MAT01064 – ÁLGEBRA I – 2012/1 LISTA DE EXERCÍCIOS 5

1. Determine quais das relações a seguir são funções:

1. $\{(x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$
2. $\{(x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} \mid y^2 = x^3\}$
3. $\{(x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} \mid y^2 = x\}$
4. $\{(x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} \mid y^2 = x \ \text{ e } \ x > y\}$

2. Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2\}$. Quantas funções $f : A \longrightarrow B$ existem? Em geral, se $|A| = m$ e $|B| = n$, quantas são as funções de A em B?

3. Das funções do exercício 1, quais são invertíveis?

4. Das funções de $A = \{a, b, c\}$ em $B = \{1, 2\}$, alguma pode ser invertível? Justifique.

5. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$. Determine

(i) $f \circ g,\ g \circ f,\ f \circ f,\ g \circ g,\ g \circ f \circ g$ $\qquad$ (ii) $\{x \in \mathbb{R} \mid (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)\}$.

6. Escreva as funções abaixo como compostas de funções elementares $\operatorname{sen} x$, $\ln x$, x^3, $\dfrac{1}{x}$, e^x, $\sqrt{x}$:

$f(x) = (\ln(x^3))^2$, $\qquad g(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x + 1}$, $\qquad h(x) = e^{\operatorname{sen}^2 x + 1}$

$k(x) = \sqrt{\ln(x + 1)^4}$

7. Determine as inversas das funções que forem invertíveis:

(i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$

(ii) $f : (-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x + 1)$

(iii) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$.

(iv) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$

(v) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 1$

(iv) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

8. Vamos primeiro introduzir uma notação. Se $X \subseteq A$, indicaremos por $C_A(X) = X' = \{x \in A \mid x \notin X\}$. Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função e seja $Y \subseteq B$. Prove que $f^{-1}(C_B Y) = C_A f^{-1}(Y)$.

9. Generalize o exercício anterior, mostre que se $f : A \longrightarrow B$ uma função e se X e Y são subconjuntos de B, então $f^{-1}(X \setminus Y) = f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y)$.

10. Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função. Prove que se X e Y são subconjuntos de A, então $f(X \setminus Y) \supseteq f(X) \setminus f(Y)$. Dê um exemplo que mostre que pode não valer a igualdade. Prove que se f é injetora então vale a igualdade.

11. Prove que uma função $f : A \longrightarrow B$ é sobrejetora se e somente se $f^{-1}(Y) \neq \emptyset, \ \forall Y \in (B)$.

12. Prove que uma função $f : A \longrightarrow B$ é sobrejetora se e somente se $f(f^{-1}(Y)) = Y$, $\forall Y \in \mathcal{P}(B)$.

13. Prove que uma função $f : A \longrightarrow B$ é injetora se e somente se $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$, $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A)$.

14. Justifique se é verdadeira ou falsa a afirmação "$f : A \longrightarrow B$ injetiva $\implies$ f sobrejetiva". Sugestão: Pense em conjuntos infinitos.

15. Ache as inversas das funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$(i)\ f(x) = 2x + 3, \qquad (ii)\ g(x) = x^3 - 2, \qquad (iii)\ h(x) = (x-2)^3.$$

16. Verifique que a função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(m, n) = 2^m(2n + 1)$ é bijetora.

17. Construa uma bijeção de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{N}$.

18. Construa uma bijeção de $(0, 1]$ em $\mathbb{R}$.

19. Construa uma função bijetora de $(0, 2)$ em $\mathbb{R}$.

20. Seja $f : A \to B$ uma função. Defina uma relação em A por $x \sim y \iff f(x) = f(y)$.

(a) Prove que $\sim$ é uma relação de equivalência.

(b) Defina $\pi : A \longrightarrow \dfrac{A}{\sim}$ por $\pi(x) = [x]$. Construa uma função $\pi : A \longrightarrow \dfrac{A}{\sim}$ tal que $g \circ \pi = f$. Prove que g é injetiva. Justifique que toda função pode ser decomposta na composição de uma função sobrejetora seguida de uma função injetora.

21. Sejam $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ as funções definidas por

$$f(n) = 2n, \qquad g(n) = \begin{cases} n/2\,, & \text{se } n \text{ é par} \\ (n-1)/2\,, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

(a) Calcule $g(n)$ para $n = 0, 1, 2, 34, 73$.

(b) Mostre que $g \circ f = I_{\mathbb{N}}$ e que $f \circ g \neq I_{\mathbb{N}}$.

(c) f é invertível?

(d) g é invertível?