundo termo à direita indicando que a derivada de um campo vetorial contravariante não é tensorial. É desejável resgatar a noção de derivação. Suponha que existe um conjunto de  $n^2$  formas diferenciais lineares  $w_j^i = \Gamma_{jk}^i du^k$  em uma vizinhança de coordenadas de tal forma que em  $U \cap \tilde{U}$  a condição

$$\frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^j} \tilde{w}_k^i = \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^k} w_j^k - \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^l \partial u^j} du^l. \quad (5.4)$$

É visto que esta condição é equivalente a

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{\partial^2 \tilde{u}^l}{\partial u^j \partial u^k} \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^l} + \frac{\partial \tilde{u}^r}{\partial u^i} \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^k} \tilde{\Gamma}_{rs}^l, \quad (5.5)$$

onde  $\Gamma_{jk}^i$  são os símbolos de Christoffel e estas equações são as equações clássicas de transformação que é conhecida como conexão afim. As relações (5.4) para  $w_j^i$  podem ser reescritas na forma

$$dp_j^i + p_j^k w_k^i = p_k^i \bar{w}_j^k, \quad p_j^i = \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^j} \quad (5.6)$$

em cada interseção de vizinhanças de coordenadas  $U \cap \tilde{U}$ .

Suponha que  $M$  é uma variedade com a conexão afim  $w_j^i$ . Se  $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$  é um campo vetorial contravariante obtemos que

$$\begin{aligned} d\tilde{\xi}^i &= dp_j^i + p_j^i d\xi^j \\ &= (w_j^k p_k^i - \tilde{w}_k^i p_j^k) \xi^j + p_j^i d\xi^j \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$(5.8)$$

ou

$$d\tilde{\xi}^i + \tilde{w}_k^i \tilde{\xi}^k = \Gamma_j^i (d\xi^j + w_k^j \xi^k).$$

Observamos que  $d\xi^j + w_k^j \xi^k$  transforma como um campo vetorial contravariante. Chamamos  $DX = d\xi^j + w_k^j \xi^k$  ou diferencial covariante de  $X$  em termos de uma base natural para covetores

$$\left( \frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \tilde{u}^j} + \tilde{\xi}^k \Gamma_{kj}^i \right) d\tilde{u}^j = p_n^j \left( \frac{\partial \xi^m}{\partial u^l} + \xi^k \Gamma_{kl}^m \right) du^l \quad (5.9)$$

e escrevemos em termos de componentes

$$D_l \xi^j = \frac{\partial \xi^j}{\partial u^l} + \Gamma_{kl}^j \xi^k \quad (5.10)$$

é a derivada covariante de  $X$  com respeito a coordenada  $u^l$ . De (5.9) é evidente que

$$\tilde{D}_l \tilde{\xi}^j = \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^m} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j} p_l \xi^m. \quad (5.11)$$

Similarmente, no caso de um campo vetorial covariante a derivada covariante de  $\xi_i$  é

$$D_j \xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial u^j} - \Gamma_{ij}^k \xi_k. \quad (5.12)$$

A extensão de derivação covariante de um tensor  $T_s^r(M)$   $\xi_{(j)}^{(i)} = \xi_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$  com respeito a  $u^k$  é evidente:

$$D_k \xi_{(j)}^{(i)} = \frac{\partial \xi_{(j)}^{(i)}}{\partial u^k} + \xi_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \Gamma_{lk}^{j_1} + \dots + \xi_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \Gamma_{lk}^{j_r} - \xi_{l j_2 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \Gamma_{j_1 k}^l - \dots - \xi_{j_1 \dots j_{s-1} l}^{i_1 \dots i_r} \Gamma_{j_s k}^l. \quad (5.13)$$

A notação clássica para  $D_l \xi^j$  é  $\xi_{,l}^j$  e  $D_j \xi_i = \xi_{i,j}$ , mas também é usada  $\nabla_i$ .

Considere uma curva seccionalmente contínua  $C = C(t)$  em  $M$  e os vetores tangenciais  $X(t) = \xi^i(t) \frac{\partial}{\partial u^i}$  são paralelos sobre  $C$  se

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial u^k} + \Gamma_{jk}^i \xi^j = 0 \quad \text{em } C \quad (5.14)$$

ou

$$\left( \frac{\partial \xi^i}{\partial u^k} + \Gamma_{jk}^i \xi^j \right) \frac{du^k}{dt} = 0$$

e a derivada intrínseca

$$\frac{\delta \xi^i}{\delta t} \equiv \frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^k}{dt} \xi^j = 0. \quad (5.15)$$

Uma curva  $C$  é auto-paralela se  $\xi = \frac{du^i}{dt}$  são paralelos em  $C$ , isto é dizer que

$$\frac{d^2 u^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} = 0. \quad (5.16)$$

As curvas auto-paralelas são curvas integrais de (5.16). Geometricamente (5.15) com dado inicial  $X = X(t_0)$  em  $t = t_0$  é um sistema de equações diferenciais de primeira ordem e fornece um isomorfismo linear de espaços tangenciais aos de  $C$ . Observe para um função  $f(p)$  em  $M$

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial u^i}$$

mas

$$D_j D_i f = D_j(D_i f) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial u^k}$$

e conseqüentemente

$$D_j D_i f - D_i D_j f = (\Gamma_{ji}^k - \Gamma_{ij}^k) \frac{\partial f}{\partial u^k} = T_{jk}^i$$

Das relações (5.5) observamos que  $T_{jk}^i$  são os componentes de um campo tensorial do tipo (1, 2) chamado o tensor de tensão da conexão  $\Gamma_{jk}^i$ . No caso que  $T_{jk}^i \equiv 0$ ,  $D_i D_j f = D_j D_i f$  para funções escalares mas isto não é verdade para vetores contravariantes ou covariantes. De fato, observe que

$$D_k D_j \xi^i - D_j D_k \xi^i = R_{ljk}^i \xi^l - T_{jlk}^l D_l \xi^i,$$

com

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial u^k} + \Gamma_{sl}^i \Gamma_{jk}^s - \Gamma_{sk}^j \Gamma_{jl}^s.$$

$R_{jkl}^i$  é o tensor de curvatura ou o tensor de Riemann-Christoffel. Em geral,

$$D_l D_k \xi_{(j)}^{(i)} - D_k D_l \xi_{(j)}^{(i)} = \sum_{p=1}^s \xi_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{p-1} i_{p+1} \dots i_r} R_{ikl}^{i_p} - \sum_{\sigma=1}^s \xi_{j_1 \dots j_{\sigma-1} j_{\sigma+1} \dots j_s} R_{j\sigma kl}^i - D_i \xi_{(j)}^{(i)} T_{kl}^i$$

Observe que se os tensores de tensão e curvatura são zeros, a derivação covariante é simétrica, mas não é necessariamente o caso que  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ .

Vamos dar uma interpretação geométrica do tensor de curvatura (veja também o livro de Wald [17] seção 3.2)

Considere uma curva fechada  $C = P_1 P_2 P_3 P_4$  em uma variedade diferencial  $M$  com conexão  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  e um valor  $A^b$  que é transladada paralelamente sobre  $C$ . Coloque  $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(P_1)$ . Sabemos que

$$\frac{\delta A^\mu}{\delta t} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha \frac{du^\beta}{dt},$$

$C = \{u^\beta(t)\}$  e

$$\Delta A^\mu = - \int_C \Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha \frac{du^\beta}{dt}.$$

Coloque

$$\epsilon^\mu = \mu^\beta(t) - \mu^\beta(t_0), \quad P = (u^\beta(t_0)) \in M.$$

Então,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu + \frac{\partial \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu}{\partial x^\mu} \epsilon^\nu + o(\epsilon^\nu) \quad (\text{em termos de coordenadas locais } u^\nu)$$

Também,

$$A^\alpha = \bar{A}^\alpha - \bar{\Gamma}_{\sigma\tau}^\alpha \bar{A}^\sigma \epsilon^\tau + o(\epsilon^\nu)$$

sobre condições de continuidade sobre  $\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\mu}{\partial x^\nu}$  em  $M$  e  $A^\sigma$  em  $M$ . Assim,

$$\Delta A^\mu = - \int_C \left( \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu + \frac{\partial \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu}{\partial x^\nu} \epsilon^\nu \right) (\bar{A}^\alpha - \bar{\Gamma}_{\sigma\tau}^\alpha \bar{A}^\sigma \epsilon^\tau) d\epsilon^\beta + o(\epsilon^2), \quad \epsilon = \max_{\nu, C} |\epsilon^\nu|.$$

Mas,

$$\int_C \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu \bar{A}^\alpha d\epsilon^\beta = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu \bar{A}^\alpha \int_C d\epsilon^\beta.$$

O primeiro termo na integral é somado por  $\tau$  e  $\sigma$  e podemos mudar  $\tau$  a  $\alpha$  e  $\alpha$  a  $\rho$  e similarmente no seguinte termo troca  $\nu$  por  $\alpha$  e  $\alpha$  por  $\sigma$ , obtendo

$$\Delta A^\mu = \left( \bar{\Gamma}_{\rho\beta}^\mu \bar{\Gamma}_{\sigma\alpha}^\rho \bar{A}^\sigma \frac{\partial \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu}{\partial x^\alpha} \right) \bar{A}^\sigma \int_C \epsilon^\alpha d\epsilon^\beta + o(\epsilon^2)$$

$$\int_C \epsilon^\alpha d\epsilon^\beta = [\epsilon^\alpha \epsilon^\beta]_{P_1} - \int_C \epsilon^\beta d\epsilon^\alpha = - \int_C \epsilon^\beta d\epsilon^\alpha.$$

Segue-se que  $f^{\alpha\beta} = \int_C \epsilon^\alpha d\epsilon^\beta$  é um tensor anti-simétrico de segunda ordem. Em  $\Delta A^\mu$  a expressão é somada em  $\alpha$  e  $\beta$  e trocando  $\alpha$  e  $\beta$  obtemos que

$$\Delta A^\mu = \left( -\bar{\Gamma}_{\rho\alpha}^\mu \bar{\Gamma}_{\sigma\beta}^\rho + \frac{\partial \bar{\Gamma}_{\sigma\alpha}^\mu}{\partial x^\beta} \bar{A}^\sigma \right) \int_C \epsilon^\alpha d\epsilon^\beta + o(\epsilon^2).$$

Somando as duas expressões para  $\Delta^\mu$  obtemos que

$$2\Delta A^\mu = - \left( \frac{\partial \bar{\Gamma}_{\sigma\beta}^\mu}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \bar{\Gamma}_{\sigma\alpha}^\mu}{\partial x^\beta} + \bar{\Gamma}_{\rho\sigma}^\mu \bar{\Gamma}_{\sigma\beta}^\rho - \bar{\Gamma}_{\rho\beta}^\mu \bar{\Gamma}_{\sigma\sigma}^\rho \right) \underline{A}^\sigma f^{\alpha\beta} + o(\epsilon^2)$$

Podemos fixar  $P_1$  e variar  $P_1 P_2 P_3 P_4$  e  $\bar{A}^\mu$  de tal forma que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{A}^\mu f^{\alpha\beta} \epsilon^{-2}$  é um tensor arbitrário mas  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Delta A^\mu \epsilon^{-2}$  é um vetor e segue-se pela lei do quociente que

$$R_{\sigma\alpha\beta}^\mu = \frac{\partial \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \bar{\Gamma}_{\sigma\sigma}^\mu}{\partial x^\beta} + \bar{\Gamma}_{\rho\sigma}^\mu \bar{\Gamma}_{\sigma\beta}^\rho - \bar{\Gamma}_{\rho\beta}^\mu \bar{\Gamma}_{\sigma\sigma}^\rho$$

é um tensor (o tensor de Riemann-Christoffel, considerando  $P_1$  como um ponto genérico em  $M$ , dando uma interpretação geométrica a curvatura).

## 5.7 Variedades Riemannianas

Uma métrica Riemanniana sobre uma variedade diferencial  $M$  é um campo tensorial  $g$  do tipo  $(0, 2)$  que é simétrico e positivo definido. Isto permite definir para  $X, Y \in T_p(M)$  o produto escalar

$$(X, Y) = g(X, Y) = g_{jk} \xi^j \eta^k,$$

$$g_{ij} = g \left( \frac{\partial}{\partial w^j}, \frac{\partial}{\partial w^k} \right), \quad X = \xi^i \frac{\partial}{\partial w^i}, \quad Y = \eta^j \frac{\partial}{\partial w^j},$$

$$\|X\|^2 = (X, X), \quad ds^2 = g_{jk} dx^j \otimes dx^k$$

em coordenadas locais é invariante.

Existe uma única conexão em uma variedade diferencial  $M$  de classe  $k$  possuindo uma métrica de Riemann e satisfazendo as propriedades:

- (a)  $T_{jk}^i = 0$
- (b) o produto escalar relativo alguma métrica é invariante sob translação paralela.

De fato, suponha que  $\Gamma_{jk}^i$  satisfaz estas condições (a) e (b). Seja  $X(t) = \xi^i(t) \frac{\partial}{\partial u^i}$  e  $Y(t) = \eta^i(t) \frac{\partial}{\partial u^i}$  vetores tangenciais no ponto  $u^i(t)$  na curva  $C(t)$ . Estes são paralelos em  $C(t)$  se

$$\frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^k}{dt} \xi^j = 0$$

e

$$\frac{d\eta^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^k}{dt} \eta^j = 0$$

A condições (b) implica que

$$\frac{d}{dt}(g_{ij}\xi^i, \eta^j) = 0$$

ou

$$\left( \frac{dg_{ij}}{dt} - g_{ij}\Gamma_{jk}^i \frac{du^k}{dt} - g_{il}\Gamma_{jk}^l \frac{du^k}{dt} \right) \xi^i \eta^j = 0.$$

Dado que isto é válido por qualquer  $X$  e  $Y$  e qualquer curva  $C(t)$  concluímos que

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = g_{kj}\Gamma_{ik}^l + g_{il}\Gamma_{jk}^l \quad (5.17)$$

Permutando os índices  $i, j, k$ , obtemos

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} = g_{lk}\Gamma_{ji}^l + g_{il}\Gamma_{ki}^l \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} = g_{li}\Gamma_{kj}^l + g_{kl}\Gamma_{ij}^l \quad (5.19)$$

Adicionando (5.17) e (5.18) e subtraindo (5.19), multiplicando por  $\frac{1}{2}g^{jm}$  e contraindo, obtemos que

$$\Gamma_{ki}^m = \left\{ \begin{matrix} m \\ ki \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2} \{ T_{ki}^m - T_{ki}^m - T_{ik}^m \} \quad (5.20)$$

com

$$\left\{ \begin{matrix} m \\ ki \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{mj} \left\{ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \right\} \quad (5.21)$$

e

$$T_{ki}^m = g^{mr} g_{is} T_{rk}^s \quad (5.22)$$

Se  $T_{jk}^i = 0$ ,  $\Gamma_{ki}^m = \left\{ \begin{matrix} m \\ ki \end{matrix} \right\}$  é uma função de métrica.

Considere uma variedade de Riemann de dimensão 3 e com orientação  $M$  e uma curva  $C = (x^i(t))$  em  $M$  que é retificável com respeito a métrica  $ds^2 = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$ . Podemos definir o comprimento do arco  $C$  via

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt$$

de algum ponto de referência  $P_0$  em  $C$  parametrizado por  $t_0$ . Seja  $\xi^i, \eta^i$  dois campos vetoriais contravariantes definidos em  $M$ . Lembramos que o ângulo  $\theta$  entre  $\xi^i$  e  $\eta^j$  é dado por

$$\cos \theta = \frac{g_{ij}\xi^i\eta^j}{\sqrt{g_{ij}\xi^i\xi^j}\sqrt{g_{ij}\eta^i\eta^j}}.$$

No caso que  $\xi^i$  e  $\eta^i$  são versores (vetores unitários com respeito a métrica),

$$\cos \theta = g_{ij} \xi^i \eta^j.$$

$\xi^i \perp \eta^i$  no caso que  $\cos \theta = 0$  ou  $g_{ij} \xi^i \eta^j$ . Observe que se  $C$  é parametrizado com respeito a distância  $s$

$$\lambda^i = \frac{dx^i}{ds}$$

é um versor e

$$g_{ij} \lambda^i \lambda^j = 1. \quad (5.23)$$

Considere a derivada intrínseca com respeito a  $s$  associada com a conexão  $\Gamma_{jk}^i$  vinculada a  $g_{ij}$ . De (5.23) sabemos que

$$g_{ij} \lambda^i \frac{\delta \lambda^i}{\delta s} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\delta \lambda^i}{\delta s} \perp \lambda^i.$$

Defina  $k$  por

$$k = \sqrt{g_{ij} \frac{\delta \lambda^i}{\delta s} \frac{\delta \lambda^j}{\delta s}},$$

então

$$\mu = \frac{1}{k} \frac{\delta \lambda^j}{\delta s}$$

é um versor sobre  $C$  e

$$g_{ij} \lambda^i \mu^j = 0. \quad (5.24)$$

Chamamos  $\mu^i$  o normal principal e  $k$  a curvatura de  $C$ . Derivando

$$g_{ij} \mu^i \mu^j = 1,$$

obtemos que

$$g_{ij} \mu^i \frac{\delta \mu^i}{\delta s} = 0 \quad (5.25)$$

e derivando (5.24)

$$g_{ij} \lambda^i \frac{\delta \mu^j}{\delta s} = -g_{ij} \frac{\delta \lambda^i}{\delta s} \mu^j = -k g_{ij} \mu^i \mu^j = -k. \quad (5.26)$$

Assim, segue-se que

$$g_{ij} \lambda^i \left( \frac{\delta \mu^j}{\delta s} + k \lambda^j \right) = 0 = g_{ij} \mu^i \left( \frac{\delta \mu^j}{\delta s} + s \lambda^j \right). \quad (5.27)$$

Utilizando (5.23), (5.27), (5.24) e (5.25), respectivamente. Segue-se que  $\frac{\delta \mu^j}{\delta s} + k \lambda^j$  é perpendicular a  $\lambda$  e  $\mu$ . Definimos o versor

$$\nu^i = \frac{1}{\tau} \left( \frac{\delta \mu^j}{\delta s} + k \lambda^j \right) \quad (5.28)$$

de tal maneira que  $(\lambda, \mu, \nu)$  tem orientação positiva em  $M$  (ou  $\epsilon_{ijk} \lambda^j \nu^k = 1$ ), determinando  $\tau$  o que é chamado de torsão da curva  $C$ . Observe que

$$\nu^k = \epsilon_{ijk} \lambda^i \mu^j = 1$$

e

$$\frac{\delta \nu^k}{\delta s} = \epsilon_{ijk} g^{mk} \frac{\delta \lambda^i}{\delta s} \mu^s + \epsilon_{ijm} g^{mk} \lambda^i \frac{\delta \mu^j}{\delta s} \quad (5.29)$$

(Recorda que  $\epsilon_{ijk} = \sqrt{g}e_{ijk}$  e  $\epsilon^{ijk} = \frac{e^{ijk}}{\sqrt{g}}$ )

Utilizando (5.24), (5.28) e (5.29) obtemos que

$$\frac{\delta\nu^k}{\delta s} = \tau\epsilon_{ijm}g^{mk}\lambda^i\nu^j = -\tau\mu^k. \quad (5.30)$$

Finalmente, obtemos o conjunto das equações de Frenet para  $C$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\delta\lambda^i}{\delta s} &= k\mu^i \\ \frac{\delta\mu^i}{\delta s} &= \tau\nu^i - k\lambda^i \\ \frac{\delta\nu^i}{\delta s} &= -\tau\mu^i. \end{aligned}$$

Este resulta em uma aplicação na teoria de dinâmica de partículas sobre curvas. Primeiro observamos que em sistema de coordenadas abitrárias e velocidade é dada por  $v^r = \frac{dx^r}{dt}$  e a aceleração  $f^r$  é calculada via a derivada absoluta com respeito ao tempo

$$f^r = \frac{\delta\nu^r}{\delta t} = \frac{d^2x^r}{dt^2} + \Gamma_{mn}^r \frac{dx^m}{dt} \frac{dx^n}{dt}$$

com conexão associada com a métrica induzida pelo sistema de coordenadas generalizadas. Suponha que a partícula movimenta-se sob a força  $Q^r$ , então se a massa é  $m$ ,  $Q^r = mf^r$ . A curva também pode ser parametrizada pela distância  $s = s(t)$  e  $v^r = \frac{dx^r}{dt} = \frac{dx^r}{ds} \frac{ds}{dt} = \nu\lambda^r$ ,  $\nu = \frac{ds}{dt}$  a velocidade escalar. Tomando derivadas absolutas

$$\begin{aligned} f^r = \frac{\delta\nu^r}{\delta t} &= \frac{d\nu}{dt}\lambda^r + \nu\frac{\delta\nu^r}{\delta t} \\ &= \frac{d\nu}{dt}\lambda^r + \nu^2k\mu^r. \end{aligned}$$

Além de  $Q^r$ , suponha uma reação da curva  $R^r$  na partícula. Segue-se que

$$mf^r = Q^r + R^r = m\frac{d\nu}{dt}\lambda^r + m\nu^2k\mu^r.$$

Também  $\frac{d\nu}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\nu^2}{ds}$  e a energia cinética  $T = \frac{1}{2}m\nu^2$ . Assim,

$$Q^r + R^r = \frac{dT}{ds}\lambda^r + 2Tk\mu^r.$$

Se a curva é lisa,  $R^r \perp$  curva e

$$R^r\lambda_r = 0 \quad (\lambda_r \text{ vetor associado a } \lambda^r).$$

Obtemos,

$$\begin{aligned} Q^r\lambda_r &= \frac{dT}{ds} \\ R^r\mu^r + Q^r\mu^r &= 2Tk \quad (\mu_r \text{ vetor associado a } \mu^r). \end{aligned}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} T &= \int_C Q^r \lambda_r = \int_C \frac{dx^r}{ds} ds && \text{(vetores associados)} \\ &= - \int_C \frac{dV}{ds} ds && \text{(} V \text{ é o potencial por definição)} \end{aligned}$$

ou

$$T + V = h \quad (\text{constante}).$$

Se  $R^r = 0$ , então

$$R^r = \frac{dT}{ds} \lambda^r + 2Tk\mu^r.$$

## 5.8 A formulação tensorial dos teoremas de Green e Stokes

Considere a região  $V$  com fronteira  $S$ . Assumimos que  $V$  é aberto, limitado com conteúdo de Jordan finito e que  $S$  é uma superfície  $C^1$ -regular fechada, parametrizada por coordenadas  $(u^1, \dots, u^{n-1})$  com métrica tensorial  $d\sigma^2$ . Pelos resultados estabelecidos em análise vetorial sabemos que

$$\int_V \frac{\partial f^r}{\partial x^r} dx = \int_S f^r l_r d\sigma,$$

em coordenadas cartesianas, onde  $l_r$  é o normal exterior a  $S$  e  $f^r$  é um campo contravariante  $F^r$  expresso no sistema cartesiano,

$$\frac{\partial f^r}{\partial x^r} = \text{div } F^r = F^r_{,r} \quad (\text{invariante})$$

sob todas transformações não-singulares de coordenadas  $x' \xrightarrow{\varphi} x$ . Mas

$$\int_V \text{div } F^r d\tau = \int_{V'} \text{div } F^r \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| dx' = \int_{V'} F^r_{,r} \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(x'_1, \dots, x'_n)} dx' = \int_{V'} F^r_{,r} d\tau'.$$

Similarmente,

$$\int_S f^r l_r d\sigma = \int_S F^r \nu_r = \int_{S'} F^r \nu_r d\sigma', \quad (\nu \text{ o vetor covariante associado a } \nu^r).$$

com  $d\sigma' = \sqrt{E'G' - F'^2} d\sigma$ , dado que  $d\sigma \rightarrow d\sigma'$  e  $F^r \nu_r$  são invariantes sob transformações. Segue-se que a expressão tensorial correta para o teorema de Green é

$$\int_V F^r_{,r} d\tau = \int_S F^r \nu_r d\sigma.$$

Com a formulação matemática correta do teorema de Stokes dada na seção de análise vetorial observamos que tomando  $u^r$  ser um campo vetorial  $C^1$ -contravariante e  $u_r$  o  $C^1$ -covariante associado,  $u_{r,s}$  é um tensor covariante de ordem 2 e  $G^r = -\epsilon^{rst} u_{s,t}$  é um vetor contravariante  $G^r = \text{curl } u_r$ . Em coordenadas cartesianas ponto  $\nu^r$ , o vetor unitário normal a  $S$  com vetor associado  $\nu_r$

$$G^r \cdot \nu_r = \text{curl } \underline{\eta} \cdot d\underline{S}$$

e

$$\int_S G^r \cdot \nu_r d\sigma = \int_S \text{curl} \underline{u} \cdot dS = \int_C \underline{u} \cdot d\underline{S} = \int_C u_r \cdot \frac{dx^r}{d\tau} d\tau.$$

Como anteriormente sob transformações regulares

$$\int_{S'} G'^r \nu'_r d\sigma' = \int_S G_r \cdot \nu_r d\sigma,$$

enquanto

$$u_r \cdot \frac{dx^r}{d\tau} = u'_r \frac{dx'^r}{d\tau'}$$

de tal modo que

$$\int_{C'} u'_r \frac{dx'^r}{d\tau'} d\tau' = \int_C u_r \cdot \frac{dx^r}{d\tau} d\tau$$

e finalmente

$$\int_S \epsilon^{rst} u_{s,t} \nu_r d\sigma = \int_C u_r \cdot \frac{dx^r}{d\tau} d\tau.$$

**Observação 15.** Já observamos que

$$V = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\rho d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\mu d\sigma}{r}$$

descreve o potencial elétrico devido a uma distribuição  $\rho$  de densidade de volume de carga e  $\mu$  uma densidade superficial de carga. O vetor força elétrica é

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial x^r} \quad (\text{um vetor covariante}).$$

O Teorema de divergência afirma que

$$\iiint_S E_r \nu^r d\sigma = \iiint_V \rho d\tau + \iint_\Sigma \mu d\sigma$$

Do exercício 1 observamos que

$$\iiint_S E_r \nu^r d\sigma = \iiint_V E_{,r}^r d\tau - \iint_\Sigma ((E_r \nu^r)_1 + (E_r \nu^r)_2) d\sigma$$

de tal modo que

$$\iiint_V (E_{,r}^r - \rho) d\tau - \iint_\Sigma ((E_r \nu^r)_1 + (E_r \nu^r)_2 + \mu) d\sigma = 0$$

é válido para todas as superfícies suaves  $S$ . Isto implica que

$$g^{rs} E_{r,s} = E_{,r}^r = \rho$$

e

$$(E_r \nu^r)_1 + (E_r \nu^r)_2 + \mu = 0,$$

as equações fundamentais para um campo elétrico estático em forma tensorial.

## 5.9 Tensores Homogêneos e Isotrópicos

Um tensor homogêneo em um espaço Euclidiano métrico é um tensor cujas componentes são constantes em qualquer sistema retângular de coordenadas. Um tensor isotrópico em um espaço Euclidiano métrico é um tensor cujas componentes em qualquer sistema retângular de coordenadas são invariantes sob transformações ortogonais com determinante 1. Observamos que não há qualquer diferença essencial entre tensores covariantes e contravariantes no caso de tensores isotrópicos. De fato, se  $\bar{x}^r = c_s^r x^s$  e  $\underline{a}_r = \gamma_r^m a_m$  ( $\bar{a}^t = a^t \gamma$ ),  $\bar{a}^t = a^t c^{-1} = a^t c^t = (ac)^t$  ou  $\bar{a}_r = c_s^r a_s$ . Tais tensores são escritos indiscriminadamente como  $A_{i\dots k}$ .

Considere uma família de transformações ortogonais  $c_{rs}(t)$ , dependendo diferencialmente sobre o parâmetro  $t \in R_+$ ,  $c_{rs}(0) = \delta_{rs}$ ,  $|c_{rs}(t)| = 1$ . Então,  $c_{rs}(t)$  tem um gerador infinitesimal

$$\left. \frac{d}{dt} c_{rs}(t) \right|_{t=0} = w_{rs}.$$

Observe que se  $O(t) = (c_{rs}(t))$ ,

$$O(t)^t O(t) = I$$

e

$$O(t)^t O(t) + O(t) O(t)' = 0 \quad ( ' \text{ indica derivação} ) \quad (5.31)$$

e tomando  $t \downarrow 0$ ,

$$(w_{rs})^t + (w_{rs}) = 0 \quad \text{ou} \quad w_{ij} = -w_{ji} \quad (\text{anti-simetria}). \quad (5.32)$$

Segue-se que

$$w_{ij} = e_{ijk} \xi^k \quad (5.33)$$

com algum vetor  $\xi^k$ . É importante mostrar que tensores isotrópicos podem ser expressos em termos dos sistemas  $e$  e  $\delta$ .

**Proposição 8.** *O único vetor isotrópico é 0.*

*Demonstração.* Necessariamente temos que se  $V_i$  é isotrópico,

$$V_i = c_{ip}(t) V_p, \quad \forall V_i \quad (5.34)$$

e diferenciando obtemos que

$$w_{ip} V_p = 0 \quad \text{ou} \quad e_{ipk} \xi^k V_p = 0. \quad (5.35)$$

Um resultado que deveria ser para todos geradores infinitesimais, isto é, para todo  $\xi^k$ . Segue-se que

$$V_a e_{aik} = 0 \quad (5.36)$$

e multiplicando por  $e_{cjk}$

$$\begin{aligned} V_a e_{aik} e_{cjk} &= V_a (\delta_{ac} \delta_{ij} - \delta_{aj} \delta_{ic}) \\ &= V_c \delta_{ij} - V_j \delta_{ic}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Colocando  $i = j$ , concluímos que  $V_i = 0$ . □

**Proposição 9.** *Um tensor isotrópico de ordem 2,  $W_{ij}$  tem a forma*

$$W_{ij} = \lambda \delta_{ij}, \quad \text{com } \lambda = \frac{1}{3} W_{aa}.$$

*Demonstração.* Por hipótese  $W_{ij}$  satisfaz

$$W_{ij} = W_{pq}c_{pi}(t)c_{qj}(t) \quad (5.38)$$

e diferenciando

$$0 = W_{pq}w_{pi}\delta_{qj} + W_{pq}w_{qj}\delta_{pi} \quad (5.39)$$

e utilizando (5.33), obtemos que

$$0 = W_{pq}e_{pik}\xi^k + W_{pq}e_{qjk}\xi^k \quad (5.40)$$

e (5.40) implica que

$$W_{pj}e_{pik} + W_{ip}e_{pjk} = 0. \quad (5.41)$$

Multiplicando (5.41) por  $e_{pmk}$  e somando em  $k$ , obtemos condições de forma (veja [7])

$$W_{ij}\delta_{km} - W_{mj}\delta_{ik} + W_{ki}\delta_{jm} - W_{km}\delta_{ij} = 0. \quad (5.42)$$

Colocando  $k = m$  em (5.42) obtemos

$$2W_{ij} + W_{ji} = W_{aa}\delta_{ij} \quad (5.43)$$

e, também,

$$2W_{ji} + W_{ij} = W_{aa}\delta_{ij}. \quad (5.44)$$

Segue-se que  $W_{ij} = W_{ji}$  e

$$W_{ij} = \frac{1}{3}W_{aa}\delta_{ij}$$

utilizando (5.43) e (5.44). □

**Proposição 10.** (*Invarialmente relegado aos exercícios*)

*Um tensor isotrópico de ordem 3 tem a forma*

$$W_{ijk} = \lambda e_{ijk}, \quad \lambda = W_{123}.$$

*Demonstração.* Por isotropia

$$W_{ijk} = c_{ir}(\tau)c_{js}(\tau)c_{kt}(\tau)W_{rst} \quad (5.45)$$

e diferenciando (5.45)

$$W_{rjk}w_{ir} + W_{irk}w_{jr} + W_{ijr}w_{kr} = 0 \quad (5.46)$$

e como antes

$$W_{rjk}e_{irs} + W_{irk}e_{jrs} + W_{ijr}e_{krs} = 0. \quad (5.47)$$

De (5.47), observamos que

$$W_{11r}e_{kr1} = 0 \quad (5.48)$$

e conseqüentemente que

$$W_{112}e_{k21} + W_{113}e_{k31} = 0. \quad (5.49)$$

De (5.44), se  $k = 2$

$$W_{113} = 0$$

enquanto se  $k = 3$

$$W_{112} = 0.$$

Similarmente,  $W_{221} = W_{223} = 0$  e  $W_{331} = W_{332} = 0$  e analogamente por outros pares. Então, segue-se se  $j = k = 1$

$$W_{r11}w_{ir} + W_{ir1}w_{1r} + W_{i1r}w_{1r} = 0.$$

Se  $i = 2$ ,

$$W_{111}w_{21} + W_{2r1}w_{1r} + W_{21r}w_{1r} = 0$$

e dado que  $W_{221} = W_{212} = 0$

$$W_{111}w_{21} + W_{231}w_{13} + W_{213}w_{13} = 0. \quad (5.50)$$

Observe que (5.50) é válido para todo  $w$ , e escolhendo  $w_{21} = 1$ ,  $w_{13} = 0$ , observamos que  $W_{111} = 0$ , enquanto escolhendo  $w_{21} = 0$ ,  $w_{13} = 1$ ,  $W_{231} = -W_{213}$ . Similarmente, concluímos que  $W_{222} = W_{333} = 0$  e  $W_{ijk}$  muda sinal sob transposições em  $(i, j, k)$ ,  $i \neq j \neq k$ . Segue-se que  $W_{ijk} = \lambda e_{ijk}$ ,  $\lambda = W_{111}$ , o resultado  $\square$

Vale a pena observar antes que prossigamos ao último resultado que existe diversas demonstrações destes resultados na literatura, algumas mais geométricas. Veja, por exemplo, §60 do livro [14] de Spain e seção 2.7 do livro [1] de Aris. Aqui, seguimos a discussão dada por Thomas em [15] seção 7 que tem um roteiro bem definido, não obstante as vezes é um tanto complicado algebricamente. Este último resultado é de uma importância central na teoria clássica de elasticidade e dinâmica dos fluidos Newtonianos que estudamos subsequentemente.

**Proposição 11.** *Um tensor isotrópico de ordem 4 pode ser escrito na forma*

$$W_{ijklm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{klm} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jlm} + \delta_{im} \delta_{jkl})$$

com

$$\lambda = \frac{2}{15} W_{aabb} = \frac{1}{15} W_{baab}$$

e

$$\mu = \frac{1}{10} W_{baab} - \frac{1}{30} W_{aabb}.$$

*Demonstração.* O tensor  $W$  satisfaz

$$W_{ijklm} = c_{ip}(t)c_{js}(t)c_{kr}(t)c_{ms}(t)W_{pqrl}. \quad (5.51)$$

Derivando (5.51), obtemos

$$W_{ajkm}w_{ai} + W_{iakm}w_{aj} + W_{ijam}w_{ak} + W_{ijka}w_{am} = 0. \quad (5.52)$$

Segue-se que

$$W_{ajkm}e_{iab} + W_{iakm}w_{jab} + W_{ijam}w_{kab} + W_{ijka}w_{mab} = 0. \quad (5.53)$$

Multiplicando (5.53) por  $e_{ibc}$ , obtemos que (somando em  $i$  e  $b$ )

$$3W_{ijklm} + W_{ikmj} + W_{imjk} = W_{aakm}\delta_{ij} + W_{iaam}\delta_{jk} + W_{iaak}\delta_{jm} \quad (5.54)$$

utilizando  $e_{ijk}e_{ipq} = \delta_{pj}\delta_{qk} = \delta_{pk}\delta_{aj}$  e reindexando índices livres. A equação (5.54) pode ser reescrita nas formas equivalentes

$$2W_{ijklm} + (W_{ijklm} + W_{ikmj} + W_{imjk}) = W_{aakm}\delta_{ij} + W_{iaam}\delta_{ik} + W_{iaak}\delta_{jm} \quad (5.55)$$

$$2W_{ikmj} + (W_{ikmj} + W_{imjk} + W_{ijkm}) = W_{aamj}\delta_{ik} + W_{iaaj}\delta_{km} + W_{iaam}\delta_{km} \quad (5.56)$$

$$2W_{imjk} + (W_{imjk} + W_{ijkm} + W_{ikmj}) = W_{aajk}\delta_{im} + W_{iaak}\delta_{mj} + W_{iaaj}\delta_{mk} \quad (5.57)$$

(5.56) e (5.57) são obtidas de (5.55) por permutação cíclica dos índices  $j, k, m$ . Somando (5.55), (5.56), (5.57), obtemos

$$5(W_{ijkm} + W_{ikmj} + W_{imjk}) = 2(W_{iaaj}\delta_{km} + W_{iaak}\delta_{im} + W_{iaam}\delta_{jk} + W_{aakm}\delta_{ij} + W_{aajm}\delta_{ik} + W_{aajk}\delta_{im}) \quad (5.58)$$

Multiplicando (5.55) por 5 e subtraindo (5.58), obtemos que

$$10W_{ijkm} = 4W_{aakm}\delta_{ij} - W_{aamj}\delta_{ik} - W_{aajk}\delta_{im} + 3W_{iaam}\delta_{jk} + 3W_{iaak}\delta_{jm} - 2W_{iaaj}\delta_{km}. \quad (5.59)$$

Precisamos expressar os componentes parcialmente contraídos no lado direito de (5.58) em termos de componentes plenamente contraídos. Assim, coloque  $k = m$  e  $j = k$  em (5.53), obtendo

$$W_{aaij} = W_{ijaa} = \frac{1}{3}W_{aabb}\delta_{ij}. \quad (5.60)$$

Também, observe que pondo  $i = m$  em (5.58), obtemos

$$2W_{jaak} = W_{baab}\delta_{jk} - W_{kaaj} \quad (5.61)$$

com

$$2W_{kaaj} = W_{baab}\delta_{jk} - W_{jaak} \quad (5.62)$$

trocando os índices  $j$  e  $k$ . De (5.61) e (5.62), obtemos

$$W_{jaak} = W_{kaaj} \quad (5.63)$$

e por (5.54),

$$W_{jaak} = \frac{1}{3}W_{baab}\delta_{jk}. \quad (5.64)$$

Substituindo (5.63) e (5.64) no lado direito de (5.59), obtemos que

$$W_{ijkm} = \lambda\delta_{ij}\delta_{km} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk})$$

com  $\lambda$  e  $\mu$  como enunciado no resultado. Observe no livro de Spain que é mostrado

$$W_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \nu\delta_{il}\delta_{jk}$$

e a simetria  $W_{ijkl} = W_{ijlk}$  leva a conclusão que  $\mu = \nu$  e o resultado dado aqui.  $\square$

## 5.10 As equações constitutivas e dinâmicas para meios contínuos e fluidos

Seja  $P_0, Q_0$  dois pontos de um meio contínuo em um estado não deformado e suponha  $P, Q$  são deslocados aos pontos  $P$  e  $Q$  e as coordenadas cartesianas de  $P_0, P, Q_0, Q$  são  $x_0^r, x^r, \underline{P_0Q_0}, \eta_0^r; \underline{PQ}, \eta^r, x_0^r + \eta_0^r, x^r + \eta^r$ .

Também, suponha que  $x^r - x_0^r = \xi^r(x_0^r)$ . Segue-se

$$\begin{aligned} x^r + \eta^r - (x_0^r - \eta_0^r) &= \xi^r(x_0^r + \eta_0^r) \\ &= \xi_0^r + \left( \frac{\partial \xi^r}{\partial x^s} \right)_0 \eta_0^s + O(\eta_0^s). \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\eta^r - \eta_0^r = \left( \frac{\partial \xi^r}{\partial x^s} \right)_0 \eta_0^s + O(\eta_0^s).$$

em coordenadas cartesianas considerando o vetor  $\eta_0^r$  em  $P_0$  e  $\eta^r$  em  $P$ ,

$$\eta_0^r - \eta^r = \left( \frac{\partial \xi^r}{\partial x^s} \right)_0 \eta_0^s.$$

Mas  $\frac{\partial \xi^r}{\partial x^s} = \xi_{.,s}^r$ , a derivada covariante de  $\xi^r$ , em coordenadas cartesianas e nestas coordenadas

$$\eta_0^r - \eta^r = \xi_{.,s}^r \eta_0^s.$$

Segue-se que esta relação é válida em coordenadas curvilíneas gerais:

$$\delta \eta_0^r = \eta_0^r - \eta^r$$

mede a deformação do vetor  $\eta_0^r$ . Escrevemos em geral

$$\delta \eta^r = \eta^r - \eta_0^r = \xi_{.,s}^r \eta_0^s$$

O tensor associado (com respeito a métrica induzida) não é simétrico em geral e introduzimos

$$r_{rs} = \frac{1}{2}(\xi_{r,s} + \xi_{s,r}), \quad w_{rs} = \frac{1}{2}(\xi_{r,s} - \xi_{s,r})$$

e

$$\begin{aligned} \xi_{rs} &= e_{rs} + w_{rs}, & \xi_{.,s}^r &= e_{.s}^r + w_{.s}^r \\ \delta \eta^r &= e_{.s}^r \eta_0^s + w_{.s}^r \eta_0^s. \end{aligned}$$

Suponha que  $T^r d\sigma$  é a força induzida em um elemento de superfície  $d\sigma$  com normal unitário  $\nu^r$  e as forças externas  $F^r$  por unidade de massa. Sejs  $\rho$  a massa específica do meio. Considere um volume  $V$  do meio com superfície  $\partial V$ . Em particular considere um pequeno tetrahedro  $V$  com três de duas faces paralelas aos eixos de um sistema de coordenadas cartesianas no ponto  $P$  e a quarta com normal  $\nu^r$ . Seja  $dA$  a área da face inclinada de tal modo que as áreas das faces perpendiculares aos eixos são  $dA_i = \nu_i dA$ . O normal exterior as faces são  $-e^i$  e as tensões nestas faces  $\underline{t}^i$ . Em equilíbrio,  $\underline{t}^{\nu^r} dA - \underline{t}^j \nu_j dA = 0$  ou  $(\underline{t}^{\nu^r})^i = (\underline{t}^j)^i \nu_j$ . Isto é dizer  $\underline{t}^{\nu^r} = E^{rs} \nu_s$ . Pela lei se quociente  $E^{rs}$  é um tensor contravariante de ordem 2. Mas geralmente temos as equações de equilíbrio do meio (entre dimensões):

$$\int_V \rho F^r d\tau + \iint_{\partial V} E^{rs} \nu_s d\sigma = 0 \quad (5.65)$$

e

$$\iiint_V \rho [\underline{r} \times \underline{F}] \tau + \iint_{\partial V} [\underline{r} \times E^{rs} \nu_s] d\sigma = 0. \quad (5.66)$$

De (5.65), obtemos que

$$\rho F^r + dw E^{rs} = \rho F^r + E_{,s}^{rs} = 0 \quad (5.67)$$

e de (5.66),

$$\iiint_V \rho \epsilon_{ijk} x^j F^k d\tau + \iint_{\partial V} \epsilon_{ijk} x^j E^{ks} \nu_s d\sigma = 0$$

que leva a

$$\iiint_V \rho \epsilon_{ijk} x^j F^k d\tau + \iiint_V (\epsilon_{ijk} x^j E^{ks})_{,s} d\tau = 0$$

ou

$$\iiint_V \rho \epsilon_{ijk} x^j (F^k + E_{,s}^{ks}) d\tau + \iiint_V \epsilon_{isk} E^{ks} d\tau = 0.$$

Utilizando (5.67) e regularidade obtemos que  $E^{ks} = E^{sk}$ .

Mais geralmente, suponha que  $f^r$  é o vetor de aceleração do meio. A equação dinâmica tem a forma

$$\iiint_V \rho (F^r - f^r) d\tau + \iint_{\partial V} T^r d\sigma = 0$$

e como observado acima

$$T^r = E^{rs} \nu_s.$$

Segue-se que

$$\iiint_V \rho (F^r - f^r) d\tau + \iint_{\partial V} E^{rs} \nu_s d\sigma = 0$$

e aplicando o teorema de divergência

$$\iint_S E^{rs} \nu_s d\sigma + \iiint_V E_{,s}^{rs} d\tau = 0.$$

Concluimos que

$$\iiint_V (\rho F^r - f^r + E_{,s}^{rs}) d\tau = 0$$

e sob condições de adequada regularidade de  $V$ ,  $\partial V$ ,  $F^r$  e  $E^{rs}$ ,

$$E_{,s}^{rs} + \rho F^r = \rho f^r.$$

### 5.10.1 Elasticidade Linear

As equações dinâmicas do meio dadas acima podem ser reformuladas como

$$g^{st} E_{rs,t} + \rho F_r = \rho f_r$$

e  $f_r = \frac{\delta \nu_r}{\delta t}$ . Em pequenos deslocamentos e para pequenas velocidades temos que

$$f_r = r \frac{\delta \nu_r}{\delta t} + \nu_{r,s} \nu^s$$

Segue-se que  $f_r \sim \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2}$  e as equações dinâmicas são

$$g^{sr} E_{rs,t} + \rho F_r = \rho \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2}.$$

A tensão em um meio elástico depende da deformação existente no meio e é zero quando a deformação é zero. Isto é dizer que o tensor de tensões é um funcional da deformação. A Lei de Hooke afirma que a tensão é um funcional linear da deformação, isto é dizer,

$$E_{rs} = c_{rs}^{mn} e_{mn}.$$

A lei de Quociente significa que  $c_{rs}^{mn}$  é um tensor misto de ordem quatro e é fácil ver que os coeficientes elásticos  $c_{rs}^{mn}$  são simétricos nos sob e super índices, ou

$$c_{rs}^{mn} = c_{rs}^{nm} = c_{sr}^{mn} = c_{sr}^{nm}.$$

Consequentemente a equação dinâmica pode ser escrita na forma

$$g^{s\tau} (e_{rs}^{mn} e_{mn})_{,\tau} + \rho F_r = \rho \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2}$$

ou

$$g^{s\tau} c_{rs}^{mn} e^{mn,\tau} + g^{st} c_{rs,\tau}^{mn} e_{mn} + \rho F_r = \rho \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2}.$$

Supondo que o meio é homogêneo, a mesma deformação em pontos diferentes do meio produzem as mesmas tensões. Isto é dizer que o tensor de tensões forma um campo tensorial paralelo constante quando o tensor de deformações tem a mesma característica, ou  $E_{rs,\tau} = 0$  se  $e_{rs,\tau} = 0$ . Segue-se que  $c_{rs,\tau}^{mn} e_{mn} = 0$  ou  $e_{rs,\tau}^{mn} = 0$ . Neste caso as equações dinâmicas simplificam a forma

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = \rho F_r + g^{s\tau} c_{rs}^{mn} e_{mn,s}.$$

No caso que o meio é isotrópico,

$$c_{rs}^{mn} = \lambda g^{mn} g_{rs} + \mu (\delta_r^m \delta_s^n + \delta_r^n \delta_s^m).$$

Segue-se que

$$E_{rs} = c_{rs}^{mn} e_{mn} = \lambda \theta g_{rs} + 2\mu e_{rs},$$

com  $\theta = \xi^r_{\dots r} = g^{mn} e_{mn}$ . As equações dinâmicas agora assumem a forma

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = \rho F_r + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x^r} + \mu g^{s\tau} \xi_{r,s\tau}$$

utilizando as relações

$$g^{s\tau} E_{rs,\tau} = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x^r} + 2\mu g^{s\tau} e_{rs,\tau}$$

e

$$\begin{aligned} g^{s\tau} e_{rs,\tau} &= \frac{1}{2} g^{st} (\xi_{r,s\tau} + \xi_{s,r\tau}) \\ &= \frac{1}{2} g^{s\tau} (\xi_{r,s\tau} + \xi_{s,t\tau}) \\ &= \frac{1}{2} g^{s\tau} \xi_{r,s\tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x^r} \end{aligned}$$

### 5.10.2 Fluidos perfeitos

No caso de um fluido perfeito o tensor sobre um elemento de superfície do meio  $\sigma$  é sempre normal a  $\sigma$  e segue-se que  $E_{rs} = -pg_{rs}$ ,  $p$  um invariante a pressão do fluido. As equações gerais podem ser escritas na forma covariante

$$g^{s\tau} E_{rs,\tau} + \rho F_r = \rho f_r.$$

Calculamos

$$g^{s\tau} E_{rs,\tau} = -g^{s\tau} (pg_{rs})_{,\tau} = -g^{s\tau} \frac{\partial p}{\partial x^\tau} = -\frac{\partial p}{\partial x^r}$$

ou

$$\rho f_r = -\frac{\partial p}{\partial x^r} + \rho F_r.$$

### 5.10.3 Tensões em Fluidos

Utilizamos a notação das seções anteriores. Suponha que o princípio de conservação de momento linear é válido então (em notação vetorial)

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \underline{v} dx = \iiint_V \rho \underline{F} + \iint_{\partial V} \underline{T}^n d\sigma.$$

A conservação de momento angular aplica a alguns mas não todos fluidos e afirma que

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho (\underline{r} \times \underline{v}) dx = \iiint_V \rho (\underline{r} \times \underline{f}) + \iint_S \underline{r} \times \underline{T}^\nu d\sigma.$$

Suponha que  $\dim V \sim d \rightarrow 0$ . Então da última equação obtemos que

$$\lim_{d \rightarrow 0} d^2 \iint_S \underline{T}^\nu d\sigma = 0.$$

Como anteriormente  $T^n = T^{ns} \nu_s$  e

$$T_{,s}^{rs} + F^r = \rho f^r$$

ou

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + T_{j,i,j}.$$

Considere fluido para que o momento angular é conservado e calculamos em coordenadas cartesianas

$$\underline{v} \times \underline{v} = 0 \quad \text{implica que} \quad \frac{d(\underline{r} \times \underline{v})}{dt} = \underline{r} \times \underline{a}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \underline{r} \times \underline{v} dx &= \iiint_V \rho \underline{r} \times \underline{a} dx \\ &= \iiint_V \rho \underline{r} \times \underline{a} dx + \iint_S \underline{r} \times \underline{T}^n. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \iint_S e_{rjk} x_j T_{kp} n_p d\sigma &= \iiint_V e_{ijk} x_j (T_{pk})_{,p} dx \\ \iiint_V (e_{ijk} x_j T_{pk,p} + e_{ijk} T_{jk}) dx & \end{aligned}$$

Defina  $\widehat{T}$  por  $\widehat{T} = e_{ijk}T_{jk}$ . Segue-se que

$$\iiint_V \underline{r} \times (p\underline{q} - p\underline{t} - \text{div}T)dx = \iiint_V \widehat{T}dx$$

e

$$\iiint_V \widehat{T}dx = 0$$

o que implica que  $\widehat{T} = 0$  e  $T_{ij} = T_{ji}$ .

Em seu longo trabalho no Handbuch der Physik VIII/1 pág 230 etseq, James Serrin tem apresentado as ideias essenciais de Stokes com respeito as equações constitutivas de um fluido não-elástico. Uma classe grande de fluidos satisfazem as hipóteses de Stokes.

1. O tensor de tensões  $T_{ij}$  é uma função contínua do tensor de deformação  $e_{ij}$  e do estado termodinâmico local mas é independente de outras hipóteses cinemáticas.
2. O fluido é homogêneo e isotrópico.
3. No caso que a deformação  $e_{ij} = 0$ , a tensão é hidrostática  $T_{ij} = -p\delta_{ij}$ .

Para fluidos compressíveis,  $p$  pode ser identificado com a pressão da termodinâmica clássica. Para fluidos incompressível  $p$  deveria ser encarada com um multiplicador de Lagrange a ser determinado das equações dinâmicas. A deformação do fluido em tempo  $\delta t$  é dada pelo vetor de deslocamento  $\xi^r = \nu^r dt$  e os componentes de tensão são  $e_{rs} = \frac{1}{2}(\nu_{r,s} + \nu_{s,r})dt$ . Seja  $e_{rs} = \frac{1}{2}(\nu_{r,s} + \nu_{s,r})$ . O tensor de tensões pode ser escrito sempre na forma

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + T'_{ij}.$$

Dinâmica dos fluidos clássica é estabelecida sob a hipótese que  $T'_{ij}$  é um funcional linear de  $e'_{rs}$

$$T'_{rs} = \gamma_{rs}^{mn} e_{mn}.$$

pela lei de quociente  $\gamma_{rs}^{mn}$  é um tensor (isotrópico e homogêneo) de tal modo que

$$\gamma_{rs}^{mn} = \lambda\delta_{mn}\delta_{rs} + \mu(\delta_{mr}\delta_{nj} + \delta_{nr}\delta_{mj})$$

em sistemas de coordenadas retangulares. A equação dinâmica toma a forma

$$\frac{\partial p}{\partial x^r} - (\lambda + \mu)\frac{\partial \text{div} v}{\partial x^r} - \mu\delta^{st}v_{r,st} = p(f_r - a_r)$$

com

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho\nu^r)_{,r} = 0.$$

Em sistemas gerais esta equação é

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x^r} - (\lambda + \mu)\frac{\partial \text{div} v}{\partial x^r} - \mu g^{st}v_{r,st} &= p(f_r - a_r) \\ &= p\left(f_r - \frac{dv_r}{dt}\right). \end{aligned}$$

Estas equações tem que ser complementadas pelas condições termodinâmicas no caso de fluxos compressíveis (a equação do estado  $p = f(\rho, T)$ ,  $T$  a temperatura) junto com as apropriadas

condições de fronteira.

Especificando o campo de velocidade em cada ponto e tempo (Euler)

$$v^r = v^i(x^r, t).$$

Segue-se que

$$f^r = \frac{\delta v^r}{\delta t} = \frac{\partial v^r}{\partial t} + v^r_{,s} v^s$$

ou

$$f^r = \frac{\partial v^r}{\partial t} + v_{r,s} v^s$$

e

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_{r,s} v^s = F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^r}.$$

A massa contida em um volume físico  $V$  no fluido é

$$M = \iiint_V \rho dx$$

e a taxa de mudança de massa é

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dx.$$

Mas isto também é igual a massa efluxo

$$- \iint_S \rho v^r \nu_r d\sigma = - \iiint_V (\rho v^r)_{,r} dx.$$

Segue-se que

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^r)_{,r} \right) dx = 0$$

e sob adequadas condições de regularidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^r)_{,r} = 0 \quad (\text{a equação da continuidade})$$

Ainda é necessário assumir uma condição de natureza termodinâmica, a existência de uma equação de estado. O vetor  $2\Omega^r = -\epsilon^{rmn} v_{mn}$  é o vórtice e as equações  $\frac{dx^r}{ds} = \frac{\Omega^r}{|\Omega^r|}$  as linhas de vórtice.

## 5.11 Consequências físicas da viscosidade

### 5.11.1 A fórmula de Stokes

Consideremos uma esfera de raio  $R$  movimentando com velocidade  $v_0$  paralelo ao eixo uniformemente em um fluido com viscosidade  $\nu$ . Supomos que a velocidade é baixa e negligenciamos as forças inerciais  $u \cdot \nabla u$ . As equações de Navier Stokes neste caso reduz a

$$\nu \Delta u = \nabla p \tag{5.68}$$

$$\text{div } u = 0 \quad (\rho = 1) \tag{5.69}$$

no caso de fluxo estacionário. Existe um abordagem relativamente sistemática como no livro de H. Lamb *Hydrodynamics* para resolver este problema, mas por simplicidade tratamos o problema ad hoc. Lembramos que a força  $\underline{F}$  na esfera é dada pela expressão

$$\underline{F} = - \int_S p \underline{n} dS + \int_S T_{ji} n_j dS. \quad (5.70)$$

Vamos testar a solução de (5.68) e (5.69) na forma

$$\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 = \nabla \Phi + \underline{u}_2, \quad \Delta \underline{u}_2 = 0. \quad (5.71)$$

Assim,

$$\nabla p = \nu \Delta \nabla \Phi + \nu \Delta \underline{u}_2 = \nu \nabla \Delta \Phi + \nu \Delta \underline{u}_2 \quad (5.72)$$

e conseqüentemente a

$$p = \nu \Delta \Phi + p_0. \quad (5.73)$$

De (5.69),

$$\operatorname{div} \nabla \Phi + \operatorname{div} \underline{u}_2 = \Delta \Phi + \Delta \underline{u}_2 = 0. \quad (5.74)$$

Vamos supor que  $\underline{u}_2 = (u_2, 0, 0)$  e  $\Delta \underline{u}_2 = 0$ . Uma possível solução é  $u_2 = \frac{a}{r}$  e  $\underline{u}_2 = \frac{a}{r} \underline{i}$ . Segue-se que

$$\operatorname{div} \underline{u}_2 = \underline{i} \cdot \nabla \left( \frac{a}{r} \right) = a \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial x} \quad (5.75)$$

e de (5.74),

$$\Delta \Phi + a \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial r} = 0. \quad (5.76)$$

Considere a expressão  $-\frac{a}{x} \frac{\partial r}{\partial x}$ , calculando

$$\Delta \left( -\frac{a}{2} \frac{\partial r}{\partial x} \right) = -\frac{a}{2} \frac{\partial}{\partial x} \Delta r = -\frac{a}{2} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \nabla r \quad (5.77)$$

$$= -\frac{a}{2} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \left( \frac{\underline{r}}{r} \right) \quad (5.78)$$

$$= -\frac{a}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{3}{r} - \frac{r^2}{r^3} \right) = -a \left( \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial x} \right) \quad (5.79)$$

ou  $\Phi_1 = -\frac{a}{2} \frac{\partial r}{\partial x}$  resolve (5.76). Observe que  $\Phi_1 + \Phi_2$  resolve (5.76) com  $\Delta \Phi_2 = 0$  por linearidade.

Em particular uma solução da forma  $\Phi_2 = \frac{b \partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial x}$  e uma solução da forma  $v_0 x$  dando a forma assintótica ao infinito (o truque de fazer o fluido movimentar com respeito a esfera ao resto). A condição de fronteira é  $\underline{u} = 0$  em  $|x| = R$ . Uma solução de (5.68) e (5.69) é

$$\underline{u} = \nabla \left( v_0 x + b \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial x} - \frac{a}{2} \frac{\partial r}{\partial x} \right) + \frac{a}{r} \underline{i} \quad (5.80)$$

com constantes  $a$  e  $b$  e temos de estabelecer que esta solução satisfaz  $\underline{u} = 0$  em  $|x| = R$ ,  $\underline{u} \rightarrow v_0 \underline{i}$  ao infinito com escolha de  $a$  e  $b$  e subseqüentemente calcular  $\underline{F}$  através de (5.70).

Em termos de componentes, temos  $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$$\begin{aligned} u_1 &= v_0 + b \frac{\partial^2(v_r)}{\partial x^2} - \frac{a}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{a}{r} = v_0 + b \left( \frac{3x^2}{r^3} - \frac{1}{r^3} \right) - \left( \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) + \frac{a}{r} \\ u_2 &= b \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x \partial y} - \frac{a}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} = b \frac{3xy}{r^5} + \frac{a xy}{2 r^3} \\ u_3 &= b \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x \partial z} - \frac{a}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z} = b \frac{3xz}{r^5} + \frac{a xz}{2 r^3} \end{aligned} \quad (5.81)$$

$$u_2 = u_3 = 0 \quad \text{em} \quad |x| = R \quad \text{se} \quad b = -\frac{aR^2}{6} \quad (5.82)$$

Em  $u_1$ , o termo envolvendo  $x^2$  é automaticamente zero e  $u_1 = 0$ . Se

$$a = -v_0 \frac{3R}{2}$$

e conseqüentemente

$$b = v_0 \frac{R^3}{4} \quad (5.83)$$

de (5.82). Utilizando (5.83) e (5.81) toma a forma

$$\begin{aligned} u_1 &= v_0 \left( 1 - \frac{3R}{4r} - \frac{1R^3}{4r^3} \right) - \frac{3v_0R}{4r^3} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) x^2 \\ u_2 &= -\frac{3v_0R}{4r^3} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) xy \end{aligned} \quad (5.84)$$

$$u_3 = -\frac{3v_0R}{4r^3} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) xz \quad (5.85)$$

e

$$p = p_0 + \nu \Delta \Phi = p_0 - a\nu \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} = p_0 - \frac{3v_0 \nu R}{2 r^3} x. \quad (5.86)$$

A forma na esfera é calculada de (5.70) utilizando a expressão do tensor de tensão  $T_{ij}$  em termos de  $\underline{u}$  ( $\rho = 1$ ,  $\nu = \mu$ ), fazendo referência a derivação das equações de Navier-Stokes.

$$\begin{aligned} T_{11} &= 2\nu \frac{\partial u_1}{\partial x} & T_{12} &= T_{21} = \nu \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \\ T_{22} &= 2\nu \frac{\partial u_2}{\partial y} & T_{23} &= T_{32} = \nu \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) \\ T_{33} &= 2\nu \frac{\partial u_3}{\partial z} & T_{31} &= T_{13} = \nu \left( \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (5.87)$$

Devido a simetria somente o termo na componente  $x$  sobrevive e

$$F_1 = - \int_S p \underline{i} dS + \int_S T_{1i} n_i dS. \quad (5.88)$$

Agora observe que

$$\text{div}(T_{1i} - p \underline{i}) = \text{div}(T_{1i}) - \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

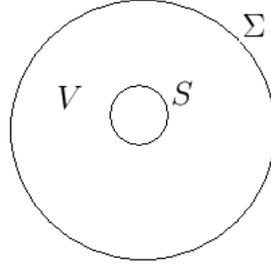


Figura 5.1: Região  $V$

da derivação das equações de Navier-Stokes levando a (5.68). Portanto podemos aplicar o Teorema de Divergência a região  $V$ :

obtendo que

$$F_1 = \int_{\Sigma} \rho \underline{i} dS + \int_{\Sigma} T_{1i} n_i dS, \quad (5.89)$$

$\Sigma$  a esfera contendo  $S$  com raio grande. Segue-se que em  $\sigma$

$$\begin{aligned} u_1 &\sim v_0 \frac{a}{2r} + \frac{a x^2}{2 r^3} \\ u_2 &\sim \frac{a xy}{2 r^3} \\ u_3 &\sim \frac{a xz}{2 r^3} \end{aligned} \quad (5.90)$$

com  $a = -\frac{3}{2}v_0 R$ . Também observamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &\sim \frac{a x}{2 r^3} \left(1 - \frac{3x^2}{r^2}\right) \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} &\sim -\frac{3axy^2}{r^5} \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} &\sim -\frac{3axz^2}{r^5} \end{aligned} \quad (5.91)$$

Utilizando (5.91) e (5.89), obtemos que

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_{\Sigma} \left( a\nu \frac{x}{r^3} \left(1 - \frac{3x^2}{r^2}\right) \underline{i} - \frac{3a\nu yx^2}{r^5} \underline{j} - \frac{3a\nu zx^2}{r^5} \underline{k} - \underline{i} \left( p_0 + \frac{2\nu x}{r^3} \right) \right) \cdot d\underline{S} \\ &= - \int_{\Sigma} 3a\nu \left( \frac{x^3}{r^5} \underline{i} + \frac{yx^2}{r^5} \underline{j} + \frac{zx^2}{r^5} \underline{k} \right) \cdot d\underline{S} - \int_{\Sigma} p_0 \underline{i} \cdot d\underline{S} \\ &= - \int_{\Sigma} 3a\nu \frac{x^2}{r^5} \underline{r} \cdot d\underline{S} - \int_{\Sigma} p_0 \underline{i} \cdot d\underline{S} \\ &= - \int_{\Sigma} 3a\nu \frac{x^2}{r^5} \underline{r} \cdot d\underline{S} - 0 \end{aligned} \quad (5.92)$$

(último termo é zero,  $\int_{\Sigma} p_0 \underline{i} \cdot d\underline{S} = \int_V \text{div}(p_0 \underline{i}) dx = 0$ ). Mas  $d\underline{S} = \underline{r} r \sin \theta d\phi$ ,  $\frac{x^2}{r^2} = \cos^2 \theta$  e

$$\begin{aligned} F_1 &= -3a\nu \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi = -4\pi a\nu, \quad a = -\frac{3}{2}v_0 R, \\ &= 6\pi\nu v_0 R, \end{aligned} \quad (5.93)$$

utilizando (5.92). No caso  $\rho \neq 1$ ,  $\nu \rightarrow \mu = \nu\rho$

$$F_1 = 6\pi\nu\rho v_0 R. \quad (5.94)$$

A expressão (5.94) foi utilizada por Millikan em uma famosa experiência para medir carga elétrica.

## 5.12 Relatividade e Gravitação

### 5.12.1 A teoria de Relatividade Especial

Recordamos que na seção 5.1 introduzimos a noção de métricas pseudo-Riemannianas (espaços pseudo-Euclidianos) com produto escalar em coordenadas pseudo-Euclidianas  $x^0, x^1, \dots, x^n$

$$\langle \xi, \eta \rangle = \xi^0 \eta^0 - \xi^1 \eta^1 - \dots - \xi^n \eta^n.$$

No caso que  $n = 3$  obtemos o espaço de Minkowski  $R^{1,3}$ . Neste caso,  $x^0 = ct$ , com  $c$  a velocidade da luz no vácuo e  $t$  o tempo em quanto  $x^1, x^2, x^3$  são coordenadas no espaço físico de três dimensões. Os pontos de  $R^{1,3}$  são eventos instantâneos e  $\langle x - y, x - y \rangle^{\frac{1}{2}}$  é o intervalo espaço temporal entre eventos  $x$  e  $y$ . No caso que  $\langle \xi, \xi \rangle = 0$ ,  $\xi$  é chamado um vetor tipo luz e no caso  $\langle \xi, \xi \rangle > 0$ ,  $\xi$  é chamado um vetor temporal e no caso  $\langle \xi, \xi \rangle < 0$  um vetor espacial.

Efetivamente, esta estrutura geométrica já estava presente na teoria eletromagnética formulado através das equações de Maxwell mas é devido a Einstein a noção que somente espaço-tempo como uma variedade de quatro dimensões tem um significado físico inerente a análise adicionais possibilidades de casualidade de eventos espaço-temporais. Em particular, criticou a ideia de superfícies tri-dimensionais espaciais compondo eventos simultâneos absolutos.

Matematicamente relatividade especial permite o observador utilizar um sistema de coordenadas para toda a variedade espacial-temporal em qual o movimento de uma partícula clássica livre é descrita por funções lineares da coordenada do tempo (um sistema inercial). Dado dois sistemas inerciais  $O$  e  $O'$  com coordenadas  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ ,  $(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ , representando o mesmo ponto  $P$ , as coordenadas são relacionadas por

$$x^{i'} = \sum_{j=0}^3 A_j^i x^j + u^i, \quad T_{0,O'} = (x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow (x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}).$$

Isto é dizer que espaço-tempo é um espaço afim. Além disso, para três sistemas inerciais (três observadores)

$$T_{0,0''} = T_{0',0} \circ T_{0,O'}$$

e

$$T_{0',0} = T_{0',0} \circ T_{0,O'}^{-1}$$

Até este ponto a construção é geral.

Em mecânica Newtoniana é suposto que se  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ ,  $(y^0, y^1, y^2, y^3)$  são dois eventos em  $O$  e  $(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ ,  $(y^{0'}, y^{1'}, y^{2'}, y^{3'})$  os mesmos eventos em  $O'$ , então a simultaneidade é absoluta em  $x^{0'} = y^{0'}$  se e somente se  $x^0 = y^0$ . Isto implica que  $x'_0 = x_0 + u_0$  (supondo a unidade de mensuração de tempo e sentido de propagação iguais em  $O$  e  $O'$ ). Além disso, a distância espacial ao mesmo tempo é invariante,

$$\sum_{i=1}^3 (x^i - y^i)^2 = \sum_{i=1}^3 (x^{i'} - y^{i'})^2.$$

Isto implica que

$$\underline{x}' = W\underline{x} + x_0\underline{v} + \underline{u} \quad (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3, \quad u^0 \in \mathbb{R}^1.$$

Aqui  $W$  é uma matriz ortogonal em  $\mathbb{R}^3$  e  $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ . As transformações  $(x^0, \underline{x}) \rightarrow (x'_0, \underline{x}')$  formam um grupo, o grupo não homogêneo, orto cronológico de Galileu.

É certamente o caso que as equações de Maxwell não são invariantes sob transformações de Galileu e a interpretação de Maxwell eram que ondas eletromagnéticas propagavam em um meio (aether, éter) e, portanto, as equações de Maxwell eram válidas somente em um classe residual de sistemas inerciais Galileanos. Infelizmente para a mecânica Newtoniana a experiência de Michelson-Morley em 1887 mostrou que a velocidade de luz é igual (dentro de 5Km/seg) por luz propagando na direção do movimento orbital da terra e transversal ao movimento orbital (veja A. A. Michelson and E. W. Morley *On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether*. Amer. J. Sci. 34, 333-345, 1887) Escolhendo  $c = 1$ , isto implica que

$$(y^0 - x^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (y_i - x_i)^2 = (y^{0'} - x^{0'})^2 - \sum_{i=1}^3 (y^{i'} - x^{i'})^2$$

(esferas aplicadas as esferas com mesmo raio). Escrevendo  $A = (A_i^j)_{i,j=0}^3$ ,  $F = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ ,

isto implica que  $A^t F A = F$ . Os  $A$  formam o grupo de Lorentz e as transformações  $x' = Ax + u$  o grupo não-homogêneo completo de Lorentz. Fixando  $x'_2 = x_2$ ,  $x'_3 = x_3$ , observamos

$$x^{0'} = (1 - \nu^2)^{-\frac{1}{2}} x^0 + \nu(1 - \nu^2)^{-\frac{1}{2}} x^1$$

$$x^{1'} = \nu(1 - \nu^2)^{-\frac{1}{2}} x^0 + (1 - \nu^2)^{-\frac{1}{2}} x^1, \quad 0 < \nu < 1,$$

é uma transformação homogênea de Lorentz. Em unidades CGS,  $x^0 = ct$ , e temos que

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}} t + \frac{\frac{\nu}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}} x^1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3$$

$$t'_1 = \frac{\nu}{\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}} t + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}} x^1$$

e com  $\nu \rightarrow 0$

$$t' = t, \quad x^{1'} = x^1 + z\nu, \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3$$

um transformação de Galileu.

Infinitesimalmente escrevemos  $d\tau^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$  e temos que  $(d\tau')^2 = d\tau^2$ .

Em geral, com  $\gamma = (1 - \nu^2)^{-\frac{1}{2}}$  podemos definir

$$\Lambda_j^i(\nu) = \delta_{ij} + \frac{\nu_i \nu_j (x - 1)}{\nu^2}, \quad \nu^2 = \sum_{i=1}^3 \nu_i^2, \quad 0 < \nu^2 < 1,$$

então  $\Lambda^t F \Lambda = F$ . Os conceitos básicos de dinâmica de partículas na teoria de Relatividade Especial pode ser estabelecidos segundo a discussão [18].

Defina a força relativística na partícula por

$$f^\alpha = m \frac{d^2 a^\alpha}{d\tau^2}.$$

Em um estado de resto,  $d\tau = dt$  e  $f^\alpha = F^\alpha$  (a força não relativística) e  $F^0 = 0$ . Sob a transformação  $\Lambda(\nu)$ ,  $dx'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta dx^\beta$  e  $d\tau$  é invariante e

$$f'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta f^\beta.$$

Suponha que a partícula tem velocidade  $\underline{v}$  em  $t_0$ , e introduz o novo sistema de coordenadas

$$x^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta(\nu) x'^\beta.$$

A partícula está no estado de resto neste novo sistema e a força 4-vetor é igual a força relativística  $F^\alpha$ . Segue-se que

$$f^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta(\nu) F^\beta$$

ou

$$\underline{f} = \underline{F} + (\gamma - 1) \underline{\nu} \frac{\underline{\nu} \cdot \underline{F}}{\nu^2}$$

$$f^0 = \gamma \underline{\nu} \cdot \underline{F} = \underline{\nu} \cdot \underline{f}.$$

Dado  $f^\alpha$  podemos calcular  $x^\alpha(\tau)$  e  $x(t)$ . Mas

$$1 = \left( \frac{dx^\alpha}{d\tau}, F \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right)$$

e

$$\left( f^\alpha, F \frac{dx^\beta}{d\tau} \right) = \left( f'^\alpha, F \frac{dx'^\beta}{d\tau} \right) = 0$$

em um sistema de referência no qual a partícula está no estado de resto ( $F^0 = 0$ ) utilizando invariância sob transformações de Lorentz. A força da Lei de Newton sugere a definição do momento  $p^\alpha$  por

$$p^\alpha = m \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad \text{e} \quad \frac{dp^\alpha}{d\tau} = f^\alpha.$$

Lembrando que  $d\tau = (1 - \nu^2)^{\frac{1}{2}} dt$ ,  $\nu = \frac{dx}{dt}$ .

$$\underline{p} = (p^\alpha) = m\gamma \underline{\nu} \sim m\nu + o(\nu^3)$$

e

$$p^0 = m \frac{dt}{d\tau} = \frac{m}{\sqrt{1 - \nu^2}} \sim m + \frac{1}{2} m\nu^2 + o(\nu^4).$$

Interpretamos  $p^0$  como a energia e  $m$  a massa de resto.

Considere uma curva  $C$  em uma variedade Lorentziana com tangente  $T^i$  e parâmetro de curva  $\theta$ . Então definimos o tempo próprio  $\tau$  no caso que a curva é do tipo temporal via

$$\tau = \int g(T, T)^{\frac{1}{2}} d\theta, \quad g(T, T) = g_{ij} T^i T^j.$$

A dinâmica de partículas na teoria de Relatividade Especial pode ser dado uma fórmula variacional via o estudo de funcionais (ações) definidas sobre curva tipo-temporal, isto é,

$$S_1 = \frac{mc}{2} \int g(\dot{x}, \dot{x}) d\theta, \quad C = (x^0, x^1, x^2, x^3),$$

ou

$$S_2 = -mc \int \sqrt{g(\dot{x}, \dot{x})} d\theta.$$

No caso que  $C$  é parametrizado por  $\theta = t = \frac{x^0}{c}$

$$S_2 = -mc^2 \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt.$$

Associado com o Lagrangeano

$$L_1 = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

há um Hamiltoniano

$$E = H = p\nu - L_1 = \dot{x}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} - L_1 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$P_\alpha = \frac{m\nu^\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\partial L_1}{\partial \nu^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3$$

e via as equações de Euler-Lagrange obtemos os resultados obtidos anteriormente. É evidente que

$$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4$$

ou

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}$$

### O tensor de energia e momento

Considere um sistema de partículas indexado por  $n$  com vetor de energia-momento  $P_n^\alpha(t)$  e defina a densidade de  $P^\alpha$  por

$$T^\alpha = \sum_n P_n^\alpha(t) \delta^3(\underline{x} - \underline{x}_n(t))$$

e corrente

$$T^{\alpha i} = \sum_n P_n^\alpha(t) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \delta^3(\underline{x} - \underline{x}_n(t))$$

(usamos  $\alpha$  para indexar 4-vetores e  $i$  para indexar 3-vetores). Fazendo  $x_n(t) \equiv t$ , podemos definir

$$T^{\alpha\beta} = \sum_n P_n^\alpha \frac{dx_n^\beta(t)}{dt} \delta^3(\underline{x} - \underline{x}_n(t)).$$

Lembrando que  $P_n^\beta = E_n \frac{dx_n^\beta}{dt}$ ,

$$T^{\alpha\beta} = \sum_n \frac{P_n^\alpha P_n^\beta}{E_n} \delta^3(\underline{x} - \underline{x}_n(t)).$$

Observamos que  $T^{\alpha\beta}$  é simétrico e

$$T^{\alpha\beta} = \sum_n \int d\tau P_n^\alpha \frac{dx_n^\beta}{d\tau} \delta^4(\underline{x} - \underline{x}_n(\tau)) \quad (\text{aqui } \underline{x} \text{ é 4-vetor}).$$

e portanto  $T^{\alpha\beta}$  é um tensor.

Observe que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i} T^{\alpha i}(\underline{x}, t) &= - \sum_n P_n^\alpha(t) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3(\underline{x} - \underline{x}_n(t)) \\ &= - \sum_n P_n^\alpha(t) \frac{\partial}{\partial t} \delta^3(\underline{x} - \underline{x}_n(t)) \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} T^{\alpha 0}(\underline{x}, t) + \sum_n \frac{dP_n^\alpha(t)}{dt} \delta^3(\underline{x} - \underline{x}_n(t))\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} = G^\alpha &= \sum_n \delta^3(\underline{x} - \underline{x}_n(t)) \frac{dP_n^\alpha(t)}{dt} \quad (4\text{-vetor}) \\ &= \sum_n \delta^3(\underline{x} - \underline{x}_n(t)) \frac{d\tau}{dt} f_n^\alpha(t)\end{aligned}$$

No caso que as partículas são livres,  $P_n^\alpha = \text{constante}$  e  $T^{\alpha\beta}$  é conservado, isto é,  $\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}(x) = 0$ . O mesmo é válido no caso que as partículas interagem via colisões estritamente localizadas no espaço. Neste caso

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}(x) = \sum_c \delta^3(\underline{x} - \underline{x}_c(t)) \frac{d}{dt} \sum_{n \in c} P_n^\alpha(t)$$

$\underline{x}_c(t)$  é a localização da  $c$ -ésima colisão no tempo  $t$  e  $n \in c$  significa que o somatório é tomado somente sobre partículas participando nas colisões. Mas cada colisão conserva-se e assim  $\sum_{n \in c} P_n^\alpha(t)$  é independente do tempo.

$T^{\alpha\beta}$  não será conservada com partículas sujeitas a forças à distância. Um exemplo envolvendo um gas com partículas carregadas com cargas  $e_n$  é discutido no livro de Weinberg [18] (seção 2.8) que envolve a redefinição do tensor de energia-momento na forma que é novamente simétrico e conservado. Precisamos de extensões deste conceito quando discutimos a teoria da relatividade geral e a formulação da teoria de Einstein.

### 5.12.2 Propriedades do Tensor de Curvatura

O seguinte lema será de utilidade em demonstrar a identidade de Bianchi.

**Lema 3.** *Se a conexão na variedade  $M^r$  é simétrica, então em uma vizinhança de qualquer ponto  $P_0 \in M^r$  existem um sistema de coordenadas locais  $(z^1, \dots, z^r)$  para qualquer  $\Gamma_{jk}^i(P_0) = 0$ .*

*Demonstração.* A regra de transformação de  $\Gamma_{kj}^i \rightarrow \bar{\Gamma}_{sq}^p$  sob a transformação de coordenadas  $(x) \rightarrow (z)$  é dada por

$$\Gamma_{kj}^i \rightarrow \bar{\Gamma}_{sq}^p = \Gamma_{kj}^i \frac{\partial z^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial z^q} \frac{\partial x^k}{\partial z^s} + \frac{\partial z^p}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^s \partial z^q}.$$

Podemos supor que as coordenadas do ponto  $P_0$  são zero em ambos sistemas de coordenadas. Defina  $z^i$  por  $x^i = z^i - \Gamma_{jk}^i z^j z^k$ . Pelo Teorema da Função Implícita esta aplicação é inversível em uma vizinhança do zero, dado que

$$J = \frac{\partial(z)}{\partial(x)} \neq 0,$$

segue-se que

$$\Gamma_{kj}^i \frac{\partial z^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial z^q} \frac{\partial x^k}{\partial z^s} + \frac{\partial z^p}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^s \partial z^q} = 0$$

sob esta mudança de coordenadas e o resultado segue.  $\square$

Agora é fácil demonstrar o seguinte resultado

**Teorema 20.** (*Identidade de Bianchi*)

Para uma conexão simétrica temos que

$$R_{mkj,l}^i + R_{mlk,j}^i + R_{mj,l,k}^i = 0$$

*Demonstração.* Na vizinhança de um ponto arbitrário  $P_0 \in M$  introduzimos coordenadas de tal forma que todos os símbolos de Christoffel são zero neste ponto. Agora,

$$R_{lkj}^i = \frac{\partial \Gamma_{ij}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{lk}^i}{\partial x^j}$$

e derivação covariante na vizinhança de  $P_0$  coincide com derivação normal. Assim, a relação do enunciado do teorema segue-se observando que

$$\left( \frac{\partial^2 \Gamma_{mj}^i}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 \Gamma_{mk}^i}{\partial x^j \partial x^l} \right) + \left( \frac{\partial^2 \Gamma_{mk}^i}{\partial x^l \partial x^j} - \frac{\partial^2 \Gamma_{ml}^i}{\partial x^k \partial x^j} \right) + \left( \frac{\partial^2 \Gamma_{ml}^i}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma_{mj}^i}{\partial x^l \partial x^k} \right) = 0$$

Existe uma generalização deste resultado para conexões não simétricas.  $\square$

Definimos  $R_{mlkj} = g_{mi} R_{lkj}^i$ . Lembrando as definições dadas na seção 5.7 temos que

$$T(\xi, \eta) = D_\xi \eta - D_\eta \xi - [\xi, \eta]$$

e

$$R(\xi, \eta)\zeta = D_\eta D_\xi \zeta - D_\xi D_\eta \zeta + D_{[\xi, \eta]}\zeta.$$

Aqui supomos suficiente regularidade na variedade e conexão para garantir que  $[\xi, \eta]$  e  $D_{[\xi, \eta]}$  são bem definidas. Para uma discussão mais completa referimos o leitor ao livro Novikov e Taimanov [9] (página 371)

As seguintes propriedades são válidas para os tensores de curvatura:

**P(1)**  $R_{ljk}^i = -R_{lkj}^i$

**P(2)**  $R_{ljk}^i + R_{jkl}^i + R_{kjl}^i = 0$  se a conexão é simétrica e se a conexão é associada com uma métrica  $g_{ij}$

**P(3)**  $R_{iljk} = -R_{lijk}$  e se adicionalmente é simétrica

**P(4)**  $R_{iljk} = R_{jkil}$

P(1) segue imediatamente da definição. P(2) segue da relação

$$[D_j, D_k]e_l + [D_k, D_l]e_j + [D_l, D_j]e_k = 0$$

para vetores da base  $e_l, e_j, e_k$ . Da simetria de conexão

$$D_i e_j = D_j e_i \quad \forall e_i, e_j, e_k.$$

e a relação é equivalente a

$$(D_j D_k e_l - D_k D_l e_j) + (D_k D_l e_j - D_l D_j e_k) + (D_l D_j e_k - D_j D_k e_l)$$

que é trivialmente satisfeita. Para estabelecer P(3) é suficiente demonstrar que

$$g(R(e_j, e_k)z, z) = g([D_k, D_j]z, z) = -g([D_j, D_k]z, z).$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_j \partial_k g(z, z) &= g(D_j D_k z, z) + g(D_k z, D_j z) \\ \frac{1}{2} \partial_k \partial_j g(z, z) &= g(D_k D_j z, z) + g(D_j z, D_k z). \end{aligned}$$

Segue-se que

$$g([D_j, D_k]z, z) = 0.$$

Em termos de  $R_{ijkl}$ , P(1) toma a forma

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk}$$

e P(2) é reescrita como

$$R_{iljk} + R_{ijkl} + R_{iklj} - Ri[jkl] = 0$$

Aqui  $[jkl]$  significa que somando sobre todas as permutações cíclicas dos índices. Finalmente usando P(1), P(2) e P(3) obtemos

$$R_{i[jlk]} + R_{l[ijk]} - R_{j[ikl]} - R_{k[ilj]} = 2(R_{lijk} - R_{jkli}) = 0,$$

dando P(4).

Introduzimos o tensor de Ricci via

$$R_{kl} = R_{kil}^i$$

dado no caso de conexão simétrica associada com uma métrica  $g$

$$R_{kl} = \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^l}{\partial x^l} + \Gamma_{kl}^i \Gamma_{im}^m - \Gamma_{km}^i \Gamma_{il}^m.$$

As propriedades P(1) a P(4) implicam que

$$R_{ik} = R_{ki},$$

associada com o tensor de Ricci é a curvatura escalar  $R$ .

Da identidade de Bianchi e a propriedade P(1) segue-se que

$$R_{ijk,l}^n - R_{ilk,j}^n + g^{km} R_{mil,j,h} = 0$$

e multiplicando por  $g^{il}$  obtemos que

$$R_{j,l}^l - R_{,j} + R_{j,l}^l = 0$$

ou

$$R_{j,l}^l = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x^j}$$

o que é equivalente a relação

$$(R_{jl} - \frac{1}{2} g_{il} R)_{,l} = 0 \quad (\text{Equação de Einstein})$$

O tensor

$$G_{jl} = R_{jl} - \frac{1}{2} g_{il} R$$

é chamado o tensor de Einstein e é fundamental na formulação da teoria clássica de relatividade geral.

### 5.12.3 Teoria Elementar de Relatividade Geral

A teoria clássica de relatividade geral (TRG) como foi desenvolvida nas mãos de Einstein em 1915 é baseada em dois princípios básicos: o princípio de covariância geral que afirma que a métrica  $g_{ab}$  e derivadas de  $g_{ab}$  são as quantidades que apareceu nas equações de física e a exigência que estas equações deveriam reduzir as equações de relatividade especial no caso de  $g_{ab}$  seja planos. Estes princípios leva a formulação: espaço-tempo é uma variedade  $M$  com métrica de Lorentz  $g_{ab}$  e a distribuição de matéria em espaço tempo  $T_{ab}$  é relacionada a curvatura de  $g_{ab}$  via a equação de Einstein

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab}.$$

Como sempre em teorias físicas-matemáticas complexas justificamos esta equação via uma combinação de argumentos matemáticos e raciocínio físico heurístico seguimos a discussão dada no livro de Weinberg [18] subsequentemente veremos que novamente uma formulação da TRG via uma função de ação (de Hilbert) e princípios variacionais fornece a maneira mais sucinta de estabelecer a equação de Einstein. A equação de Einstein consiste de um sistema quase-linear de segunda ordem de caráter hiperbólico para os componentes da métrica  $g_{ab}$ .

Partículas livres (pontuais) movimentam sobre geodésicas da métrica  $g_{ik}dx^i dx^k = ds^2$ . É esperado que para campos gravitacionais, "fracos", o movimento de uma partícula lenta é descrito pelas equações de Newton. Assim, suponha que  $|\nu| \ll c$ ,  $\nu = \frac{dx^i}{dt}$ ,  $i = 1, 2, 3$  e, do fato que  $\frac{|\nu|}{c} = O\left(\frac{1}{c}\right)$  junto com a hipótese que

$$g_{ik} = g_{ik}^0 + h_{ik}, \quad h_{ik} = O\left(\frac{1}{c^2}\right),$$

com  $g_{ik}^0$  a métrica de Minkowski. Então,

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)} dt = \left(1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right) dt$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = O(c^{-2}), \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^0} = O(c^{-3}), \quad x_0 = ct.$$

Derivadas da segunda ordem em  $x^0$  da métrica são  $O(c^{-4})$ . As equações geodésicas são

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = 0$$

com

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{il} \left( \frac{\partial g^{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^l} \right).$$

Segue-se que

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \sim 0$$

e

$$\Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = \Gamma_{00}^i c^2 + O\left(\frac{1}{c}\right).$$

Também,

$$\Gamma_{00}^\alpha = -\frac{1}{2}g^{i\beta} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\beta} + O\left(\frac{1}{c^2}\right) \sim \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\alpha}$$

(utilizando a forma da métrica de Minkowski) e concluímos que

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \sim -\Gamma_{00}^i \sim -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}.$$

Por outro lado a equação de Newton para o movimento de uma partícula em um campo gravitacional  $\phi$  é

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$$

com  $\Delta \phi = 4\pi G\rho$ , onde  $G$  é a constante de Newton ( $G = 6,6670 \times 10^{-8}$  em unidades cgs). Agora recordamos que para matéria não relativística a densidade de energia é igual a sua densidade de massa (massa de resto) ou  $\rho = T_{00}$ . As equações acima sugerem que

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi(x)}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

com

$$\Delta g_{00} = -8\pi G\rho = -8\pi G T_{00}.$$

Assim, podemos especular que em geral deveríamos ter a relação  $G_{\alpha\beta} = -8\pi T_{\alpha\beta}$ , com

(A)  $G_{\alpha\beta}$  uma combinação linear da métrica e suas derivadas até ordem 2. Propriedades desejáveis de  $T_{\alpha\beta}$  são sua simetria e conservação que também deveria ser válida para  $G_{\alpha\beta}$  ou

(B)  $G_{\nu,\mu}^\mu = 0$  e

(C)  $G_{00} \approx \Delta g_{00}$ .

(A) significa que  $G_{\mu\nu}$  é obtido por contração do tensor de curvatura  $R_{\mu\nu}^\lambda$  e as propriedades de antisimetria implica que somente resta o tensor de Ricci  $R_{\mu k} = R_{\mu\lambda k}^\lambda$  e a curvatura escalar  $R = R_{\mu}^\mu$ . Portanto, tomando  $G_{\mu\nu}$  na forma

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R$$

com  $C_1$  e  $C_2$  constantes,  $G_{\mu\nu}$  é simétrico. A identidade de Bianchi implica que

$$G_{\nu,\mu}^\mu = \left(\frac{C_1}{2} + C_2\right) R_{,\nu}$$

e se  $G_{\nu,\mu}^\mu \equiv 0$ , então  $C_2 = -\frac{C_1}{2}$  ou  $R_{,\nu} \equiv 0$ . Mas se  $R_{,\nu} \equiv 0$ ,

$$G_{\mu}^\mu = (C_1 + 4C_2)R = -8\pi G T_{\mu}^\mu$$

e  $R_{,\nu} \equiv 0$  implica que  $\frac{\partial R}{\partial x^\nu} \equiv 0$  ou  $\frac{\partial T_{\mu}^\mu}{\partial x^\nu} \equiv 0$  que não é verdade no caso de matéria não relativista não homogênea. Segue-se que

$$G_{\mu\nu} = C_1 \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right).$$

Em um sistema não relativístico,

$$|T_{ij}| \ll T_{00}, \quad |G_{ij}| \ll G_{00} \quad \text{e} \quad R_{ij} \approx \frac{1}{2} g_{ij} R.$$

No caso de um campo fraco  $g_{ij}$  é a métrica de Minkowski e

$$R \approx R_{kk} - R_{00} \approx \frac{3}{2}R - R_{00} \quad \text{ou} \quad R \approx R_{00}.$$

Concluimos que  $G_{00} \approx 2C_1 R_{00}$ . No caso que o campo é estático,

$$R_{0000} \sim 0, \quad R_{i0j0} \sim \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^j}, \quad R_{i0i0} = \frac{1}{2} \Delta g_{00}$$

$$G_{00} \sim 2C_1(R_{i0i0} - R_{0000}) \sim C_1 \Delta g_{00} \sim \Delta g_{00} \quad \text{ou} \quad C_1 = 1.$$

As equações de Einstein tem a forma

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu}.$$

Observando que

$$R - 2R = -8\pi G T_{\mu}^{\nu}$$

via contração de  $g^{\mu\nu}$ ,

$$R = 8\pi G T_{\mu}^{\nu}$$

e

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_{\lambda}^{\lambda}),$$

uma outra forma equivalente das equações de Einstein. Observe que o tensor simétrico  $G_{\mu\nu}$  tem dez componentes independentes e as equações de Einstein consistem de dez equações algebricamente independentes. Mas observamos que as identidades de Bianchi  $G_{\nu i \mu}^{\mu} = 0$  significa que existem somente seis equações funcionalmente independentes para determinar dez componentes  $g_{\mu\nu}$  desconhecidos. Esta situação é análoga ao caso das equações de Maxwell indeterminadas módulo uma condição de Calibre (para mais informação veja [18] seção 7.5 ou [17]).

### A métrica isotrópica estática

Supomos que é possível determinar a métrica  $g_{\mu\nu}$  independente de  $t$  e envolvendo  $x = (x^1, x^2, x^3)$ ,  $dx$ , somente na forma  $dx^2$ ,  $x \cdot dx$  e  $x^2$ . Assim, obtemos

$$d\tau^2 = F(r)dt^2 - 2E(r)dt x \cdot dx - D(r)(x \cdot dx)^2 - C(r)dx^2, \quad r^2 = x \cdot x.$$

Em termos de coordenadas esféricas  $x = (r, \theta, \phi)$ ,

$$d\tau^2 = F(r)dt^2 - 2rE(r)dt dr - r^2 D(r)dr^2 - C(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Via a transformação

$$t \rightarrow t + \Phi(r) \quad \text{e} \quad \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{E(r)}{F(r)}$$

$$d\tau^2 = F(r)dt^2 - G(r)dr^2 - C(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Aqui

$$C(r)r^2 \rightarrow r^2,$$

$$d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

a forma de métrica padrão, com

$$A(r) = F(r)$$

e

$$B(r) = 1 + \frac{G(r)}{C(r)} \left( 1 + \frac{r}{2C(r)} \frac{dC(r)}{dr} \right)^{-2}.$$

Finalmente, com uma mudança apropriada de  $r$ ,

$$d\tau^2 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Ponha  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$ ,  $x^3 = \phi$  e calcule os símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda'}{2}, & \Gamma_{10}^0 &= \frac{\nu'}{2}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta \cos\theta, \\ \Gamma_{11}^0 &= \frac{\lambda'}{2} e^{\lambda-\nu}, & \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda}, & \Gamma_{00}^1 &= \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= \cos\theta, & \Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{\nu}}{2}, \\ \Gamma_{10}^1 &= \frac{\dot{\lambda}}{2}, & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2\theta e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Aqui ' significa derivada com respeito a  $x_0$  e  $\dot{\phantom{x}}$  com respeito a  $r$ . As equações de Einstein  $T_{\alpha\beta} = 0$  reduz a

$$\begin{aligned} \lambda &= 0 \\ e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} &= 0 \\ e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} &= 0. \end{aligned}$$

Segue-se que  $\lambda + r = f(t)$ . Usando a transformação

$$t \rightarrow \int e^{\frac{f}{2}} = \tilde{t}$$

$$e^\nu c dt^2 \rightarrow e^\nu (\dot{\psi})^{-2} d\tilde{t}^2 = e^{\nu-f} d\tilde{t}^2.$$

Assim, podemos supor que  $\lambda + \nu = 0$ . As equações anteriores reduzem a

$$\dot{\lambda} = 0 \quad \text{e} \quad \lambda' = \frac{1 - e^{-\lambda}}{r}$$

que integram a

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{r_g}{r}$$

e

$$d\tau^2 = \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Seja  $d\tau_0^2$  o tempo próprio na métrica de Minkowski. Então,

$$d\tau^2 = d\tau_0^2 - \frac{2GM}{c^2 r} d(ct)^2 - \frac{2GM}{c^2 r - 2GM} dr^2$$

escrevendo  $r_0 = \frac{2GM}{c^2}$ . Interpretando  $d\tau^2$  como uma perturbação fraca de  $d\tau_0^2$  e no caso que  $M > 0$  podemos considerar  $d\tau^2$  como um campo gravitacional produzido por uma distribuição esférica simétrica de massas. A métrica

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)$$

é chamado a métrica de Schwarzschild (K. Schwarzschild, Sitzungsberichte Preuss, Akad. Wiss, 424, 1916). Para a Terra  $r_g = 0,44\text{cm}$  e para o Sol,  $r_g = 3\text{Km}$ . No caso que a densidade do corpo é tal grande que seu tamanho é menor que o raio de Schwarzschild, o campo gravitacional aparentemente tem uma singularidade no ponto  $r_g$ . Mas calculando as quatros invariantes de curvatura mostra que eles são bem definidos em  $r = r_g$ . Em 1960, M.D. Kruskal (Phys Rev, 119, 1943) exibiu um novo sistema de coordenadas modificando a topologia que tem métrica não-singular neste ponto:

$$r'^2 - t'^2 = T^2 \left(\frac{r}{2GM} - 1\right) e^{\frac{r}{2GM}}$$

$$\frac{2r't'}{r'^2 + t'^2} = \tanh\left(\frac{t}{2MG}\right), \quad T \text{ constante,}$$

com métrica

$$Dt^2 = \left(\frac{32G^3M^3}{rT^2}\right) \exp\left(\frac{-r}{2GM}\right) (dt'^2 - dr'^2) - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2\theta d\phi^2.$$

A métrica é não-singular dado que  $r^2 > 0$ , isto é,  $r'^2 > t'^2 - T^2$ .

Considerando um planeta como uma partícula livre que não perturba a métrica seu movimento pode ser descrito como uma geodésica em uma variedade com a métrica de Schwarzschild. Ignorando os símbolos  $\Gamma'_{\alpha\beta}$ , os símbolos não nulos restantes são

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \quad \Gamma_{10}^0 = \frac{M}{c^2 r^2} \left(1 - \frac{2M}{c^2 r}\right)^{-1}$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\text{sen}^2\theta \cos\theta \quad \Gamma_{23}^3 = \cos\theta$$

As equações geodésicas são

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \text{sen}\theta \cos\theta \left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\psi}{ds} + 2 \cos\theta \frac{d\psi}{ds} \frac{d\theta}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \frac{2M}{c^2 r^2} \left(1 - \frac{2M}{c^2 r}\right)^{-1} \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0$$

$$- \left(1 - \frac{2M}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - r^2 \text{sen}^2\theta \left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 + c^2 \left(1 - \frac{2M}{c^2 r}\right) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 1$$

Supomos que o planeta move inicialmente no plano  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , ou  $\frac{d\theta}{ds} = 0$ ,  $\cos\theta = 0$  e  $\frac{d^2\theta}{ds^2} = 0$ .

Segue-se  $\frac{d^i\theta}{ds^i} = 0$ ,  $t = 0$ ,  $\forall i$  ou  $\theta = \frac{\pi}{2}$  sempre e as equação simplificam a

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\psi}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \frac{2M}{c^2r} \left(1 - \frac{2M}{c^2r}\right)^{-1} \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0$$

$$- \left(1 - \frac{2M}{c^2r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 + c^2 \left(1 - \frac{2M}{c^2r}\right) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 1$$

Integrando as duas primeiras dessas equações obtemos que

$$r^2 \frac{d\psi}{ds} = h \quad \text{e} \quad \left(1 - \frac{2M}{c^2r}\right) \frac{dt}{ds} = k,$$

com  $h$  e  $k$  constantes. Eliminando  $t$  e  $s$  das últimas duas equações anteriores obtemos que

$$-\frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{c^2r}\right) + \frac{c^2k^2}{h^2} = \frac{1}{h^2} \left(1 - \frac{2M}{c^2r}\right).$$

Agora use o truque tradicional substituindo  $r = \frac{1}{u}$  e deriva a equação resultante com respeito a  $\psi$  para obter

$$\frac{d^2u}{d\psi^2} + u = \frac{M}{c^2h^2} + \frac{3Mu^2}{c^2}.$$

Para planetas do sistema solar  $\frac{M}{c^2h^2} \gg 3M\frac{u^2}{c^2}$  e ignorando este último termo obtemos a equação de Newton para o movimento de um planeta. Assim, a primeira aproximação a solução de  $u$  é

$$u = \frac{m}{c^2k^2} (1 + e \cos(\psi - \xi)),$$

onde  $e$  é a excentricidade da órbita elíptica e  $\xi$  é a longitude do periélio. Uma segunda aproximação é

$$u = \frac{m}{c^2h^2} (1 + e \cos(\psi - \xi - \Delta\xi)), \quad \text{com} \quad \Delta\xi = \frac{3M^2\psi}{c^4h^2},$$

o que indica que o eixo maior da órbita elíptica rodeia em volta do foco (o Sol). O aumento de  $\Delta\xi$  corresponde a uma revolução completa  $\psi = 2\pi$  é  $\frac{6M^2\pi}{c^4h^2}$ . Para o planeta Mercúrio o avanço do periélio é calculado a ser 42,9 segundo de arco por século, correspondendo bem com os números astronômicos de 43,5 segundo de arco por séculos. Um argumento mais preciso é dado na seção 6.10 do artigo de Trautman [16]. Isto constitui uma das previsões clássicas confirmando a teoria (entre a mudança vermelha gravitacional das linhas espectrais e a deflexão de raios de luz pelo campo gravitacional do Sol).

## 5.13 As equações de Einstein e o funcional de Hilbert

Considere uma variedade  $M$  de dimensão 4 e métrica de Lorentz  $g_{ij}$ . Localmente, a métrica pode ser reduzida a métrica de Minkowski  $g_{ij}^0$  e portanto  $g = \det g_{ij} < 0$  e  $|g| = -g$ . O funcional de ação  $S_g$  introduzida por Hilbert tem a forma

$$S_g = \int_D R \sqrt{-g} d^4x \quad \left(\text{ou} \int_D R \sqrt{|g|} d^4x\right).$$

Aqui  $D$  é um domínio limitado por duas hipersuperfície espaciais. Estudamos a variação de  $S_g$  com variação de métrica.

**Proposição 12.** (Hilbert)

$$\frac{\delta \int_D R \sqrt{|g|} d^4x}{\delta g^{ij}} = \left( R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \right) \sqrt{g}$$

e

$$\delta S_g = \int_D \left( R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \right) \delta g^{ij} \sqrt{|g|} d^4x$$

*Demonstração.* Seja  $\Delta^{ik}$  o cofator do elemento  $g_{ik}$  na matriz  $(g_{lm})$ . Temos

$$g = \sum_i g_{ik} \Delta^{ik} \quad \text{e} \quad \delta g = \delta g_{ik} \Delta^{ik},$$

$$\Delta^{ik} = g g^{ik} \quad \text{e} \quad \delta g = g g^{ik} \delta g_{ik}.$$

De  $g^{ik} g_{ik} = \delta_i^i = 4$ ,

$$\delta g^{ik} g_{ik} + g^{ik} \delta g_{ik} = 0 \quad \text{e} \quad \delta g = g g_{ik} \delta g^{ik}$$

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = \frac{1}{2\sqrt{-g}} g g_{ik} \delta g^{ik} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ik} \delta g^{ik}.$$

Similarmente para  $|g| = g$ . Seguimos ao resultado

$$\delta(\sqrt{g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{|g|} g_{ik} \delta g^{ik}.$$

Evidentemente

$$\delta \int R \sqrt{|g|} d^4x = \int (R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik}) \delta g^{ik} \sqrt{|g|} d^4x + \int g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{|g|} d^4x.$$

Fixe um ponto arbitrário  $p \in M$  e seja  $\nu$  um vetor tangencial em  $P$  e suponha que  $x(t)$  é a geodésia começando em  $p = x(0)$  com velocidade inicial  $\dot{x}(0) = \nu$ . Se  $x(1)$  é definida coloque  $\exp_p(1) = x(1)$ . A aplicação  $\exp : T_p M \rightarrow M$  é chamada a aplicação exponencial. Em geral para  $B = \{|\nu| < \eta\}$ ,  $\eta$  suficientemente pequeno,  $\exp_p(\nu) : B \rightarrow n^4$  é um difeomorfismo. Podemos introduzir novas coordenadas em  $\exp_p(B) = U$  via  $P(x^p, \dots, y^3)$  se  $P = \exp_p(y)$ , as chamadas coordenadas geodesianas. No ponto  $P$ ,  $\Gamma_{jk}^i = 0$ ,  $i, j, k = 0, \dots, 3$ . Agora observe que

$$\begin{aligned} g^{ik} \delta R_{ik} &= \delta \left( \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{im}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l \right) g^{ik} \\ &= g^{ik} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} (\delta \Gamma_{ik}^l) - \frac{\partial}{\partial x^k} (\delta \Gamma_{il}^l) \right) \\ &= g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^l} (\delta \Gamma_{ik}^l) - g^{il} \frac{\partial}{\partial x^l} (\delta \Gamma_{ik}^k) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^l} (g^{ik} \delta \Gamma_{ik}^l) - g^{il} \delta \Gamma_{ik}^k \equiv \frac{\partial w^l}{\partial x^l} \end{aligned}$$

$\delta \Gamma_{jk}^i$  é um tensor, portanto  $w^l$  é um tensor e  $\frac{\partial w^l}{\partial x^l} = \text{div } w$  é invariante sob mudança de coordenadas. Segue-se que

$$g^{ik} \delta R_{ik} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{|g|} w^l)$$

e

$$\int g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{|g|} d^4x = \int \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{|g|} w^l) d^4x = \int_{\partial D} |g| w^l$$

pelo teorema de Stokes. Dado que por hipótese a variação da métrica é zero em  $\partial D$ , esta integral é zero e a variação  $\delta S_g$  é como anunciado.  $\square$

Em duas dimensões o tensor de Riemann é determinado pelo componente  $R_{1212} = -R_{2112}$  e via um cálculo  $R_{kl} = Rg_{kl}$ ,  $R = \frac{2R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$ . Observe que na ausência de campos materiais

$$R_{kl} - \frac{R}{2}g_{kl} = 0$$

e via contração

$$R_k^k - \frac{R}{2}\delta_k^k = R - 2R = -R = 0$$

ou

$$R_{kl} = 0 \quad \text{Ricci plano}$$

mas isto implica que  $M$  é plano. Em geral  $R_{jkl}^i \neq 0$ .

## Exercícios

1. Considere  $e_{i_1 \dots i_n}$ ,  $i_j = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n$ , tal que

$$e_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{se } (i_1, \dots, i_n) \text{ é uma permutação par de } (1, \dots, n) \\ -1, & \text{se } (i_1, \dots, i_n) \text{ é uma permutação ímpar de } (1, \dots, n) \\ 0, & \text{se dois índices coincidem.} \end{cases}$$

Similarmente defina  $e^{j_1 \dots j_n}$  e defina

$$\delta_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} = e^{j_1 \dots j_n} e_{i_1 \dots i_n}.$$

Mostre que

(a)

$$e_{i_1 \dots i_n} a_{j_1}^{i_1} \dots a_{j_n}^{i_n} = \det(a_n^m) e_{j_1 \dots j_n}$$

e

$$e^{i_1 \dots i_n} a_{i_1}^{j_1} \dots a_{i_n}^{j_n} = \det(a_n^m) e^{j_1 \dots j_n}$$

(b) Utilizando (a)  $e_{i_1 \dots i_n}$  e  $e^{j_1 \dots j_n}$  são tensores relativos de pesos  $-1$  e  $1$ , respectivamente

(c)

$$\delta_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1}^{j_1} & \dots & \delta_{i_n}^{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{i_1}^{j_n} & \dots & \delta_{i_n}^{j_n} \end{vmatrix} = \delta_{i_1}^{j_1} \dots \delta_{i_n}^{j_n}$$

(d)  $a_{(i_1 \dots i_p)} = \delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} a_{(j_1 \dots j_p)}$  por qualquer sistema de  $\binom{n}{p}$  números  $a_{(i_1 \dots i_p)}$ .

2. Recordamos que um módulo livre e um módulo que admite um base (ou o zero-módulo). Seja  $F_{U \times W}$  o espaço vetorial livre gerado por  $U \times W$  e seja  $V \times W$  considerado como um subconjunto de  $F_{U \times W}$  via a imersão natural. Considere o subespaço  $K$  de  $F_{U \times W}$  gerado por elementos

$$(\alpha x + \beta y, z) - \alpha(x, z) - \beta(y, z)$$

$$(x, \alpha z + \beta w, \tau) - \alpha(x, z) - \beta(x, w).$$

Então  $F_{U \times W}/K$  com a projeção  $p : V \times W \rightarrow F_{V \times W}/K$  é um produto tensorial de  $V$  e  $W$  canonicamente isomorfa com  $V \otimes W$ .

3. Seja  $E$  uma álgebra associativa sobre  $\mathbb{R}$  com as propriedades que  $E$  é uma álgebra graduada

$$E = E_0 \oplus E_1 \oplus \dots, \quad E_i \text{ é um subespaço de } E$$

e se  $\wedge$  é multiplicação em  $E$

$$e_i \wedge e_j \in E_{i+j}, \quad \forall e_i \in E_i, e_j \in E_j,$$

$E_0 = \mathbb{R}$  e  $E_1 = V$  é um espaço vetorial real,  $E_1$  e  $1 \in R$  gera  $E$ ,  $x \wedge x = 0$ ,  $\eta x_1 \wedge \dots \wedge x_n = 0$ ,  $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \neq 0 \Rightarrow \eta = 0$ . Então  $E$  é isomorfo a  $\Lambda(V)$ .

4. Sejam  $T(V)$  a álgebra tensorial sobre  $V$  e  $I_e$  o ideal gerado por  $x \otimes x$ ,  $x \in V$ . Então  $E$  é isomorfa a  $T(V)/I_e$

5. Suponha que  $V$  contém uma superfície suave  $\epsilon$  e que  $F^r$  é descontínua, mostre que em 3-dimensões

$$\iint_S F^r \nu_r d\sigma = \iiint_V F^r_{,r} d\tau - \iint_\Sigma (F^r \nu_r)_1 + (F^r \nu_r)_2 d\sigma$$

com os índices referindo aos lados de  $\Sigma$ .

6. Se  $g = |g_{ij}|$ , mostre que

$$\frac{\partial g}{\partial x^j} = g^{lm} g \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^j}$$

e se

$$\Gamma_{ij}^i = g^{lk} [ij, k], \quad [ij, k] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^k} \right)$$

(em coordenadas locais), mostre que

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g \frac{\partial g}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} (wg\sqrt{g}).$$

7. (a) Se  $X^r$  é um campo vetorial contravariante e

$$\operatorname{div} X^r = \odot = X^r_{,r} = g^{m,n} X_{m,n}$$

em termos do campo vetorial covariante associado  $X_r$ .

- (b) No caso que  $X_r \frac{\partial \varphi}{\partial x^r} = \varphi_{,r}$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = g^{mn} \varphi_{,mn} = \Delta \varphi.$$

8. Considere o vetor contravariante

$$R^r = \epsilon^{rts} X_{r,t} = \operatorname{curl} X_r.$$

Mostre que isto generaliza a noção de curl.

9. Observe que

$$\begin{aligned} X^r_{,r} &= \frac{\partial X^r}{\partial x^r} + \Gamma^r_{mr} X^m = \frac{\partial X^r}{\partial x^r} + \frac{\partial}{\partial x^m} (\log \sqrt{g}) X^m \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^m} (\sqrt{g} X^m) \end{aligned}$$

e se  $X^m = g^m \frac{\partial \varphi}{\partial x^r}$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^m} \left( \sqrt{g} g^{mj} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right).$$

10. Se

$$w^j = a_i^j dx^i,$$

mostre que

$$w^{i_1} \wedge \cdots \wedge w^{i_k} = M_{j_1 \cdots j_k}^{i_1 \cdots i_k} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}$$

com  $M_{j_1 \cdots j_k}^{i_1 \cdots i_k}$  sendo o determinante correspondente a submatriz definida pelos elementos nas intersecções das filas  $i_1, \cdots, i_k$ .

11. Seja  $ds^2 = g_{ij}(x)dx^i \otimes dx^j$ . Mostre que  $\sqrt{g}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$  é um tensor sob mudanças de coordenadas com Jacobiano  $|g_{ij}| = g > 0$  e  $\sqrt{g'}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \sqrt{g}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$  sob transformada de coordenadas locais  $x \rightarrow x'$ .

12. Prove que no caso isotrópico

$$(i) T_{ij} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} v + 2\mu e'_{ij}.$$

$$(ii) T_{ij} = (-p + \lambda \odot) \delta_{ij} + 2\mu e'_{ij} \text{ (ver exercício 3).}$$

$$(iii) e_{ij,j} = \frac{1}{2} \Delta v_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot v).$$

$$(iv) T_{rj,j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot v) + \mu \delta v_i$$

13. As seções de  $T^1(M)$ ,  $\chi : M \rightarrow T_0^1(M)$  formam um módulo  $\chi(M)$  sobre  $\mathcal{F}(M)$ . Associado com  $\chi$  há uma curva integral local  $\varphi(x, t)$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(x, t)}{dt} &= \chi(\varphi(x, t)) \\ \varphi(x, 0) &= x \end{aligned}$$

ou coordenadas locais em  $M$ . Isto nos permite a introduzir a derivada de Lie de um campo tensorial  $T_{j_1 \cdots j_p}^{i_1 \cdots i_k}$  na direção  $\chi$  via

$$L_\chi T_{j_1 \cdots j_p}^{i_1 \cdots i_k} = \left. \frac{d}{dt} (\varphi + T)_{j_1 \cdots j_p}^{i_1 \cdots i_k} \right|_{t=0}.$$

Aqui  $\varphi_2 T = \varphi_{t^*}^{-1}(e_{i_1}) \otimes \cdots \otimes \varphi_{t^*}^{-1}(e_{i_k}) \otimes \varphi_t^*(e^{j_1}) \otimes \cdots \otimes \varphi_t^*(e^{j_p})$ . Mostre que

$$L_\chi(R \otimes S) = L_\chi R \otimes S + R \otimes L_\chi S$$

e

$$L_\chi(w_1 \wedge w_2) = L_\chi w_1 \wedge w_2 + w_1 \wedge L_\chi w_2$$

14. Mostre que

$$L_X L_Y - L_Y L_X = L_{[X, Y]}$$

15. Suponha que  $X$  é um espaço vetorial em uma variedade de Riemann  $M$  com métrica  $g_{ik}$  e

$$L_X g_{ik} = 0 \quad (\text{um campo de Killing}).$$

Mostre que se  $\varphi_t$  é um grupo de isometrias agindo em  $M$  dependendo sobre um grupo de parâmetros em uma variável  $t$ , então  $X(x) = \left. \frac{d}{dt} \varphi_t(x) \right|_{t=0}$  é um campo de Killing.

16. Se  $X$  e  $Y$  são campos de Killing, mostre que  $[X, Y]$  é um campo de Killing. Para uma discussão das implicações físicas de vetores de Killing (a existência de simetrias globais) referimos ao leitor os livros de Wald [17] e Weinberg [18].

17. Se  $X \in \chi(M)$  e  $\alpha \in \Lambda(M)$ , a multiplicação interna (a esquerda) é definida por  $(i_X \alpha)(X_1, \dots, X_{k-1}) = \alpha(X, X_1, \dots, X_{k-1})$ . Mostre que

(a)  $i_X(w_1 \wedge w_2) = (i_X \times w_1) \wedge w_2 + (-1)^k w_1 \wedge i_X w_2$ ,  $w_1 \in \Lambda^k(M)$

(b)  $L_X = i_X d + di_X$  em  $\Lambda(M)$

(c)  $dL_X = L_X d$  em  $\Lambda(M)$

(d)  $i_{[X,Y]} = L_X i_Y - i_Y L_X$  em  $\Lambda(M)$

18. Trabalhando na categoria  $C^\infty$ , defina um conexão afim  $\nabla$  via  $X \in T_0^1(M) \rightarrow \nabla_X \in T_0^1(M)$  tal que

$$\begin{aligned} \nabla_{fX+gY} &= f\nabla_X + g\nabla_Y \\ \nabla_X(fY) &= f\nabla_X(Y) + XfY \end{aligned}$$

$\forall f, g \in \mathcal{F}(M)$ ,  $X, Y \in \Gamma_0(M)$ . Defina  $\Gamma_{ij}^k$  localmente em  $M$  via

$$\nabla_i \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (\text{voltando a nossa formulação do texto}).$$

Defina torção  $T$  e curvatura  $R$  via

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X, Y] \\ R(X, Y) &= \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]} \end{aligned}$$

e localmente em termos de bases

$$\begin{aligned} T(X_i, Y_j) &= \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k \\ R(X_i, Y_j)X_l &= \sum_k R_{lij}^k Y_k \end{aligned}$$

(a) Estabeleça as identidades de Bianchi

(b) Se  $\nabla$  é associado com uma métrica pseudo-Riemanniana  $g$ , mostre que

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)Z, V) &= -g(R(X, Y)V, Z) \\ g(R(X, Y)Z, V) &= g(R(Z, V)X, Y). \end{aligned}$$

19. Seja  $M$  uma variedade Riemanniana com tensor de curvatura  $R$  e métrica  $g$ . Seja  $S$  um subespaço vetorial de dimensão 2 do espaço tangencial  $T^1(M)$ . A curvatura seccional  $K(S)$  deve sua origem a Riemann, isto é,

$$K(S)(p) = -\frac{g(R_p(Y, Z)Y, Z)}{\|(Y, Z)\|^2} \quad p \in M.$$

Aqui  $\|(Y, Z)\|$  é a curva do paralelogramo gerado por  $Y, Z$ .

(a) Mostre que  $Y$  e  $Z$  são ortonormais

$$K(S)(p) = -R_{ijkl} Y^i Z^j Y^k Z^l$$

dado que  $R_{ijkl} = g_{im} R_{jkl}^m$

- (b) Em geral mostre que  $\xi$  e  $\eta$  são uma base ortonormal para  $S$  que se  $X = a\xi + b\eta$  e  $Y = c\xi + d\eta$ , então

$$K(S)(p) = -(ad - bc)^2 R_{ijkl} \xi^i \eta^j \xi^k \eta^l$$

- (c) Mostre que

$$\frac{1}{(ad - bc)^2} = (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \xi^i \eta^j \xi^k \eta^l$$

e  $K(S)(p)$  pode ser expresso como

$$K(S)(p) = \frac{R_{ijkl} \xi^i \eta^j \xi^k \eta^l}{(g_{jk}g_{il} - g_{jl}g_{ik}) \xi^i \eta^j \xi^k \eta^l}.$$

No caso que  $K(S)(p) = \text{constante}$  independentemente de  $S$  concluímos que  $R_{ijkl} = K(g_{jk}g_{il} - g_{jl}g_{ik})$ . Referimos o leitor para todo este exercício a seção 1.10 de [4] e página 52,53.

# Bibliografia

- [1] Aris, R., *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Prentice-Hall, 1962, N. J., 1962.
- [2] Darling, R. W., *Differential Forms and Connections*, C. U. P., New York, 1994.
- [3] Flanders, H., *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*, Academic Press, New York , 1963.
- [4] Goldberg, S. I. *Curvature and Homology*, Academic Press, New York, 1962.
- [5] Jeffreys, H., *Cartesian Tensor*, University Press, Cambridge , 1931.
- [6] Mc Connell, A. J., *Applications of Tensor Calculus*, Dover Publication, New York, 1957.
- [7] Lang, S., *Introduction to Differential Manifolds*, Interscience, New York, 1962.
- [8] Nash, C., *Differential topology and quantum field theory*, Academic Press, London, 1991.
- [9] Novikov, S. P. and Taimanov, I. A., *Modern Geometric Structures and Fields*, A M S, Rhode Island, 2006.
- [10] Roman, S., *Advanced Linear Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [11] Rudin, W., *Principle of Mathematical Analysis*, 2<sup>a</sup> ed, McGraw-Hill, New York, 1964.
- [12] Schwartz, J. T., *Nonlinear Functional Analysis*, New York, Courant Institute, Lecture Notes 1963-1964.
- [13] Singer, I. M., Thorpe, J. A., *Lecture Notes on Elementary Topology*, Foresman and Co, Glenview, Illinois, 1967.
- [14] Spain, B., *Tensor Calculus*, Oliver & Boyd, Edinburgh, 1960.
- [15] Thomas, T. Y., *Concepts from Tensor Analysis and Differential Calculus*, Academic Press, London, 1961.
- [16] Trautman, A., *Foundations and Current Problems of General Relativity*, in Lectures on General Relativity, Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics, Vol 1, 1964, 1-248, Prentice-Hall, New Jersey.
- [17] Wald, R. M., *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [18] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley, New York, 1971.
- [19] Willmore, T. J., *An Introduction to Differential Geometry*, O U P, London, 1959.

# Apêndice A

## Teoria de Sturm-Liouville

A teoria de oscilação para equações diferenciais ordinárias foi atacado primeiro por Sturm em seu trabalho publicado em J. de Math 1, 1836, pg 106. Considere

$$y'' + g(x)y = 0 \quad q \in C(\mathbb{R}') \quad (\text{A.1})$$

**Teorema de Comparação A:** Se  $y < 0$  em  $(a, b)$  então  $\forall u \neq 0$  satisfazendo (A.1) tem no máximo um zero em  $(a, b)$

*Demonstração.* Suponha que  $u$  tem dois zeros  $x_0, x_1$  consecutivos  $a < x_0 < x_1 < b$  (mas pode ter ponto de acumulação de zeros, veja teorema subsequente). Podemos supor que  $u'(x_0) \neq 0$  (se não  $u(x) \equiv 0$ ) e sem falta de generalidade que  $u'(x_0) > 0$ . Então,  $u(x) > 0$  em um intervalo a direita e  $u(x) \geq 0$  em  $[x_0, x_1]$ . Segue-se que  $u'' = -g(x)u(x) \geq 0$  em  $[x_0, x_1] \Rightarrow u'(x_0)$  crescente em  $[x_0, x_1]$  e  $u(x_1) - u(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} u'(x)dx > 0$  ou  $0 > 0$  uma contradição. O caso  $u'(x_0) < 0$  pode ser tratado similarmente.  $\square$

Basicamente, vamos comparar a equação (A.1) a equações  $y'' + cy = 0$  com  $c$  constante. Conseqüentemente é útil considerar

$$y'' + g(x)y = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$z'' + h(x)z = 0 \quad (\text{A.3})$$

**Teorema de Comparação B:** Seja  $g < h$  para  $x \geq x_0$ . Seja  $y$  solução de (A.2) com data inicial  $y(x_0) = y_0$  e  $y'(x_0) = y'_0$  e  $y(x) > 0$  em um intervalo a direita de  $x_0$ . Seja  $z(x)$  a solução de (A.3) satisfazendo  $z(x_0) = y_0, z'(x_0) = y'_0$ . Então  $y(x) > z(x)$  para  $x > x_0$  dado que  $z(x) > 0$ .

*Demonstração.* (A.2) e (A.3), dão:

$$y''z - yz'' = (h - g)yz$$

Integrando

$$y'z - yz' = \int_{x_0}^x (h - g)yz dx > 0 \quad \text{com } y \text{ e } z$$

Segue-se que

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y}{z} \right) = \frac{y'z - yz'}{z^2} > 0$$

e  $\frac{y}{z}$  crescente para  $x = x_0, \frac{y}{z} = 1$  se  $y_0 \neq 0$  ou  $\frac{y}{z} \rightarrow 1$  no caso que  $y_0 = 0$ .  $\square$

**Corolário 1:** Se  $y(\xi) = 0$  para algum  $\xi > x_0$  então  $z(\eta) = 0$  para algum  $\eta$  dentro de  $x_0$  e  $\xi$ .

**Corolário 2:** Se  $y(x_0)$  e  $y'(x_0)$  sejam tais que  $y(x) < 0$  a direita em algum intervalo então  $y(x) < z(x)$ , dado que  $z(x) < 0$ .

**Aplicação:** Se em (A.2)  $g(x) \rightarrow -a^2$  ( $a > 0$ ) com  $x \rightarrow \infty$  então qualquer solução de (A.2) estritamente positiva  $y \geq \epsilon > 0$  ( $x \geq x_0$ ) satisfaz as desigualdades  $e^{(a-\eta)x} < y(x) < e^{(a+\eta)x}$ . No ponto  $x_0$  dado  $y_0, y'_0$  tais que  $y(x) \geq \epsilon$   $x \geq x_0$  e

$$\left(a - \frac{\eta}{2}\right)^2 < -g(x) < \left(a + \frac{\eta}{2}\right)^2$$

comparando com as soluções:  $y_{\pm} = \underline{A}e^{b_{\pm}x} + \underline{B}e^{-b_{\pm}x}$ ,  $b_{\pm} = a \pm \frac{\eta}{2}$ , com  $y_-$  satisfazendo

$$\begin{aligned} y_-(x_0) &= y_0 = \underline{A}e^{b_-x_0} + \underline{B}e^{-b_-x_0} > \epsilon \\ y'_-(x_0) &= y'_0 = \underline{A}b_-e^{b_-x_0} - b_-\underline{B}e^{-b_-x_0}. \end{aligned}$$

Assim,

$$b_-y_0 = \underline{A}b_-e^{b_-x_0} + b_-\underline{B}e^{-b_-x_0}$$

e

$$b_-y_0 + y'_0 = 2\underline{A}b_-e^{b_-x_0}$$

ou

$$\left(\frac{y_0}{2} + \frac{y'_0}{2b_-}\right)e^{-b_-x_0} = \underline{A}$$

e, também,

$$b_-y_0 - y'_0 = 2b_-\underline{B}e^{-b_-x_0}$$

ou

$$\left(\frac{y_0}{2} - \frac{y'_0}{2b_-}\right)e^{b_-x_0} = \underline{B}$$

Segue-se que

$$y_- = \left(\frac{y_0}{2} + \frac{y'_0}{2b_-}\right)e^{b_-(x-x_0)} + \left(\frac{y_0}{2} - \frac{y'_0}{2b_-}\right)e^{-b_-(x-x_0)}$$

Similarmente temos

$$y_+ = \left(\frac{y_0}{2} + \frac{y'_0}{2b_+}\right)e^{b_+(x-x_0)} + \left(\frac{y_0}{2} - \frac{y'_0}{2b_+}\right)e^{-b_+(x-x_0)}.$$

e  $y_- < y < y_+$ . Se  $y \geq \epsilon > 0$  então  $y_0 + \frac{y'_0}{b_+} > 0$ . No caso contrário  $y_0 + \frac{y'_0}{b_+} \leq 0$  e temos  $\epsilon \leq 0$  contradição. Então escolhendo  $x_0$  suficientemente grande, segue-se que  $y_0 + \frac{y'_0}{b_{\pm}} > 0$  e  $e^{(a-\eta)x} < y < e^{(a+\eta)x}$

**Lema Técnico:**  $\xi$  finito mas pode ser um ponto limite de zeros de uma solução de (A.1) se  $y \neq 0$ .

*Demonstração.* Supondo que  $\xi = \lim x_n$   $y(x_n) = 0$

$$\Rightarrow y(\xi) = 0 \text{ e } y'(\xi) = \lim_{x_n \rightarrow \xi} \frac{y(x_n) - y(\xi)}{x_n - \xi} = 0$$

e teorema de unicidade  $\Rightarrow y \equiv 0$ . □

**Teorema de Oscilação A:** Sejam  $u_1$  e  $u_2$  soluções linearmente independentes de (A.2) então dentro de cada dois zeros de uma solução existe um zero da outra.

*Demonstração.* Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois zeros consecutivos de  $u_1$ . De

$$\begin{aligned}u_1'' + gu_1 &= 0 \\u_2'' + gu_2 &= 0\end{aligned}$$

temos que  $u_1''u_2 - u_1u_2'' = 0$  e integrando  $[u_1'u_2 - u_1u_2']_\alpha^\beta = 0$  ou  $u_1'(\beta)u_2(\beta) = u_1'(\alpha)u_2(\alpha)$ . Dado que  $\alpha$  e  $\beta$  são dois zeros consecutivos  $u_1'(\alpha)$  e  $u_1'(\beta)$  tem sinais opostos  $\Rightarrow u_2(\alpha)$  e  $u_2(\beta)$  tem sinais opostos  $\Rightarrow u_2(x)$  tem a menos um zero no intervalo  $\alpha$  e  $\beta$  e viceversa.  $\square$

**Teorema de Oscilação B:** *Se  $0 < m < g(x) < M$  para  $a \leq x \leq b$  e  $x_0$  e  $x_1$  são zeros consecutivos em  $(a, b)$  de uma solução de (A.2) então*

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} < x_1 - x_0 < \frac{\pi}{\sqrt{m}}$$

*Demonstração.* Podemos comparar a equação  $z'' + Mz = 0$  a solução  $z$  que é zero em  $x = x_0$  e tem  $z'_0 = y'_0$  é  $z = \frac{y'_0}{\sqrt{M}} \text{sen}(x - x_0)\sqrt{M}$ .

Observamos que

$$\begin{aligned}-y(x_0 + \frac{\pi}{\sqrt{M}})y'_0 \cos \pi &= \int_{x_0}^{x_0 + \frac{\pi}{\sqrt{M}}} (M - g)yz \quad e \\y(x_0 + \frac{\pi}{\sqrt{M}})y'_0 &= \int_{x_0}^{x_0 + \frac{\pi}{\sqrt{M}}} (M - g)yz > 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow y(x_0 - \frac{\pi}{\sqrt{M}}) \neq 0$  (temos que  $y'_0 \neq 0$ ). Teorema de Comparação B  $\Rightarrow x_1 - x_0 > \frac{\pi}{\sqrt{M}}$ . Uma demonstração similar da a outra desigualdade.  $\square$

**Corolário:** *O numero  $n$  de zeros dentro do intervalo  $(x_0, x)$  satisfaz  $\frac{x-x_0}{\pi}\sqrt{m} < n < \frac{x-x_0}{\pi}\sqrt{M}$*

*Demonstração.* Imediata  $\square$

**Observação 16.** *O Teorema de Comparação B e os corolários  $\Rightarrow$  primeiro zero de  $z(x) > x_0$  é a esquerda do primeiro zero de  $y(x)$ . Vamos mostrar pela indução que se haja mais zeros o zero  $n$ -ésima  $\zeta_n$  de  $z(x)$  é a esquerda do zero  $n$ -ésima  $\eta_n$  de  $y(x)$ , supondo que  $\zeta_{n-1} < \eta_{n-1}$ . Seja  $y_1(x)$  a solução de A.2 que é zero em  $\zeta_{n-1}$  e com a mesma derivada como  $z(x)$ . Relembrando Teorema de Comparação B,  $\zeta_n$  é a esquerda do proximo zero de  $y_1(x)$ . Pelo Teorema de Oscilação A,  $y_1(x)$  tem um zero dentro de  $\eta_{n-1}$  e  $\eta_n$  e  $\zeta_n < \eta_n$ .*

**Exemplo:** *Considere o problema  $y'' + \lambda y = 0$  com condições de fronteira  $y(0) = y(\pi) = 0$ .*

$$y = A \text{sen} \sqrt{\lambda} x + B \cos \sqrt{\lambda} x$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\text{ou } y = A \text{sen} \sqrt{\lambda} x$$

$$\text{Se } y(\pi) = 0, \text{sen} \sqrt{\lambda} \pi = 0 \text{ e}$$

$$\lambda = 1^2, 2^2, 3^2, \dots$$

*Os autovalores com autofunções  $\{\text{sen}(nx)\}$ . Observe um fato interessante aqui que é característica deste tipo do problema  $\text{sen}(nx) = 0$  nos pontos  $0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{(n-1)\pi}{n}, \frac{n\pi}{n}$  ou tem  $n$  zeros*

$\{\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{n\pi}{n}\}$  no intervalo  $(0, \pi]$ . Vamos mostrar que este tipo de comportamento é genérico. Com um operador da forma:

$$L_0 = \frac{d^2}{dx^2} \quad e \quad g > 0$$

O problema  $(L_0 + \lambda g)y = 0$  em  $[a, b]$  vai ter autovalores  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  tal que a autofunção correspondente  $\psi_n(x)$  tem  $n$  zeros em  $(a, b)$ . De fato esta propriedade de ter  $n$  zeros (uma propriedade de oscilação vai caracterizar os autovalores  $\lambda_n$ ).

Isto é o conteúdo do seguinte resultado.

**Teorema sobre Autofunções:** *Seja  $g(x) > 0$  em  $(a, b]$  e seja  $y_\lambda(x)$  a solução da equação  $y'' + \lambda g(x)y = 0$  com  $y_\lambda(a) = 0, y'_\lambda(a) = k \neq 0$ . Então  $y_\lambda(b) = 0$  se e so se  $\lambda$  toma os valores  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \rightarrow \infty$  com  $n \rightarrow \infty$*

*Demonstração.* Primeiro observamos que o  $n$ -ésimo zero de  $y_\lambda(x)$  é uma função continua de  $\lambda$ . Vamos mostrar isto para  $\lambda = \alpha$ . En cerque o  $m$ -zero  $\eta_m(\alpha)$  em um intervalo que não contem outro zero de  $y_\alpha(x)$ . Então  $y_\alpha(c)$  e  $y_\alpha(d)$  tem sinais opostos. Mas agora aplicando a observação sobre dependência continua das soluções sobre um parâmetro. Segue-se que para  $\lambda$  perto de  $\alpha$ ,  $y_\lambda(c)$  e  $y_\lambda(d)$  tem sinais opostos e  $y_\lambda(x)$  tem um zero em  $(c, d)$ . Segue-se que um zero (dado) é uma função continua de  $\lambda$ . A observação 16 mostra que  $\eta_m(\lambda)$  decresce quando  $\lambda$  cresce para  $\infty$ . Deixe  $\lambda$  tomar os todos valores em  $-\infty$  em  $+\infty$ . Para  $\lambda < 0$  o Teorema da Comparação A assegura que  $y_\lambda(x)$  não tem zero salvo de  $a$ . Corolário do Teorema de Oscilação B implica que o numero de zeros de  $y_\lambda(x)$  em  $(a, b) \rightarrow +\infty$  com  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Então existem valores  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  tal que um outro entra no intervalo. A função  $y_\lambda(x)$  para  $\lambda = \lambda_n$  tem zeros em  $a$  e  $b$  e  $n - 1$  zeros em  $(a, b)$ . □

**Corolário 1:** *Se  $m \leq g(x) \leq M$  então  $\frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2M} \leq \lambda_n \leq \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2m}$*

*Demonstração.* Conseqüência imediata de Corolário do Teorema de Oscilação B. □

**Corolário 2:** *Os resultados do teorema acima estende a equação*

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (q(x) + \lambda g(x))y = 0$$

com  $p(x) > 0, g(x) > 0$ .

*Demonstração.* Faça uma mudança de variáveis independentes  $\xi = \int_a^x \frac{dt}{p(t)}$  que transforma a equação na forma

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} + (q_1(\xi) + \lambda g_1(\xi))y = 0$$

e aplique uma análise similar a análise acima. □

**Observação 17.** *Esta teoria clássica tem varias generalizações geralmente precisando de uma formulação em termos de análise funcional. Veja por exemplo capitulos 7 a 10 em Coddington e Levinson e a extensa seção em Vol II de Linear Operators de Dunford e Schwartz, Interscience 1963 (muitos resultados de pesquisa ate mais ou menos 1960).*

*Uma das propriedades mais importantes é ortogonalidade. Temos por exemplo denominando por  $u_n(x)$  a  $n$ -ésima autofunção (determinado dentro de um constante).*

$$\begin{aligned} (pu'_m)' + (q + \lambda_m g)u_m &= 0 \\ (pu'_n)' + (q + \lambda_n g)u_n &= 0 \end{aligned}$$

Segue-se que  $[p(u'_m u_n - u_m u'_n)]_a^b + (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b g u_m u_n dx = 0$  e  $\int_a^b g u_m u_n dx = 0$  para  $m \neq n$ . No caso  $m = n$ ,  $\int_a^b g u_n^2 dx > 0$ . Podemos normalizar  $\tilde{u}_n = \frac{u_n}{\sqrt{\int_a^b g u_n^2 dx}}$  tal que  $\int_a^b g \tilde{u}_n^2 dx = 1$ . Muito mais pode ser demonstrado. De facto estamos no começo de uma extensão da teoria de análise harmonica clássica à teoria de series de Fourier generalizadas.

### **Referências Bibliográficas**

Burkill, J. C., *The Theory of Ordinary Differential Equations*, 2 ed., Oliver & Boyd, Edinburgh, 1962.

Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations*, Dover, New York, 1956.

# Apêndice B

## Variáveis Complexas

Seja  $f(z)$  definida em  $D$  (domínio) 1-1 e suponha que  $f'(z)$  em cada ponto de  $D$  ( $\exists \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f'(z)$ ). Dizemos que  $f(z)$  é **regular** em  $D$

$\exists f'(z) \Rightarrow$  escrevendo  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z = x + iy$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right) = f'(z) \\ \text{(b)} \quad & \exists \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left( \frac{u(x, y+i\Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \frac{v(x, y+i\Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} \right) = f'(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mas} \quad & \text{(a) é } u_x + iv_x = f'(z) \\ \text{e} \quad & \text{(b) é } v_y - iu_y = f'(z) \end{aligned}$$

$$\text{ou} \quad u_x = v_y, u_y = -v_x \tag{B.1}$$

as equações de Cauchy-Riemann.

Suponha que  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  é tal que  $\exists u_x, v_x, u_y, v_y \in C(D)$  e satisfazem (B.1) então  $f(z)$  é regular.

$\Delta u = \Delta y u_y(x + \Delta x, y + \vartheta \Delta y) + \Delta x u_x(x + \vartheta' \Delta x, y)$ ;  $0 < \vartheta < 1, 0 < \vartheta' < 1$  pelo teorema de valor medio.

$u_x$  e  $u_y$  sendo contínuas observamos que

$$\Delta u = \Delta x(u_x(x, y) + \epsilon) + \Delta y(u_y(x, y) + \epsilon')$$

$$\epsilon; \epsilon' \rightarrow 0 \text{ com } |\Delta z| \rightarrow 0$$

Na mesma maneira

$$\Delta v = \Delta x(v_x(x, y) + \eta) + \Delta y(v_y(x, y) + \eta')$$

$$\eta; \eta' \rightarrow 0 \text{ com } |\Delta z| \rightarrow 0$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} \Delta w &= \Delta u + i\Delta v \\ &= \Delta x(u_x + iv_x) + \Delta y(u_y + iv_y) + o(|z|) \quad \text{com } |\Delta z| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

utilizando (B.1) obtemos que

$$\Delta w = (\Delta x + i\Delta y)(u_x + iv_x) + o(|\Delta z|) \quad \text{com } |\Delta z| \rightarrow 0$$

Segue-se que

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) = (\Delta x + i\Delta y)(u_x + iv_x) + o(|\Delta z|)$$

$$\exists \lim_{\Delta z} \frac{\Delta w}{\Delta z} = u_x + iv_x$$

Seja  $x = \phi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta$  um arco de uma curva em  $\mathbb{C}$  e suponha que  $\phi'(t)$  e  $\psi'(t)$  existam e sejam contínuas. Então podemos definir o comprimento da curva

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$$

Seja  $z = \phi(t) + i\psi(t), \alpha \leq t \leq \beta, \phi(t), \psi(t) \in C[\alpha, \beta]$  então dizemos o arco definido sobre  $\alpha \leq t \leq \beta$  é um arco de Jordan se  $z$  é um homeomorfismo. Uma curva fechada de Jordan é a imagem homeomorfa de um arco [que pode ser parametrizado por  $\xi = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ ].

Dizemos um arco de Jordan (curva fechada de Jordan) é regular se  $z'(t) \in C[\alpha, \beta] (C[0, 2\pi])$ . Segue-se que podemos definir o comprimento de um arco regular de Jordan

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$$

Um contorno é um arco de Jordan contínuo consistindo de um número finito de arcos regulares. Seja  $f(z)$  uma função contínua sobre um arco regular  $L$  com equações  $x = \phi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta$  então podemos definir a integral de  $f(z)$ , ( $f(z) = u + iv$ ).

$$\int_L f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} (u + iv)(\phi'(t) + i\psi'(t)) dt \quad (\text{B.2})$$

Sobre um contorno  $C = \bigcup_{L_r} \text{regular } L_r$

$$\int_C f(z) dz = \sum_r \int_{L_r} f(z) dz \quad (\text{B.3})$$

**Lema:** Se  $f(z)$  é contínua sobre um contorno  $L$  de comprimento  $l$  e  $|f(z)| \leq M$  então  $|\int_L f(z) dz| \leq Ml$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \left| \int_L f(z) dz \right| &\leq \left| \int_{\alpha}^{\beta} (u + iv)(\phi'(t) + i\psi'(t)) dt \right| \\ &\leq M \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt \\ &\leq Ml \end{aligned}$$

□

**Teorema:** [O teorema de Cauchy (versão restrita)] Seja  $f(z)$  regular e  $f'(z)$  contínua dentro e sobre um contorno fechado  $C$  então

$$\int_C f(z) dz = 0 \quad (\text{B.4})$$

*Demonstração.* Seja  $D = C^0 \cup \partial C$  então

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i \int_C (vdx + udy) \quad (\text{B.5})$$

O teorema de Green diz que se  $P, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$  sejam contínuas em  $D$  então

$$\int_C Pdx + Qdy = \int \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

aplicando este resultado em (B.5)

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= - \int \int_D \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \int \int_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

utilizando (B.1). □

Sobre as condições do teorema acima temos

**Teorema da Representação de Cauchy:** *Seja  $f(z)$  regular sobre  $D$ ,  $f'(z)$  contínua sobre  $D$  e  $\zeta \in D(\zeta \notin C)$  então*

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - \zeta} dz \quad (\text{B.6})$$

*Demonstração.* Defina  $\phi(z) = \frac{f(z)}{z - \zeta}$ , na região indicada acima  $\phi$  é regular e  $\phi'$  contínua, segue-se que

$$\int_{\Gamma} \phi(z) dz = 0$$

utilizando o teorema de Cauchy. Mas

$$\int_{\Gamma} \phi(z) dz = \int_C \phi(z) - \int_{\Upsilon} \phi(z) dz + I_+ - I_-$$

Um cálculo mostra que  $I_+ - I_- \rightarrow 0$  no limite.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} \phi(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} dz \\ &= I + J \end{aligned}$$

pondo sobre  $\Upsilon$ ,  $z - \zeta = \delta e^{i\theta}$

$$I = \frac{f(\zeta)}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\delta i e^{i\theta}}{\delta e^{i\theta}} d\theta = f(\zeta)$$

$$|J| \leq \frac{1}{2\pi\delta} \max_{\Upsilon} |f(z) - f(\zeta)| 2\pi\delta \rightarrow 0, \quad \text{com } \delta \rightarrow 0$$

□

**Teorema de Derivação:** *Sob as condições acima sobre  $f(z)$*

$$f'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - \zeta)^2} dz \quad (\text{B.7})$$

para qualquer contorno fechado de Jordan que contem o ponto  $z = \zeta$

*Demonstração.* De (B.6)

$$\begin{aligned} \frac{f(\zeta + h) - f(\zeta)}{h} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{h} \left( \frac{1}{z - \zeta - h} - \frac{1}{z - \zeta} \right) f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \left( \frac{f(z)}{(z - \zeta)^2} + \frac{hf(z)}{(z - \zeta)^2(z - \zeta - h)} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - \zeta)^2} dz + I \end{aligned}$$

Mas  $|f(z)| \leq M$  sobre  $C$ , seja  $d = \text{dist}(\zeta, C)$  e tome  $|h| < \frac{d}{2}$ , então

$$|I| \leq \frac{|h| M l}{2\pi \frac{d^2 d}{2}} \rightarrow 0 \quad \text{com } |h| \rightarrow 0$$

□

**Corolário:** *Sob as condições do Teorema de Derivação,*

$$\exists f^n(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{n+1}} \quad (\text{B.8})$$

### O resultado de Cauchy sobre resíduos

Considere uma função analítica  $f(z)$  no disco  $D(0, a)$  regular salvo em um número finito de pontos  $z_1, z_2, \dots, z_n$  interiores, na vizinhança das quais tem um representação

$$f(z) = \phi(z) + \sum_{s=1}^m \frac{a_s}{(z - z_r)^s}, \quad (\text{B.9})$$

$\phi(z)$  regular em  $D(0, a)$ . Podemos introduzir um conjunto de círculos  $C_r$  de raio  $\epsilon$  e centro  $z_r$ ,

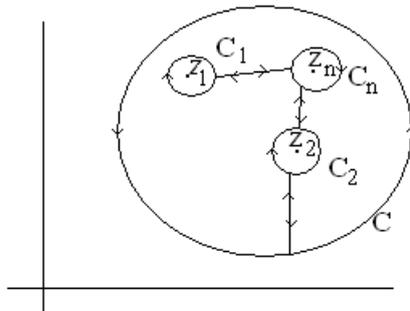


Figura B.1: Círculos em torno das singularidades

$r = 1, \dots, n$  que não tem inteseção e estão contidos em  $D(0, a)$ , dado que  $\epsilon$  é suficientemente pequeno. Segue-se podemos ligar os círculos  $C_r$  por uma segmentos lineares (tomando limite de canais) e obter um novo contorno  $CC_1C_2\dots C_n$  sem singularidades no interior. Pelo Teorema de Cauchy,

$$\int_C f(z)dz - \sum_{r=1}^n \int_{C_r} f(z)dz = \int_{CC_1C_2\dots C_n} f(z)dz = 0.$$

De B.9 obtemos

$$\begin{aligned} \int_{C_r} f(z)dz &= \int_{C_r} \phi(z)dz + \sum_{s=1}^m \int_{C_r} \frac{a_s}{(z - z_r)^s} dz \\ &= \sum_{s=1}^m \int_{C_r} \frac{a_s}{(z - z_r)^s} dz \quad (\text{pelo teorema de Cauchy}). \end{aligned}$$

Mas um cálculo direto estabelece que

$$\int_{C_r} f(z)dz = \sum_{s=1}^m a_s \epsilon^{1-s} \int_0^{2\pi} e^{(1-s)\theta i} i d\theta = 2\pi i$$

( $a_1$  é chamado o resíduo de  $f(z)$  em  $z_r$ ). Segue-se que

$$\int_C f(z)dz = \sum_{r=1}^n \int_{C_r} f(z)dz = 2\pi i \sum_{r=1}^n \text{resíduos da } f(z) \text{ em } a_1$$

### Referências Bibliográficas

E. G. Phillips, *Functions of a Complex Variable*, Oliver & Boyd, Edinburg, 1958.

Whittaker, E.T. & Watson, G. N., *A course of modern analysis : an introduction to general theory of infinite processes and of analytic functions* Cambridge, 1944.

# Apêndice C

## Método de Frobenius e Desigualdade de Cauchy

Considere a equação

$$w'' + p(z)w' + (z)w = 0.$$

Dizemos que  $z_0$  é uma singularidade da equação se é um ponto de singularidade de uma ou ambas as funções  $p$  e  $q$ .

Chamamos  $z_0$  uma singularidade regular no caso que não é uma singularidade de  $(z - z_0)p(z)$  nem  $(z - z_0)^2q(z)$  e no caso contrário dizemos que é uma singularidade irregular. Sem falta de generalidade supomos que  $z_0 = 0$ . O teorema de Cauchy diz que  $zp(z)$  e  $z^2p(z)$  são regulares em  $|z| < R$ :

$$zp(z) = \sum_0^{\infty} p_r z^r \quad \text{não todas } p_0, q_0, q \text{ zero}$$
$$z^2q(z) = \sum_0^{\infty} q_r z^r.$$

Buscamos uma solução na forma

$$w = z^\alpha \sum_0^{\infty} a_r z^r$$

segundo a análise de Frobenius *Journal für math.* 76, 1873.

Observamos que as relações

$$a_0 F(\alpha) = 0 \quad F(\alpha) = \alpha(\alpha - 1) + p_0\alpha + q_0$$

e

$$a_n F(\alpha + n) = - \sum_{s=0}^{n-1} a_s ((\alpha + s)p_{n-s} + q_{n-s}) \quad n \geq 1$$

são satisfeitas.

Suponha que as diferenças de raízes de  $F(\alpha)$

$$\alpha - \alpha' \quad \text{é um inteiro ou zero.}$$

As relações podem ser escritas na forma

$$n(n + \alpha - \alpha')a_n = - \sum_{s=0}^{n-1} a_s ((\alpha + s)p_{n-s} + q_{n-s}).$$

Escrevendo  $b_n = |a_n|$ ,  $0 \leq n < \delta$ ,  $\delta = |\alpha - \alpha'|$  e  $\tau = |\alpha|$ . Seja  $m$  o primeiro inteiro  $> \delta$ . Segue-se que

$$\begin{aligned} m(m - \delta)|a_m| &\leq |m(m + \alpha - \alpha')a_m| \\ &= \left| \sum_{s=0}^{n-1} a_s((\alpha + s)p_{m-s} + q_{m-s}) \right| \\ &\leq \sum_{s=0}^{n-1} b_s((s + \tau)|p_{m-s}| + |q_{m-s}|). \end{aligned}$$

Seja

$$\begin{aligned} M &= \max_{|z|=r} |zp(z)| \\ N &= \max_{|z|=r} |z^2q(z)| \quad r < R. \end{aligned}$$

As desigualdades de Cauchy implicam que

$$\begin{aligned} |p_n| &\leq \frac{M}{r^n}, & |a_n| &\leq \frac{N}{r^n} \\ &\text{ou} \\ |p_n| &\leq \frac{K}{r^n}, & |a_n| &\leq \frac{K}{r^n} \quad K = \max(M, N). \end{aligned}$$

Introduzimos as relações de recorrência relacionadas

$$\begin{aligned} n(n - \delta)b_n &= K \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(s + \tau + 1)b_s}{r^{n-s}}, \quad n \geq m \\ m(m - \delta)b_m &= K \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(s + \tau + 1)b_s}{r^{m-s}} \end{aligned}$$

e observamos que  $|a_n| \leq b_n$ . Um cálculo simples dá

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{(n - 1)(n - 1 - \delta)}{n(n - \delta)r} + \frac{K(n - \tau)}{n(n - \delta)r}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{1}{r}.$$

Segue-se que o raio de convergência de  $\sum b_n z^n$  é  $r$  e dado que  $|a_n| \leq b_n$  o raio de convergência de  $\sum a_n z^n$  é menor que  $r$ ,  $\forall r < R$ , o que implica que é convergente em  $|z| < R$ . Concluimos da equação diferencial via legitimidade de operações de diferenciação e multiplicação de séries de potências dentro de seu raio de convergência e o princípio de continuação analítica.

Citamos as observações de E. T. Whittaker e C. N. Watson em *A Course of Modern Analysis*, C.U.P. 4<sup>th</sup> Edition, 1958 (p. 203).

”A mais geral equação diferencial de segunda ordem que tem cada ponto, salvo de  $a_1, a_2, a_3, a_4$  e  $\infty$ , como um ponto ordinário, estes cinco pontos sendo pontos regulares com expoentes  $\alpha_r, \beta_r, r = 1, 2, 3, 4$  em  $a_r$  e expoentes  $\mu_1, \mu_2$  em  $\infty$  pode ser verificada a ser

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \sum_{r=1}^4 \frac{1 - \alpha_r - \beta_r}{z - \alpha_r} \frac{du}{dz} + \left\{ \sum_{r=1}^4 \frac{\alpha_r \beta_r}{(z - a_r)^2} + \frac{Az^2 + 2Bz + C}{\prod_{r=1}^4 (z - a_r)} (z - a_r) \right\} u = 0$$

com  $A$  tal que  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são raízes de

$$\mu^2 + \mu \left\{ \sum_{r=1}^4 (\alpha_r + \beta_r) - 3 \right\} + \sum_{r=1}^4 \alpha_r \beta_r + A = 0$$

e  $B$  e  $C$  constantes.”

O teorema extraordinário tem sido demonstrado por Klein<sup>1</sup> e Böcher<sup>2</sup> que todas as equações lineares que ocorrem em certas áreas da física matemática são formas confluentes da equação especial deste tipo em que a diferença dos dois expoentes em cada singularidade é  $\frac{1}{2}$ . Pondo  $\beta_r = \alpha_r + \frac{1}{2}$ ,  $r = 1, 2, 3, 4$  e escrevendo  $\tau$  em lugar de  $z$ , a última equação é

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \sum_{r=1}^4 \frac{\frac{1}{2} - 2\alpha_r}{\tau - \alpha_r} \frac{du}{dz} + \left\{ \sum_{r=1}^4 \frac{\alpha_r(\alpha_r + \frac{1}{2})}{(\tau - \alpha_r)^2} + \frac{A\tau^2 + 2B\tau + C}{\prod_{r=1}^4 (\tau - \alpha_r)} (\tau - a_r) \right\} u = 0$$

com

$$A = \left( \sum_{r=1}^4 \alpha_r \right)^2 - \sum_{r=1}^4 \alpha_r^2 - \frac{3}{2} \sum_{r=1}^4 \alpha_r + \frac{3}{16}.$$

Esta equação é chamada a equação generalizada de Lamé.

Escrevendo  $a_1 = a_2$  na equação, a confluência das singularidades  $a_1, a_2$  da origem a uma singularidade em que os expoentes  $\alpha$  e  $\beta$  são dados pelas equações

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \alpha(\alpha_1 + \alpha_2) \\ \alpha\beta &= \alpha_1 \left( \alpha_1 + \frac{1}{2} \right) + \alpha_2 \left( \alpha_2 + \frac{1}{2} \right) + D, \end{aligned}$$

com

$$D = \frac{Aa_1^2 + 2Ba_1 + C}{(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)}.$$

Via confluência das cinco singularidades a nossa disposição, podemos obter seis equações classificadas em termos de

- singularidades com diferença de expoentes  $\frac{1}{2}$ ;
- outras singularidades;
- singularidades irregulares.

	(a)	(b)	(c)	
(I)	3	1	0	Lamé
(II)	2	0	1	Matheu
(III)	1	2	0	Legendre
(IV)	0	1	1	Bessel
(V)	1	0	1	Weber, Hermite
(VI)	0	0	1	Stokes.

Se as únicas singularidades da equação diferencial

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

<sup>1</sup>Über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung 1894

<sup>2</sup>Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie 1894

são singularidades regulares em  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\tau$ , as funções

$$\begin{aligned} P(z) &= (z - \xi)(z - \eta)(z - \tau)p(z) \\ Q(z) &= (z - \xi)^2(z - \eta)^2(z - \tau)^2q(z) \end{aligned}$$

são funções integrais.

O ponto a infinito não sendo uma singularidade,  $2z - z^2p(z)$  e  $z^4q(z)$  são regulares a infinito. Isto é o caso se e somente se  $P(z)$  e  $Q(z)$  são quadráticos em  $z$  e o coeficiente de  $z^2$  em  $P$  é 2. Conseqüentemente podemos escrever

$$p(z) = \frac{A}{z - \xi} + \frac{B}{z - \eta} + \frac{C}{z - \tau}, \quad A + B + C = 2$$

e

$$(z - \xi)(z - \eta)(z - \tau)q(z) = \frac{D}{z - \xi} + \frac{E}{z - \eta} + \frac{F}{z - \tau}.$$

A equação indicial da singularidade  $\xi$  é

$$k(k - 1) + Ak + D/\{(\xi - \eta)(\xi - \tau)\} = 0.$$

Se os expoentes em  $\xi$  sejam  $\alpha$  e  $\alpha'$ , isto da

$$A = 1 - \alpha - \alpha' \quad D = (\xi - \eta)(\xi - \tau)\alpha\alpha'.$$

Similarmente se expoentes em  $\eta$  são  $\beta$ ,  $\beta'$  e em  $\tau$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma'$ ,

$$\begin{aligned} B &= 1 - \beta - \beta' & E &= (\eta - \tau)(\eta - \xi)\beta\beta' \\ C &= 1 - \gamma - \gamma' & F &= (\tau - \xi)(\tau - \eta)\gamma\gamma' \end{aligned}$$

$$A + B + C = 2 \implies \alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$$

e a equação tem a forma

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{dz^2} + \left\{ \frac{1 - \alpha - \alpha'}{z - \xi} + \frac{1 - \beta - \beta'}{z - \eta} + \frac{1 - \gamma - \gamma'}{z - \tau} \right\} \frac{dw}{dz} - \\ - \left\{ \frac{\alpha\alpha'}{(z - \xi)(\eta - \xi)} + \frac{\beta\beta'}{(z - \eta)(\tau - \eta)} + \frac{\gamma\gamma'}{(z - \tau)(\xi - \eta)} \right\} \frac{(\xi - \eta)(\eta - \tau)(\tau - \xi)}{(z - \xi)(z - \eta)(z - \tau)} w = 0 \end{aligned}$$

Na notação de Riemann,

$$w = P \left\{ \begin{matrix} \xi & \eta & \tau & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix} \right\}$$

sob transformações fracionais lineares

$$t = \frac{(z - \xi)(\eta - \tau)}{(z - \eta)(\xi - \tau)}$$

$$\begin{aligned} P \left\{ \begin{matrix} \xi & \eta & \tau & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix} \right\} &= P \left\{ \begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & t \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix} \right\} \\ &= t^\alpha(1 - t)^\gamma P \left\{ \begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \alpha + \beta + \gamma & 0 & t \\ \alpha' - \alpha & \alpha + \beta' + \gamma & \gamma' - \gamma & \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

ou é suficiente discutir

$$t(1-t)w'' + (c - (a+b+1)t)w' - abw = 0.$$

Esta equação é chamada a equação diferencial da função hipergeométrica.

### **Referências Bibliográficas**

Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations*, Dover, New York, 1956.

# Apêndice D

## Aplicações de Método de Frobenius

### D.1 A equação hypergeométrica generalizada

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2} + (c - (a+b+1)z)\frac{dw}{dz} - abw = 0$$

Os pontos singulares finitos  $z = 0$  e  $z = 1$

Equação inicial ( $z = 0$ )

$$\alpha(\alpha + c - 1) = 0$$

Se  $c \neq 0$ ,  $\neq$  inteiro negativo a teoria de Frobenius assegura a existência de uma solução analítica na vizinhança de  $z = 0$ . Os coeficientes satisfazem

$$\begin{aligned}(\alpha + n)(\alpha + c - 1 + n)a_n &= (\alpha + a + n - 1)(\alpha + b + n - 1)a_{n-1} \quad e \\ a_n &= \frac{\Gamma(\alpha + a + n)\Gamma(\alpha + b + n)}{\Gamma(\alpha + 1 + n)\Gamma(\alpha + c + n)}A\end{aligned}$$

As soluções tem a forma

$$\begin{aligned}&\sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)n!} z^n \quad e \\ &z^{1-c} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(a-c+1+n)\Gamma(b-c+1+n)}{\Gamma(2-c+n)n!} z^n\end{aligned}$$

(convergência  $|z| < 1$ )

Definimos a função hypergeométrica  $F(a, b, c)$  pela equação

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}F(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}; \quad |z| < 1$$

As soluções acima tem a forma

$$F(a, b, c, z) \text{ e } z^{1-c}F(1+a-c, 1+b-c, 2-c, z)$$

### D.2 A equação de Bessel

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)w = 0$$

$z = 0$  singularidade regular; expoentes  $\pm \frac{\nu}{2}$  (equação inicial  $\alpha^2 - \frac{\nu^2}{4}$ )

$$w = z\alpha \sum_{r=0}^{\infty} c_r z^r$$

coeficientes determinados por

$$((\alpha + r)^2 - \frac{1}{4}\nu^2)c_r + c_{r-1} = 0$$

No caso que  $\alpha = \frac{\nu}{2}$

$$(\nu + r)rc_r + c_{r-1} = 0, \quad r \geq 2$$

$$c_r = \frac{A(-1)^r}{r!\Gamma(\nu + r + 1)}$$

$$w = Az^{\frac{\nu}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-z)^{2r}}{r!\Gamma(\nu + r + 1)}$$

converge  $|z| \leq R, \quad \forall R$

Defina a função de Bessel do primeiro tipo de ordem  $\nu$  por

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{z}{2}\right)^{2r}}{r!\Gamma(\nu + r + 1)}$$

$\left(\frac{z}{2}\right)^\nu = \exp(\nu \log \frac{z}{2})$  e  $\log \frac{z}{2}$  tem valor principal.

Se  $\nu \neq$ inteiro  $J_\nu(z)$  e  $J_{-\nu}(z)$  são soluções linearmente independentes da equação de Bessel.

No caso que  $\nu =$ inteiro, precisamos introduzir outra solução linearmente independente  $Y_n$  definida via

$$Y_n(x) = \lim_{\mu \rightarrow n} \frac{\cos \mu\pi J_\mu(z) - J_{-\mu}(z)}{\sin \nu\pi}$$

Agora seguimos discutindo a ortogonalidade para determinadas funções de Bessel. A equação de Bessel  $J_n(\mu)$  tem zeros reais  $\mu_{ni}$ ,

$$J_n(\mu_{ni}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

$\mu_{nm} \neq \mu_{nm'}$ , se  $m \neq m'$ . Um cálculo elementar utilizando a equação de Bessel vai demonstrar que

$$\int_0^a J_n\left(\frac{\mu_{nm_1}r}{a}\right) J_n\left(\frac{\mu_{nm_2}r}{a}\right) r dr = 0$$

(um resultado devido a Lammell).

De fato

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dJ_n\left(\frac{\mu_{nm_i}r}{a}\right)}{dr} \right) + \left( \left(\frac{\mu_{nm_i}r}{a}\right)^2 r - \frac{n^2}{r} \right) J_n\left(\frac{\mu_{nm_i}r}{a}\right) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} & \int_0^a \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \left( J_n\left(\frac{\mu_{nm_1}r}{a}\right) \right) \right) J_n\left(\frac{\mu_{nm_2}r}{a}\right) dr - \\ & - \int_0^a \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \left( J_n\left(\frac{\mu_{nm_2}r}{a}\right) \right) \right) J_n\left(\frac{\mu_{nm_1}r}{a}\right) dr \\ & = \frac{((\mu_{nm_1})^2 - (\mu_{nm_2})^2)}{a^2} \int_0^a r J_n\left(\frac{\mu_{nm_1}r}{a}\right) J_n\left(\frac{\mu_{nm_2}r}{a}\right) dr. \end{aligned}$$

Mas o primeiro termo é zero e  $\mu_{nm_1} \neq \mu_{nm_2}$  implica o resultado.

Coloque  $\lambda_1 = \frac{\mu_{nm}}{a}$  e considere as duas funções

$$R_1(r) = J_n(\lambda_1 r) \quad \text{e} \quad R_2(r) = J_n(\lambda r).$$

Estas funções satisfazem as equações

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR_1}{dr} \right) + \left( \lambda_1^2 r - \frac{n^2}{r} \right) R_1 &= 0 \quad R_1(a) = 0 \\ \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR_2}{dr} \right) + \left( \lambda^2 r - \frac{n^2}{r} \right) R_2 &= 0. \end{aligned}$$

Integrando

$$(\lambda_1^2 - \lambda^2) \int_0^a r R_1(r) R_2(r) dr + [r R_2 R_1' - R_1 R_2']_0^a = 0$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \int_0^a R_1 R_2 r dr &= - \frac{a J_n(\lambda a) \lambda_1 J_n'(\lambda_1 a) - a J_n(\lambda_1 a) \lambda J_n'(\lambda r)}{\lambda_1^2 - \lambda^2} \\ &= - \frac{a J_n(\lambda a) \lambda_1 J_n'(\lambda_1 a)}{\lambda_1^2 - \lambda^2}. \end{aligned}$$

Fazemos  $\lambda \rightarrow \lambda_1$ , obtemos que

$$\begin{aligned} \int_0^a R_1^2 r dr &= \frac{a^2}{2} J_n'(\lambda_1 a)^2 \\ &= \frac{a^2}{2} J_n'(\mu_{nm})^2. \end{aligned}$$

Em particular  $J_0 \left( \frac{\mu_{0m} r}{a} \right)$  satisfaz

$$\int_0^a J_0 \left( \frac{\mu_{0m} r}{a} \right)^2 r dr = \frac{a^2}{2} J_1(\mu_{0m})^2$$

dado que

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} \right) = - \frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}$$

implica em  $J_0'(\mu_{0m}) = -J_1(\mu_{0m})$ .

## Exercícios

1. Defina

$$\Delta(f, g) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}.$$

Mostre que a condição que  $f$  e  $g$  são linearmente independente é que  $\Delta(f, g) \neq 0$ .

2. Mostre que se  $\omega_0(x)$ ,  $\omega_1(x)$  são duas soluções de

$$\omega'' + p(x)\omega' + q(x)\omega = 0,$$

então

$$\frac{d}{dx}\Delta(\omega_0, \omega_1) + p(x)\Delta(\omega_0, \omega_1) = 0$$

ou seja,

$$\Delta(\omega_0, \omega_1) = c \exp\left(-\int p(x)dx\right)$$

3. Mostre que

$$\Delta(J_\nu(x), J_{-\nu}(x)) = -\frac{2 \sin \nu\pi}{\nu x}$$

[Dica: Utilize o exercício 2.]

Observe que para  $x$  pequeno

$$J_\nu(x) = \frac{(\frac{1}{2}x)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}(1 + O(x^2))$$

$$J_{-\nu}(x) = \frac{(\frac{1}{2}x)^{\nu-1}}{2\Gamma(\nu)}(1 + O(x^2))$$

e

$$\begin{aligned} \Delta(J_\nu, J_{-\nu}) &= (J_\nu(x)J'_{-\nu}(x) - J'_\nu(x)J_{-\nu}(x)) \\ &= \left(\frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)} - \frac{1}{\Gamma(1-\nu)\Gamma(\nu)}\right) \left(\frac{1}{x} + O(x^2)\right). \end{aligned}$$

Segue-se que

$$\Delta(J_\nu, J_{-\nu}) = -\frac{2 \sin \nu\pi}{\nu x}$$

e que  $J_\nu$  e  $J_{-\nu}$  são linearmente independentes se  $\nu \neq$  inteiro.

### D.3 Polinômios de Legendre

É fácil confirmar fazendo a substituição  $z = \frac{1}{\xi}$  que  $z = \infty$  é um ponto singular regular da equação de Legendre

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2} - 2z\frac{dw}{dz} + n(n+1)w = 0$$

com expoentes  $n+1$  e  $-n$ . Tentando a solução

$$w = z^{-c}(a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots)$$

a solução de expoente  $-n$  é

$$\begin{aligned} w &= Az^n \left(1 - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}z^{-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}z^{-4}\right) \\ &\quad + Bz^{-n-1} \left(1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}z^{-2} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.4.(2n+3)(2n+5)}\right) \\ &= Aw_1 + Bw_2 \end{aligned}$$

A primeira solução é um polinômio de grau  $n$ . Tomando  $A = \frac{2n!}{2^n(n!)^2}$  a solução toma a forma

$$P_n(z) = \sum_{r=0}^p \frac{(-1)^r (2n-2r)!}{2^n r! (n-r)! (n-2r)!} z^{n-2r}$$

onde  $p = \frac{n}{2}$  ou  $\frac{1}{2}(n-1)$  dado que  $n$  é par ou ímpar. Por exemplo

$$\begin{aligned} P_0(z) &= 1 \\ P_1(z) &= z \\ P_2(z) &= \frac{1}{2}(3z^2 - 1) \\ P_3(z) &= \frac{1}{2}(5z^3 - 3z) \\ P_n(z) &= \sum_{r=0}^p \frac{(-1)^r}{z^n r! (n-r)!} \frac{d^n}{dz^n} (z^{2n-2r}) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} \sum_{r=0}^p \frac{(-1)^r n!}{r! (n-r)!} z^{2n-2r} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n \quad (\text{A formula de Rodrigues}) \end{aligned}$$

Utilizando a formula de Cauchy segue-se que

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(t^2 - 1)^n dt}{2^n (t-z)^{(n+1)}} \quad (\text{A formula de Schlafli})$$

$C$  contorno contendo o ponto  $t = z$

### Referências Bibliográficas

Webster, A. G., *Partial differential equations of mathematical physics*. 2nd ed. New York: Dover, 1955.

# Apêndice E

## Polinômios Ortogonais

Vamos começar com alguns conceitos gerais. Definimos

$$(f, g) = \int_I fg dx, \quad I \subseteq \mathbb{R}' \text{ (ou } \mathbb{R}^n)$$

(produto interno).

É fácil mostrar que

$$(f, g)^2 \leq (f, f)(g, g) \quad (\text{Schwarz})$$

considere  $0 \leq \int (\lambda f + g)^2 dx = \lambda^2(f, f) + 2\lambda(f, g) + (g, g) \Rightarrow$  o resultado.

Defina

$$\|f\|^2 = (f, f)$$

No caso que  $(f, g) = 0$  dizemos que  $f$  e  $g$  são **ortogonais**. Um sistema  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  de funções tais que  $(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$  chamamos **ortogonal**

**Exemplo:**  $I = [0, 2\pi]$  e considere

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sen x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sen 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

Para funções com valores complexos modificamos a definição de  $(f, g)$  acima para  $(f, g) = \int_I f \bar{g} dx$ . A definição de dependência linear fica mesma. Temos a idéia de ortogonalização de Gram-Schmidt utilizando o axioma de escolha.

### E.1 A desigualdade de Bessel

Defina os coeficientes de Fourier

$$c_m = (f, \varphi_m), \quad m = 1, 2, \dots$$

claramente

$$\|f - \sum_{m=1}^n c_m \varphi_m\|^2 \geq 0$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|f\|^2 - 2 \sum_{m=1}^n c_m \int f \varphi_m dx + \sum_{m=1}^n c_m^2 \\
&= \|f\|^2 - 2 \sum_{m=1}^n c_m^2 + \sum_{m=1}^n c_m^2 \\
\text{ou} \quad &\sum_{m=1}^n c_m^2 \leq \|f\|^2
\end{aligned}$$

tomando o limite  $m \rightarrow \infty$

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 \leq \|f\|^2$$

De fato  $\sum_{m=1}^n c_m \varphi_m$  da a melhor aproximação com combinações com  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  (linear).

$$\|f - \sum_{m=1}^n y_m \varphi_m\|^2 = \|f\|^2 + \sum_{m=1}^n (y_m - c_m)^2 - \sum_{m=1}^n c_m^2$$

que tem um mínimo com  $y_m = c_m \quad m = 1, 2, \dots, n$ .

No caso que

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 = \|f\|^2 \quad \forall f \in L^2$$

dizemos que  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  formam um sistema **completo**.

### O teorema de Weierstrass

Se  $f \in C^0[a, b]$ ,  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}^1$ , então  $f$  pode ser uniformemente aproximado por polinômios.

## E.2 Polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre  $P_n(x)$  satisfazem a equação ( $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}$ )

$$((x^2 - 1)y')' - n(n + 1)y = 0$$

[ou são autofunções de operador  $-((x^2 - 1)y')'$  com autovalor  $n(n + 1)$ ]. Também sabemos a relação de recorrência

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1 - 2ux + u^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) u^n \quad \text{e} \\
\frac{1}{\sqrt{1 - 2ux + u^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - 2xv + v^2}} &= \sum_{n,m=0}^{\infty} P_n(x) P_m(x) u^n v^m
\end{aligned}$$

e integrando com respeito  $u$  em  $(-1, 1)$

$$\frac{1}{\sqrt{uv}} \log \frac{1 + \sqrt{uw}}{1 - \sqrt{uw}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n + 1} u^n v^n$$

que implica

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & n = m \end{cases}$$

Segue-se que

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{2n+1}} P_n(x) \right\}_{n=0}^{\infty}$$

é um sistema ortonormal com respeito  $L^2(-1, 1)$ .

Aplicando Weierstrass  $\forall \epsilon > 0, \forall t \in C^0[-1, 1], \exists \sum_{m=0}^n a_m x^m$  tal que

$$\left\| f - \sum_{m=0}^n a_m x^m \right\| < \epsilon$$

Mas  $\sum_{m=0}^n a_m x^m = \sum_{m=0}^n y_m P_m(x)$  com  $y_m = \sum_{m=0}^n a_m (x^m, P_m)$ , e aplicando o resultado sobre melhor aproximação

$$\left\| f - \sum_{m=0}^{\infty} (f, P_m) P_m \right\| < \epsilon$$

Isto sendo verdade para cada  $f \in C^0[-1, 1] \Rightarrow$  que sistema é completo a  $L^2[-1, 1]$ .

### E.3 Os Polinômios de Hermite

Os Polinômios de Hermite  $H_n(x)$  são os polinômios ortogonais no espaço  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 e^{-x^2} dx < \infty$ . Introduzindo a função de geração

$$\psi = e^{-t^2+2tx} = e^{x^2} e^{-(t-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

Segue-se que

$$H_n(x) = \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} \Big|_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$$

$H_n(x)$  satisfaz

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \quad \text{ou} \\ -(H_n'' - 2xH_n') = 2nH_n$$

$H_n$  são as autofunções do operador  $L = -\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx}$  com autovalores  $2n$  em  $L^2(-\infty, \infty)$ . É possível mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm} \quad \text{e} \\ \frac{H_m(x) e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2^m m!} \sqrt{\pi}} \quad \text{são ortogonais em } \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dx < \infty$$

### E.4 Os Polinômios de Laguerre

Definimos

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

Observamos que

$$\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} t^n = \psi$$

São as autofunções do operador  $-(x \frac{d^2}{dx^2} + (1-x) \frac{d}{dx})$  com autovalores  $n$ .

É possível mostrar que

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = (n!)^2 \delta_{nm} \quad e$$

$$\phi_\nu = \frac{e^{-\frac{x}{2}} L_\nu(x)}{\nu!} \text{ são ortogonais em } \int_0^\infty |f|^2 dx < \infty$$

Vamos mostrar que o sistema de funciones de Laguerre é completo. Observamos que

$$g = \frac{1}{1-t} e^{-\frac{1}{2} \frac{1+t}{1-t} x} = \sum_{n=0}^\infty t^n \varphi_n(x)$$

$$\varphi_n = e^{-\frac{x}{2}} \frac{L_n(x)}{n!}$$

$$\int_0^\infty (g(x, t) - \sum_0^N t^n \varphi_n(x))^2 dx = \frac{1}{1-t^2} - \sum_0^N t^{2n} \rightarrow 0 \text{ com } N \rightarrow \infty \text{ para } |\phi| < 1$$

$$\left[ \int_0^\infty g^2(x, t) dx = \frac{1}{1-t^2} \quad e \quad \int_0^\infty g(x, t) \varphi_n(x) dx = t^n \right]$$

$\alpha = \frac{1}{2} \frac{1+t}{1-t}$  toma todos os valores em  $(0, \infty)$  com  $t$  em  $(-1, 1)$ . Segue-se que funções do tipo  $e^{-\alpha x}$  podem ser aproximadas em  $0 \leq x < \infty$  por polinômios de Laguerre, pondo  $e^{-x} = \xi$ ,  $f(x) \rightarrow k(\xi)$  tal que  $\frac{k(\xi)}{\sqrt{\xi}} \in L^2(0, 1)$ ,  $k(\xi)$  pode ser aproximado por polinômios  $h_n(\xi) = a_0 + a_1 \xi + \dots + a_n \xi^n$  em  $L^2(0, 1)$  e  $f(x)$  pode ser aproximado por  $\sqrt{\xi} h(\xi) = e^{-\frac{x}{2}} (a_0 + a_1 e^{-x} + \dots + a_n e^{-nx})$  e conseqüentemente por combinações lineares de funções de Laguerre. Isto é suficiente para mostrar o resultado.

Para polinômios de Hermite escreva  $f = f_1 + f_2$ ,  $f_1$  par,  $f_2$  ímpar e faça a substituição  $x = u^2$  para cada destas funções reduzindo o problema ao problema para funções de Laguerre.

### Referências Bibliográficas

Copson, E. T., *An Introduction to the Theory of Functions of a complex variables*, Oxford, 1955.

Courant, R., Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics Interscience*, New York, 1953.

Webster, A. G., *Partial differential equations of mathematical physics*. 2nd ed. New York: Dover, 1955.

# Apêndice F

## Noções Algébricas: Frações Parciais

Discutimos alguns conceitos de álgebra. Para maiores detalhes o leitor deverá consultar textos tais como J. W. Archbold, *Algebra*, Pitman, 1958, § 8.2,5.2 ou J. E. Littlewood, *A University Algebra*, Heinemann, 1958, p 154.

Considere polinômios de grau  $\geq 1$ ,  $a(x)$  com coeficientes reais. Se  $a(x) = b(x)c(x)$ ,  $b$ ,  $c$  polinômios reais com grau  $\geq 1$ , dizemos que  $a$  é redutível em  $\mathbb{R}$  e  $b$  e  $c$  são fatores ou divisores de  $a$ . Se  $a = bc$  implica que  $b$  ou  $c$  é constante,  $a$  é chamado irredutível ou primo.

**Proposição 13.** *Cada polinômio real de grau  $\geq 1$  pode ser expresso como um produto finito de fatores lineares e fatores quadráticos reais primos. Dizemos que  $a(x)$  e  $b(x)$  são co-primos se não existe um fator comum deles.*

**Proposição 14.** *Se  $a(x)$ ,  $b(x)$  são polinômios reais co-primos de grau  $m$  e  $n \geq 1$ , cada polinômio  $f(x)$  real de grau  $< m + n$  tem uma representação na forma*

$$f = Ba + Ab,$$

onde  $A$  e  $B$  são polinômios de grau  $< n$  e  $m$  respectivamente.

O último resultado embasa o método de frações parciais.

Se  $a$  e  $b$  são polinômios reais co-primos de grau  $m, n \geq 1$  e  $f$  é um polinômio real de grau  $< m + n$ , então a função racional  $\frac{f}{ab}$  tem uma representação única na forma

$$\frac{f}{ab} = \frac{A}{a} + \frac{B}{b}.$$

Pela proposição 14

$$f = Ba + Ab$$

e por divisão

$$\frac{f}{ab} = \frac{A}{a} + \frac{B}{b}.$$

No caso que  $f$  tem grau  $\geq m + n$ , divida para obter

$$f = abq + r, \quad \text{grau } r < m + n$$

e, assim,

$$\frac{f}{ab} = q + \frac{r}{ab} = q + \frac{A}{a} + \frac{B}{b}.$$

pelo resultado acima.

Suponha agora que um dos fatores acima,  $b$ , é redutível, ou  $b = cd$  e  $c$  e  $d$  são co-primos. Aplicando o resultado acima de novo obtemos que

$$\frac{B}{b} = \frac{C}{c} + \frac{D}{d}$$

e continuamos o processo.

Se  $a_1, \dots, a_r$  são co-primos de grau  $n_1, \dots, n_r$  e  $f$  de grau  $n$ , existe uma representação

$$\frac{f}{a_1 \cdots a_r} = q + \frac{A_1}{a_1} + \cdots + \frac{A_r}{a_r}.$$

Suponha que  $q_1 = a^k$ ,  $a$  com grau  $\mu$ ,  $n_1 = k\mu$ , grau  $A_1 < k\mu$ . Por divisão obtemos

$$A_1 = a^{k-1}q_1 + r_1,$$

$q_1, r_1$  polinômios reais com grau  $q_1 < \mu$  e grau  $r_1 < (k-1)\mu$ .

Similarmente,  $r_1 = a^{k-2}q_2 + r_2$ , grau  $r_2 < (k-2)\mu$  e, continuando,

$$\begin{aligned} r_2 &= a^{k-3}q_3 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{k-2} &= aq_{k-1} + r_{k-1} \\ r_{k-1} &= 1 \cdot q_k, \quad \text{grau de cada } q < \mu. \end{aligned}$$

Por adição obtemos

$$A_1 = a^{k-1}q_1 + a^{k-2}q_2 + \cdots + aq_{k-1} + q_k$$

e segue que

$$\frac{A_1}{a^k} = \frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{a^2} + \cdots + \frac{q_k}{a^k}, \quad \text{com grau } q_i < \mu.$$

Combinando todos estes resultados chegamos ao resultado final que deverá ser lembrado:

Suponha que temos

$$\frac{f}{\phi}, \quad \text{grau } f < \text{grau } \phi \text{ e } \phi = Q^k L^s,$$

onde  $Q$  um polinômio real quadrático irredutível e  $L$  um polinômio real linear. Pela regra acima

$$\frac{f}{\phi} = \frac{a_1}{L} + \frac{a_2}{L^2} + \cdots + \frac{a_s}{L^s} + \frac{e_1x + f_1}{Q} + \cdots + \frac{e_kx + f_k}{Q^k}.$$

No texto utilizamos este resultado na avaliação de integrais, chamado o método de frações parciais.

# Apêndice G

## Tabelas de Transformadas

Para conveniência do leitor incluímos uma lista de transformadas elementares. Maiores informações poderiam ser obtidos nos livros de Bateman (Bateman Harry, *Higher transcendental functions*, 3V., McGraw-Hill, New York, 1953-1955.) e Magnus (Magnus, W., Oberhettinger F., Soni, R.P., *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, 3 Ed., Springer-Verlag, Berlin, 1966.).

## G.1 Transformadas de Fourier

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-i\xi x} d\xi$	$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx$
$f(x)$	$F(\xi)$
$\frac{\sin(ax)}{x}$	$\begin{cases} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} & \xi < a \\ 0 & \xi > a \end{cases}$
$\begin{cases} e^{i\omega x} & p < x < q \\ 0 & x < p, x > q \end{cases}$	$\frac{i}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{ip(\omega+\xi)} - e^{iq(\omega+\xi)}}{\xi}$
$\begin{cases} e^{-cx+i\omega x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$	$\frac{i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(\omega + \xi + ic)}$
$e^{-px^2} \quad R(p) > 0$	$(2p)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4p}}$
$\cos(px^2)$	$(2p)^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\xi^2}{4p} - \frac{1}{4}\pi\right)$
$\sin(px^2)$	$(2p)^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\xi^2}{4p} + \frac{1}{4}\pi\right)$
$ x ^{-s} \quad 0 < R(s) < 1$	$\frac{2^{\frac{1}{2}} \Gamma(1-s) \sin\left(\frac{1}{2}s\pi\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}  \xi ^{1-s}}$
$\frac{1}{ x }$	$\frac{1}{ \xi }$
$\frac{e^{-a x }}{ x ^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{[(a^2 + \xi^2)^{\frac{1}{2}} + a]^{\frac{1}{2}}}{(a^2 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}}$
$\frac{\cosh(ax)}{\cosh(\pi x)} \quad -\pi < a < \pi$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\cos\left(\frac{1}{2}a\right) \cosh\left(\frac{1}{2}\xi\right)}{\cosh \xi + \cos a}$
$\frac{\sinh(ax)}{\sinh(\pi x)} \quad -\pi < a < \pi$	$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sin a}{\cosh \xi + \cos a}$
$\begin{cases} (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} &  x  < a \\ 0 &  x  > a \end{cases}$	$\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{\frac{1}{2}} J_0(a\xi)$
$\frac{\sin[b(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}]}{(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}$	$\begin{cases} 0 &  \xi  > b \\ \left(\frac{1}{2}\pi\right)^{\frac{1}{2}} J_0(a\sqrt{b^2 - \xi^2}) &  \xi  < b \end{cases}$
$\begin{cases} P_n(x) &  x  < 1 \\ 0 &  x  > 1 \end{cases}$	$i^n \pi^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\xi)$
$\begin{cases} \frac{\cos(b\sqrt{a^2 - x^2})}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} &  x  < a \\ 0 &  x  > a \end{cases}$	$\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{\frac{1}{2}} J_0(a\sqrt{\xi^2 + b^2})$
$\begin{cases} \frac{\cosh(b\sqrt{a^2 - x^2})}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} &  x  < a \\ 0 &  x  > a \end{cases}$	$\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{\frac{1}{2}} J_0(a\sqrt{\xi^2 - b^2})$

## G.2 Transformadas Cosseno

$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_C(\xi) \cos(\xi x) d\xi$	$F_C(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos(\xi x) dx$
$f(x)$	$F_C(\xi)$
$\begin{matrix} 1 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{matrix}$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(\xi a)}{\xi}$
$x^{p-1} \quad 0 < p < 1$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma(p) \xi^{-p} \sin\left(\frac{1}{2} p \pi\right)$
$\begin{matrix} \cos(x) & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{matrix}$	$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\sin[a(1-\xi)]}{1-\xi} + \frac{\sin[a(1+\xi)]}{1+\xi} \right\}$
$e^x$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+\xi^2}$
$\operatorname{sech}(x)$	$\frac{1}{1+\xi^2}$
$e^{-x^2}$	$e^{-\xi^2}$
$\cos\left(\frac{1}{2}x^2\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \cos\left(\frac{1}{2}\xi^2\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\xi^2\right) \right]$
$\sin\left(\frac{1}{2}x^2\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \cos\left(\frac{1}{2}\xi^2\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\xi^2\right) \right]$
$\begin{matrix} (1-x^2)^\nu & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1, \end{matrix} \quad \nu > -\frac{3}{2}$	$2^\nu \Gamma(\nu+1) \xi^{-\nu-\frac{1}{2}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(\xi)$

### G.3 Transformadas Seno

$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_S(\xi) \sin(\xi x) d\xi$	$F_S(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin(\xi x) dx$
$f(x)$	$F_S(\xi)$
$e^{-x}$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 + \xi^2}$
$x e^{-\frac{1}{2}x^2}$	$e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$
$\frac{\sin(x)}{x}$	$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \log \left  \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right $
$x(1 - x^2)^\nu \quad 0 < x < 1, \quad \nu > -1$ $0 \quad x > 1$	$2^\nu \Gamma(\nu + 1) \xi^{-\frac{1}{2} - \nu} J_{\nu + \frac{3}{2}}(\xi)$
$x^{p-1} \quad 0 < p < 1$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma(p) \sin\left(\frac{1}{2}p\pi\right) \xi^{-p}$
$x^n e^{-px}$	$\frac{2^{n+\frac{1}{2}} p^n n! \xi}{\pi^{\frac{1}{2}} (p^2 + \xi^2)^{n+1}}$
$\cos(ax^2)$	$-a^{-\frac{1}{2}} \left[ \cos\left(\frac{\xi^2}{4a}\right) S\left(\frac{\xi}{\sqrt{2\pi a}}\right) - \sin\left(\frac{\xi^2}{4a}\right) C\left(\frac{\xi}{\sqrt{2\pi a}}\right) \right]$
$x^{-\frac{1}{2}} e^{ax^{-\frac{1}{2}}}$	$\xi^{-\frac{1}{2}} [\cos(2a\xi)^{\frac{1}{2}} - \sin(2a\xi)^{\frac{1}{2}}]$
$0 \quad 0 < x < a$ $(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} \quad x > a$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} J_0(a\xi)$

## G.4 Transformadas de Laplace

$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \phi(p)e^{pt} dp$	$\phi(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt$
$f(t)$	$\phi(p)$
$t^n$	$\Gamma(n+1)p^{-n-1}$
$t^n e^{-qt}$	$\Gamma(n+1)(p+q)^{-n-1}$
$\cos(at)$	$\frac{p}{(p^2+a^2)}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{(p^2+a^2)}$
$t \cos(at)$	$\frac{(p^2-a^2)}{(p^2+a^2)}$
$t \sin(at)$	$\frac{2ap}{(p^2+a^2)}$
$t^{-\frac{1}{2}} \cos(2at^{\frac{1}{2}})$	$\left(\frac{\pi}{p}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{a^2}{p}}$
$\sin(2at^{\frac{1}{2}})$	$a \left(\frac{\pi}{p^3}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{a^2}{p}}$
$t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{a}{t}} \quad \arg(a) < \frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{p}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-2(ap)^{\frac{1}{2}}}$
$J_\nu(at) \quad R(\nu) > -1$	$\frac{1}{r} \left(\frac{a}{p+r}\right)^\nu \quad r = (a^2+p^2)^{\frac{1}{2}}$
$t^\nu J_\nu(at) \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}$	$\pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) (2a)^\nu (p^2+a^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}$

## G.5 Transformadas de Mellin

$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)x^{-s} ds$	$F(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1} dx$
$f(x)$	$F(s)$
$e^{-px}$	$p^{-s}\Gamma(s) \quad R(s) > 0$
$x^{\frac{1}{2}}J_\nu(x)$	$\frac{2^{s-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}s + \frac{3}{4}\right)}$
$e^{-x^2}$	$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)$
$\sin(x)$	$\Gamma(s) \sin\left(\frac{1}{2}s\pi\right)$
$\cos(x)$	$\Gamma(s) \cos\left(\frac{1}{2}s\pi\right)$
$\cos(x)J_\nu(x) \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}$	$\frac{2^{s-1}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}s\right)}$
$\sin(x)J_\nu(x) \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}$	$\frac{2^{s-1}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}s\right)}$
$(1+x)^{-1}$	$\pi \operatorname{cosec}(\pi s)$
$(1+x)^{-p} \quad R(p) > 0$	$\frac{\Gamma(s)\Gamma(p-s)}{\Gamma(p)}$
$(1+x^2)^{-1}$	$\frac{1}{2}\pi \operatorname{cosec}\left(\frac{1}{2}\pi s\right)$
$\begin{matrix} 1 & 0 \leq x \leq a \\ 0 & x > a \end{matrix}$	$\frac{a^s}{s}$
$\begin{matrix} (1-x)^{p-1} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x > 1, \quad R(p) > 0 \end{matrix}$	$\frac{\Gamma(s)\Gamma(p)}{\Gamma(s+p)}$
$\begin{matrix} 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^{-p} & x > 1, \quad 0 < R(p) < 1 \end{matrix}$	$\frac{\Gamma(p-s)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-s)}$
$\ln(1+x)$	$\frac{\pi}{s} \operatorname{cosec}(s\pi)$
${}_2F_1(a, b; c; -x) \quad R(a, b) > 0$	$\frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)\Gamma(c)}{\Gamma(c-s)\Gamma(a)\Gamma(b)}$
$J_\nu(ax)e^{-p^2x^2}$	$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}s\right)\left(\frac{a}{2p}\right)^\nu}{{}_2p^s\Gamma(1+s)} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}s; \nu + 1; \frac{-a^2}{p^2}\right)$
$J_\nu(ax)e^{-px}$	$\frac{\Gamma(s+\nu)\left(\frac{a}{2p}\right)^\nu}{{}_p^s\Gamma(1+\nu)} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}\nu; \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}; \nu + 1; \frac{-a^2}{p^2}\right)$
$Ci(x)$	$s^{-1}\Gamma(s) \cos\left(\frac{1}{2}s\pi\right)$
$Si(x) - \frac{1}{2}\pi$	$s^{-1}\Gamma(s) \sin\left(\frac{1}{2}s\pi\right)$
$\frac{1}{2}\pi - \tan^{-1}(x)$	$\frac{1}{2}\pi s^{-1} \sec\left(\frac{1}{2}s\right)$

## G.6 Transformadas de Hankel

$f(x) = \int_0^\infty \xi \bar{f}(\xi) J_\nu(\xi x) d\xi$		$F(s) = \int_0^\infty x f(x) J_\nu(\xi x) dx$
$f(x)$	$\nu$	$f(\xi)$
$x^\nu \quad 0 < x < a$ $0 \quad x > a$	$> -1$	$\frac{a^{\nu+1}}{\xi} J_{\nu+1}(\xi a)$
$1 \quad 0 < x < a$ $0 \quad x > a$	$0$	$\frac{a}{\xi} J_1(\xi a)$
$(a^2 - x^2) \quad 0 < x < a$ $0 \quad x > a$	$0$	$\frac{4a}{\xi^3} J_1(\xi a) - \frac{2a^2}{\xi^2} J_0(\xi a)$
$x^{\mu-2} e^{-px^2}$	$> -1$	$\frac{\xi^\nu \Gamma(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu)}{2^{\nu+1} p^{\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu} \Gamma(1 + \nu)} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu; \nu + 1; -\frac{\xi^2}{4p}\right)$
$x^\nu e^{-px^2}$	$> -1$	$\frac{\xi}{(2p)^{\nu+1}} e^{-\frac{\xi^2}{4p}}$
$x^{\mu-1} e^{-px}$	$> -1$	$\frac{2^\mu \xi^\nu \Gamma(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}) \Gamma(1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu)}{(\xi^2 + p^2)^{\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}} \Gamma(\nu + 1) \Gamma(\frac{1}{2})} \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu; 1 + \nu; \frac{\xi^2}{\xi^2 + p^2}\right)$
$x^{\mu-1}$	$> -1$	$\frac{2^\mu \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu)}{\xi^{\mu+1} \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu)}$
$\frac{e^{-px}}{x}$	$0$	$(\xi^2 + p^2)^{-\frac{1}{2}}$
$\frac{x}{e^{-px}}$	$0$	$p(\xi^2 + p^2)^{-\frac{3}{2}}$
$x^{-2} e^{-px}$	$1$	$\frac{(\xi^2 + p^2)^{-\frac{1}{2}} - p}{\xi}$
$\frac{e^{-px}}{x}$	$1$	$\frac{1}{\xi} - \frac{p}{\xi(\xi^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}}$
$\frac{e^{-px}}{x}$	$1$	$\xi(\xi^2 + p^2)^{-\frac{3}{2}}$
$\frac{a}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$	$0$	$e^{-a\xi}$
$\frac{\sin(ax)}{x}$	$0$	$0 \quad \xi > a$ $(a^2 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} \quad 0 < \xi < a$
$\frac{\sin(ax)}{x}$	$1$	$\frac{1}{\xi(\xi^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \xi > a$ $0 \quad \xi < a$
$\frac{\sin(x)}{x^2}$	$0$	$\sin^{-1}\left(\frac{1}{\xi}\right) \quad \xi > 1$ $\frac{1}{2}\pi \quad \xi < 1$

## G.7 Transformadas Cosseno Fourier Finita

$f(x) = \frac{1}{a}\bar{f}_c(0) + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{f}_c(n)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$	$\bar{f}_c(n) = \int_0^a f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$
$f(x)$	$\bar{f}_c(n)$
1	$a \quad n = 0$ $0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$
$1 \quad 0 < x < \frac{1}{2}a$ $-1 \quad \frac{1}{2}a < x < a$	$0 \quad n = 0$ $\frac{2a}{\pi n}\sin\left(\frac{1}{2}n\pi\right) \quad n = 1, 2, \dots$
$x$	$\frac{1}{2}a^2 \quad n = 0$ $\left(\frac{a}{\pi n}\right)^2 [(-1)^n - 1] \quad n = 1, 2, \dots$
$x^2$	$\frac{1}{3}a^3 \quad n = 0$ $\frac{2a^3}{\pi^2 n^2}(-1)^n \quad n = 1, 2, \dots$
$\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2$	$\frac{1}{3}a \quad n = 0$ $\frac{2a}{\pi^2 n^2} \quad n = 1, 2, \dots$
$x^3$	$\frac{1}{4}a^4 \quad n = 0$ $\frac{3a^4(-1)^n}{\pi^2 n^2} + \frac{6a^4}{\pi^4 n^4} [(-1)^n - 1] \quad n = 1, 2, \dots$
$e^{kx}$	$\frac{a^2 k}{k^2 a^2 + n^2 \pi^2} [(-1)^n e^{kn} - 1]$
$\frac{\cosh[c(a-x)]}{\sinh(ca)}$	$\frac{a^2 c}{c^2 a^2 + n^2 \pi^2}$
$\sin(kx)$	$\frac{a^2 k}{n^2 \pi^2 - a^2 k^2} [(-1)^n \cos(ka) - 1] \quad n \neq \frac{ka}{\pi}$
$\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad m \text{ inteiro}$	$0 \quad n = m$ $\frac{ma}{\pi(n^2 - m^2)} [(-1)^{n+m} - 1] \quad n \neq m$

## G.8 Transformadas Seno Fourier Finita

$f(x) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_s(n) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$	$\bar{f}_s(n) = \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$
$f(x)$	$\bar{f}_s(n)$
1	$\frac{a}{\pi n} [1 + (-1)^{n+1}]$
$x$	$(-1)^{n+1} \frac{a^2}{\pi n}$
$1 - \frac{x}{a}$	$\frac{a}{\pi n}$
$x \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}a$ $a - x \quad \frac{1}{2}a \leq x \leq a$	$\frac{2a^2}{\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{1}{2}n\pi\right)$
$x^2$	$\frac{a^3(-1)^{n-1}}{\pi n} - \frac{2a^3[1 - (-1)^n]}{\pi^3 n^3}$
$x^3$	$(-1)^n \frac{a^4}{\pi^5} \left(\frac{6}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}\right)$
$x(a^2 - x^2)$	$(-1)^{n+1} \frac{6a^4}{\pi^3 n^3}$
$x(a - x)$	$\frac{2a^3}{\pi^3 n^3} [1 - (-1)^n]$
$e^{kx}$	$\frac{n\pi a}{n^2\pi^2 + k^2a^2} [1 - (-1)^n e^{ka}]$
$\cos(kx)$	$\frac{n\pi a}{n^2\pi^2 - k^2a^2} [1 - (-1)^n \cos(ka)] \quad n \neq \frac{ka}{\pi}$
$\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad m \text{ um inteiro}$	$\frac{n\pi a}{\pi(n^2 - m^2)} [1 - (-1)^{n+m}] \quad n \neq m$ 0 $n = m$
$\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad m \text{ um inteiro}$	0 $n \neq m$ $\frac{1}{2}a \quad n = m$

## G.9 Transformadas Hankel Finita

$$f(x) = \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_J(\xi_i) \frac{J_\mu(x\xi_i)}{|J'_\mu(a\xi_i)|^2} \quad \bar{f}_J(\xi_i) = \int_0^a x f(x) J_\mu(x\xi_i) dx$$

Quando a soma é tomada sobre todos os zeros positivos de  $J_\mu(a\xi_i)$

$f(x)$	$\mu$	$f_J(n)$
$x^\mu$	$> -1$	$\frac{a^{\mu+1}}{\xi_i} J_{\mu+1}(a\xi_i)$
$c$	0	$\frac{ac}{\xi_i} J_1(a\xi_i)$
$a^2 - x^2$	0	$\frac{4a}{\xi_i^3} J_1(a\xi_i)$
$\frac{J_\mu(\alpha x)}{J_\mu(\alpha a)}$	$> -1$	$\frac{\xi_i a}{\alpha^2 - \xi_i^2} J'_\mu(\xi_i a)$
$\frac{J_0(\alpha x)}{J_0(\alpha a)}$	0	$\frac{\xi_i a}{\alpha^2 - \xi_i^2} J_1(\xi_i a)$