

1 Equação de grau 3

1.1 Método de Hudde e Equações de Cardano

Agora vamos utilizar os números complexos para resolver a *equação geral de grau 3*. É uma equação da forma

$$Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0, \quad (1)$$

onde A, B, C, D são números reais; como estamos trabalhando num corpo, basta dividir por A , podemos supor que $A = 1$. De fato, escrevemos

$$B' := \frac{B}{A}, \quad C' := \frac{C}{A}, \quad D' := \frac{D}{A},$$

e obtemos uma equação da forma

$$y^3 + B'y^2 + C'y + D' = 0,$$

cujas soluções são exatamente aquelas da equação (1); então ficamos com a equação (1), mas com $A = 1$.

Como vimos, fazendo a mudança de variáveis da forma $y = x + h$ para $h = -\frac{B'}{3}$, a equação (1) se escreva em termos de x como

$$x^3 + ax + b = 0; \quad (2)$$

dizemos que a equação cúbica está escrita na *forma reduzida*. As soluções de (1) são obtidas a partir das soluções de (2) somando-se o valor de h .

Vamos agora encontrar as soluções da equação (2) utilizando um procedimento desenvolvido por Johannes Hudde (1628–1704) e conhecido como *Método de Hudde*. Cabe salientar que foi Scipione Dal Ferro (1465–1526) quem resolveu pela primeira vez a equação de grau três, mas não publicou seu trabalho. Outro matemático, Nicolás de Brescia, conhecido pelo pseudônimo de Tartaglia (1499–1557) também resolveu essa equação e tampouco publicou a solução. Sob a promessa de não divulgá-la, Tartaglia comunicou suas descobertas a Gerolamo Cardano (1501–1576), que o publicou em 1545 como sendo seu, em seu compêndio *Ars Magna*.

Na equação de grau 2, as soluções são obtidas como soma de dois números, que dependem dos coeficientes, cuja natureza pode ser diversa. É de esperar que no caso de grau 3 que, pelo menos em princípio, deveria ser mais complicado, muito possivelmente as soluções encontradas escrevam-se como soma de pelo menos dois termos.

Suponhamos então que existe uma solução $x = u + v$ da equação (2) onde $u, v \in \mathbb{C}$. Então

$$(u + v)^3 + a(u + v) + b = 0.$$

Por outro lado, expandindo $(u + v)^3$ pelo Binômio de Newton, é fácil observar que

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0.$$

Então, se encontrarmos u e v tais que

$$a = -3uv, \quad b = -(u^3 + v^3),$$

teremos achado uma solução. Elevando ao cubo a primeira igualdade, obtemos

$$-\frac{a^3}{27} = u^3 v^3,$$

donde segue que u^3 e v^3 são as raízes da equação de grau dois

$$z^2 + bz - \frac{a^3}{27} = 0.$$

Esta equação chama-se *a resolvente* da equação (2).

Concluimos que se z_1, z_2 são as soluções da equação resolvente, basta escolher como u e v quaisquer raízes cúbicas $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$ de z_1 e z_2 , respectivamente, satisfazendo a relação

$$-3\zeta_1\zeta_2 = a; \tag{3}$$

temos então uma solução $x := \zeta_1 + \zeta_2$ da equação cúbica reduzida (2). Observemos não obstante que este procedimento é sempre possível mas requer de um certo cuidado. De fato, as soluções z_1 e z_2 da equação resolvente verificam a equação

$$-\frac{a^3}{27} = z_1 z_2$$

e então $-a/3$ é uma das (em princípio) três raízes cúbicas do produto $z_1 z_2$ que, pelas propriedades de raízes complexas, devem ser necessariamente produto de raízes cúbicas de z_1 com raízes cúbicas de z_2 . Porém, observe-se que no caso onde $z_1 \neq 0$ e $z_2 \neq 0$ (i. e., quando $a \neq 0$) temos três raízes cúbicas para z_1 e três para z_2 o que nos dá nove produtos; em geral estaremos obrigados a escolher adequadamente as raízes cúbicas de z_1 e z_2 . Uma forma fácil de fazer isto é a seguinte: Quando $a \neq 0$ (se $a = 0$ a equação (2) resolve-se sem necessidade do método de Hudde), escolhamos $u = \zeta_1$ uma qualquer das raízes cúbicas de z_1 e logo calculamos $v = \zeta_2$ a partir da equação (3): isto é,

$$v := -\frac{a}{3u}.$$

Não é difícil de se convencer que as outras soluções da equação (2) são

$$x' := \omega u + \omega^2 v \quad \text{e} \quad x'' := \omega^2 u + \omega v$$

também são soluções, onde ω é a raiz cúbica primitiva da unidade, isto é,

$$\omega := \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Resumindo, as três soluções da equação (2) estão dadas pelas seguintes equações conhecidas como *Equações de Cardano*:

$$\begin{cases} x_1 = u + v \\ x_2 = \omega u + \omega^2 v \\ x_3 = \omega^2 u + \omega v. \end{cases}$$

ou equivalentemente

$$\begin{cases} x_1 = u + v \\ x_2 = -\frac{u+v}{2} + i\sqrt{3} \frac{u-v}{2} \\ x_3 = -\frac{u+v}{2} - i\sqrt{3} \frac{u-v}{2}. \end{cases}$$

Exemplo 1. Consideremos a equação cúbica na forma reduzida

$$x^3 - 6x - 9 = 0.$$

A resolvente é a equação

$$z^2 - 9z + 8 = 0,$$

cujas soluções são $z_1 = 8$ e $z_2 = 1$.

Escolhemos $u = 2$ a raiz cúbica real de 8. Da equação de compatibilidade $uv = 2$, obtemos $v = 1$. Dado que as outras raízes cúbicas são imaginárias, podemos concluir que $v = 1$ é a única raiz cúbica de $z_2 = 1$ que satisfaz a equação de compatibilidade.

Para $u = 2\omega$ outro valor para a raiz cúbica de 8, obtemos, da equação de compatibilidade $uv = 2$, que $v = \omega^2$. Obtemos a solução

$$x_2 = u + v = 2\omega + \omega^2 = (-1 + i\sqrt{3}) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Analogamente, para $u = 2\omega^2$, obtemos, da equação de compatibilidade, que

$$x_3 = -\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Exemplo 2. Consideremos a equação cúbica

$$x^3 - 12x - 16 = 0.$$

A resolvente é a equação

$$z^2 - 16z + 64 = 0,$$

cujas soluções são $z_1 = z_2 = 8$. Escolhemos $u = 2$ a raiz cúbica real de 8. Da equação de compatibilidade $uv = 4$, obtemos $v = 2$. Das equações de Cardano, obtemos três soluções da cúbica

$$\begin{aligned} x_1 &= u + v = 4 \\ x_2 &= -\frac{u+v}{2} + i\sqrt{3} \frac{u-v}{2} = -2 \\ x_3 &= -\frac{u+v}{2} - i\sqrt{3} \frac{u-v}{2} = -2 \end{aligned}$$

Exemplo 3. Consideremos a equação cúbica

$$x^3 - 15x - 4 = 0.$$

A resolvente é a equação

$$z^2 - 4z + 125 = 0,$$

cujas soluções são $z_1 = 2 + 11i$ e $z_2 = 2 - 11i$. Observemos que $(2 + i)^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i$. Então, uma das raízes cúbicas de z_1 é $u = 2 + i$. Da equação de compatibilidade, obtemos

$$v = -\frac{a}{3u} = \frac{15}{3(2+i)} = \frac{5}{2+i} = \frac{5(2-i)}{5} = 2 - i.$$

Então $u + v = (2 + i) + (2 - i) = 4$ e $u - v = (2 + i) - (2 - i) = 2i$. Obtemos as soluções

$$\begin{aligned}x_1 &= u + v = 4 \\x_2 &= -\frac{u+v}{2} + i\sqrt{3} \frac{u-v}{2} = -2 - \sqrt{3} \\x_3 &= -\frac{u+v}{2} - i\sqrt{3} \frac{u-v}{2} = -2 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

Observação. Historicamente esse último exemplo foi muito importante. Bombelli (1526–1572), utilizando a fórmula de Cardano (extraindo as raízes cúbicas das soluções da equação resolvente), encontrou para a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ a solução

$$x = u + v = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Por outro lado, Bombelli sabia que $x = 4$ é uma solução da cúbica. Concluiu que a solução $x = 4$ deveria poder ser obtida dessa fórmula. Essa foi a motivação para o início do estudo dos números complexos. Pouco a pouco as ideias foram sendo desenvolvidas, até que no início do século XIX os números complexos passaram a ser encarados com naturalidade.

1.2 Discussão da equação cúbica

Consideremos a equação cúbica na sua forma reduzida

$$x^3 + ax + b = 0,$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. Vamos tentar responder às perguntas seguintes:

Existem raízes múltiplas?

Existem soluções reais? E em caso afirmativo: Quantas?

Para começar, consideremos alguns casos especiais:

Se $b = 0$, as soluções da equação são

$$x = 0, \quad x = \pm\sqrt{-a},$$

ou seja que existe sempre a raiz real $x = 0$ e só haverá outras raízes reais quando a for negativo.

Se $a = 0$, as soluções estão dadas pelas raízes cúbicas de $-b$; então sempre existe raiz real e, quando $b \neq 0$ mais duas raízes imaginárias.

Consideremos agora o caso geral, isto é, quando $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Para valores de x diferentes de zero, podemos escrever a equação cúbica na forma

$$x^2 + a = -\frac{b}{x}.$$

As raízes reais correspondem aos valores da abscissa dos pontos de interseção dos gráficos das funções reais

$$y = x^2 + a \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{x}.$$

Existem três situações possíveis para valores de b negativos e três para valores de b positivos. Por exemplo, suponhamos $b < 0$. Se a é suficientemente negativo, é claro que os gráficos se interseccionarão em três pontos cujas abscissas são diferentes, fornecendo três soluções reais e distintas da equação cúbica. Se, pelo contrário, o valor de a for positivo e suficientemente grande, então existirá uma única interseção obtendo desta forma uma única solução real. Finalmente, se imaginarmos o valor de a percorrendo todos os valores reais possíveis, podemos prever que haverá um único valor de a onde a equação deixa de ter três soluções reais e não tem ainda uma única solução real; para este valor preciso de a os gráficos se cortam *transversalmente* num ponto, isto é, possuem retas tangentes distintas neste ponto (na figura, isto acontece no primeiro quadrante) e possuem a mesma reta tangente num outro ponto. Isto fornece duas únicas raízes reais. Porém, a raiz obtida a partir do ponto onde ambos gráficos são tangentes, parece ser de natureza diferente da outra: de fato, suponhamos que a_0 é o valor de a para o qual o gráfico tem um ponto cujas retas tangentes coincidem. Se considerarmos as instâncias onde $a < a_0$, então estaremos na primeira situação, onde o ponto de tangência *bifurca* em dois pontos distintos onde há transversalidade (não mais tangência). Então, podemos entender este ponto como a posição limite de dois pontos diferentes; em linguagem moderna um tal ponto de interseção dos gráficos chama-se um *ponto duplo* ou ponto de *multiplicidade* dois. Nesta situação, teremos então uma solução da nossa equação cúbica que conta duas vezes, o que chamaremos uma *solução dupla*.¹

Em particular concluímos que para toda equação cúbica, existe pelo menos uma solução ou *raiz* real. Baixando de grau esta equação com a ajuda desta raiz real, obteremos uma equação quadrática que admite como soluções, as duas restantes, sendo estas reais ou não.

Vamos agora obter um critério análogo ao que conhecemos para a equação quadrática, onde basta conhecer o sinal de um certo número, chamado discriminante, para decidir sobre a qualidade e quantidade de raízes.

Observemos para começar, que uma equação cúbica na forma reduzida, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, não pode ter todas as suas raízes reais e iguais a um único valor x_0 de x . De fato, caso contrário teríamos uma fatoração da equação cúbica da forma

$$x^3 + ax + b = (x - x_0)^3;$$

desenvolvendo o cúbico do binômio $x - x_0$ constatamos que isto não é possível quando $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Observação. Analizando o Método de Hudde, não é difícil de se convencer que uma equação cúbica possuirá certamente soluções duplas se esse for o caso da equação resolvente associada. De fato, se $z_1 = z_2$, então $u = v$. Olhando para as equações de Cardano, vemos que $u - v = 0$ implica que $x_2 = x_3$.

¹Aqui não fomos suficientemente rigorosos, pois formalizar adequadamente esta situação não é completamente trivial. Mas o leitor pode considerar uma situação análoga com a equação quadrática $x^2 + bx + c = 0$ e observar que quando b^2 se aproxima de $4ac$ as duas soluções tendem a uma só, o que ocorre unicamente quando $b^2 = 4ac$.

Por outro lado, a equação resolvente possui soluções duplas se e somente se

$$4a^3 + 27b^2 = 0,$$

pois um cálculo fácil mostra que o discriminante da equação resolvente é precisamente

$$b^2 + \frac{4a^3}{27} = \frac{27b^2 + 4a^3}{27}.$$

Isto sugere que este número esteja relacionado com a existência e natureza das soluções de forma análoga ao que acontece com a equação quadrática, o que motiva a seguinte definição.

Definição. Chamamos discriminante da equação cúbica reduzida (2) o número real

$$D := -(4a^3 + 27b^2).$$

O sinal na frente é por razões históricas; como veremos a seguir, desta forma obteremos um resultado análogo ao da equação quadrática, onde a presença de soluções imaginárias corresponde ao caso onde $D < 0$.

Mantemos todas as notações introduzidas no método de Hudde acima. Distinguímos três casos:

(i) *Caso onde $D < 0$.* Neste caso as raízes z_1 e z_2 da equação resolvente são reais. Se u é a raiz cúbica real de z_1 , da relação de “compatibilidade”

$$uv = -\frac{a}{3},$$

temos que u também é a raiz cúbica real de z_2 . Como $u \neq v$, a equação cúbica reduzida de coeficientes reais tem uma raiz real e duas imaginárias conjugadas que, segundo as equações de Cardano são

$$\begin{cases} x_1 = u + v, & \text{(que é real)} \\ x_2 = -\frac{u+v}{2} + i\sqrt{3} \frac{u-v}{2} \\ x_3 = -\frac{u+v}{2} - i\sqrt{3} \frac{u-v}{2}. \end{cases}$$

(ii) *Caso onde $D = 0$.* Neste caso $z_1 = z_2 = -b/2$. A equação reduzida possui três raízes, uma *simples* e uma *dupla*:

$$\begin{cases} x_1 = 2\sqrt[3]{-b/2}, & \text{(raiz simples)} \\ x_2 = x_3 = -\sqrt[3]{-b/2} & \text{(raiz dupla)}. \end{cases}$$

(iii) *Caso onde $D > 0$.* Agora z_1 e z_2 são imaginárias; mais precisamente, como o leitor pode verificar, de um cálculo fácil temos

$$z_1 = -\frac{b}{2} + i\sqrt{\frac{D}{108}}, \quad z_2 = -\frac{b}{2} - i\sqrt{\frac{D}{108}}.$$

Escrevamos $u = \alpha + i\beta$ uma das raízes cúbicas de z_1 ; como já observamos anteriormente, uma das raízes cúbicas de z_2 deve ser conjugada desta, pois z_1 e z_2 o são. Tomamos $v = \alpha - i\beta$. O produto

$$uv = \alpha^2 + \beta^2$$

satisfaz a equação de compatibilidade. Aplicando as fórmulas de Cardano, como o leitor poderá verificar sem maiores problemas, obtemos

$$\begin{cases} x_1 = 2\alpha \\ x_2 = -\alpha - \beta\sqrt{3} \\ x_3 = -\alpha + \beta\sqrt{3}, \end{cases}$$

que são três soluções reais distintas. Que $x_2 \neq x_3$ é imediato, pois $\beta \neq 0$, já que z_1 é imaginário. Para ver que, por exemplo, $x_1 \neq x_3$, procedemos por absurdo. Se $x_1 = x_3$, então $3\alpha = \beta\sqrt{3}$ e, portanto,

$$z_1 = u^3 = (\alpha + i\beta)^3 = (\alpha + i\alpha\sqrt{3})^3.$$

Utilizando o Binômio de Newton, obtemos

$$z_1 = \alpha^3(1 + i3\sqrt{3} - 9 - i3\sqrt{3}),$$

o que implicaria que $z_1 \in \mathbb{R}$, contrariando a conclusão acima. Então, $x_1 \neq x_3$. Da mesma forma se mostra que $x_1 \neq x_2$.

Podemos então resumir o estudo qualitativo da equação cúbica na sua forma reduzida no teorema seguinte.

Teorema. *Consideremos a equação cúbica*

$$x^3 + ax + b = 0, \tag{4}$$

com $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e denotemos por D o seu discriminante. Temos as seguintes afirmações:

- a) Se $D = 0$, então (4) possui raiz dupla, sendo todas as soluções reais;
- b) Se $D > 0$, então (4) possui três soluções reais e distintas;
- c) Se $D < 0$, então (4) possui duas soluções imaginárias conjugadas e uma solução real.

Exemplo. Retomando as equações dos exemplos 1, 2 e 3 acima. Um cálculo fácil mostra que o discriminante D é negativo no Exemplo 1, zero no Exemplo 2 e positivo no Exemplo 3, em concordância com a natureza das soluções encontradas.

Exemplo. Consideremos a equação cúbica

$$x^3 - x + b = 0, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Analisemos quando é que esta equação possui uma única raiz real em função do parâmetro b . Como $D = -(-4 + 27b^2)$, segue, pelo teorema acima, que a cúbica possui

(i) uma raiz real e duas imaginárias conjugadas se $b \in \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{3}}{9}, +\infty\right)$;

(ii) três raízes reais distintas se $b \in \left(-\frac{2\sqrt{3}}{9}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$;

(iii) três raízes reais, sendo uma dupla, se $b = \pm \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

1.3 Observação sobre o discriminante de uma cúbica

Teorema. *Sejam x_1, x_2, x_3 as raízes e $D = -4a^3 - 27b^2$ o discriminante de uma cúbica em forma reduzida $x^3 + ax + b = 0$. Então,*

$$D = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2. \quad (5)$$

Demonstração: Começamos observando que $0 = 1 - \omega^3 = (1 - \omega)(1 + \omega + \omega^2)$ implica que

$$1 + \omega + \omega^2 = 0 \quad (6)$$

Pelas equações de Cardano

$$\begin{cases} x_1 = u + v \\ x_2 = \omega u + \omega^2 v \\ x_3 = \omega^2 u + \omega v. \end{cases}$$

temos que

$$x_1 - x_2 = (1 - \omega)u + (1 - \omega^2)v = (1 - \omega)(u + (1 + \omega)v).$$

Mas $1 + \omega = -\omega^2$, por (6). Portanto,

$$x_1 - x_2 = (1 - \omega)(u - \omega^2 v). \quad (7)$$

Analogamente,

$$x_1 - x_3 = (1 - \omega^2)u + (1 - \omega)v = (1 - \omega^2)u + (\omega^3 - \omega)v = (1 - \omega^2)u + (\omega^2 - 1)\omega v.$$

e, portanto,

$$x_1 - x_3 = (1 - \omega^2)(u - \omega v). \quad (8)$$

Segue também das equações de Cardano que

$$x_2 - x_3 = (\omega - \omega^2)(u - v). \quad (9)$$

Utilizando (7), (8) e (9), obtemos

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) = (1 - \omega)(1 - \omega^2)(\omega - \omega^2)(u - v)(u - \omega v)(u - \omega^2 v).$$

Note que, de (6), temos

$$(1 - \omega)(1 - \omega^2) = 1 - \omega - \omega^2 + 1 = 3$$

e que

$$\omega - \omega^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = i\sqrt{3}.$$

Então,

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) = 3i\sqrt{3}(u - v)(1 - \omega v)(u - \omega^2 v).$$

Finalmente,

$$(u - v)(u - \omega v)(u - \omega^2 v) = u^3 - (1 + \omega + \omega^2)u^2 v + (\omega^3 + \omega^2 + \omega)uv^2 - \omega^3 v^3$$

e, utilizando (6),

$$(u - v)(u - \omega v)(u - \omega^2 v) = u^3 - v^3.$$

Portanto,

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) = 3i\sqrt{3}(u^3 - v^3). \quad (10)$$

Elevando ao quadrado os dois lados de (10), temos

$$(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 = -27(u^3 - v^3)^2$$

Usando que $u^3 + v^3 = -b$ e que $uv = -\frac{a}{3}$, segue que

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 &= -27\left[(u^3 + v^3)^2 - 4u^3v^3\right] \\ &= -27\left[b^2 + \frac{4a^3}{27}\right] \\ &= -4a^3 - 27b^2. \end{aligned}$$

□

Exercício. Mostre que a partir da expressão (5) para o discriminante se pode deduzir que $D = 0$ se e somente se existe uma raiz dupla, $D > 0$ se e somente se as três raízes são reais e distintas, e $D < 0$ se e somente se existe uma raiz real e duas raízes imaginárias.

Observação. Para a equação do segundo grau $x^2 + ax + b = 0$, temos que as raízes

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

satisfazem que $(x_1 - x_2)^2 = a^2 - 4b$. Essa última expressão é chamada de discriminante da equação do segundo grau. Pelo teorema acima, vemos que a expressão

$$D = -4a^3 - 27b^2 = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$$

generaliza para o grau 3 a noção de discriminante.

1.4 Observação sobre a resolução de uma cúbica com discriminante positivo

Como vimos, neste caso existem três raízes reais distintas. No entanto este também costuma ser o caso mais difícil na prática, pois envolve a extração de raiz cúbica de números complexos. No Exemplo 3, da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, visto acima, precisamos extrair a raiz cúbica do número complexo $2 + 11i$. Para resolver esse problema prático, foi preciso notarmos que $(2 + i)^3 = 2 + 11i$, o que não era nada óbvio. Daí resultou que um valor para a raiz cúbica de $2 + 11i$ é $2 + i$. Muitas vezes a alternativa para contornar esse problema prático é a de calcular soluções aproximadas. Vejamos um exemplo.

Exemplo. Consideremos a cúbica em forma reduzida

$$x^3 - 12x - 10 = 0.$$

O discriminante $D = -(4 \cdot (-12)^3 + 27 \cdot (-10)^2) = 4212$ é positivo. Logo, a equação tem três soluções reais distintas. A equação resolvente

$$z^2 - 10z + 64 = 0$$

tem raízes imaginárias $z_1 = 5 + i\sqrt{39}$ e $z_2 = 5 - i\sqrt{39}$. Para obter u precisamos extrair a raiz cúbica de z_1 . O módulo de z_1 é $|z_1| = \sqrt{25 + 39} = 8$. Como z_1 é representado por um ponto do primeiro quadrante, seu argumento é $\arg(z_1) = \arctan(\sqrt{39}/5)$. Utilizando um software ou uma calculadora, encontramos o valor aproximado $\arg(z_1) \approx 0.8956$ (valor do argumento em radianos) e escrevemos em forma trigonométrica

$$z_1 = 5 + i\sqrt{39} = 8(\cos(0.8956) + i \operatorname{sen}(0.8956)),$$

de onde segue que

$$u = \sqrt[3]{z_1} = 2(\cos(0.2985) + i \operatorname{sen}(0.2985)) \approx 1.9115 + i \cdot 0.5882.$$

Como z_1 e z_2 são conjugados, suas raízes cúbicas também são. O valor

$$v = \bar{u} = \sqrt[3]{z_2} \approx 1.9115 - i \cdot 0.5882$$

é o que satisfaz a equação de compatibilidade $uv = 4$. A partir daí, seguem os valores aproximados

$$u + v \approx 3.8220 \quad \text{e} \quad \frac{u - v}{2} \approx i \cdot 0.5882.$$

Utilizando as equações de Cardano, obtemos as soluções aproximadas da cúbica

$$x_1 = u + v \approx 3.8220$$

$$x_2 = -\frac{u + v}{2} + i\sqrt{3} \frac{u - v}{2} \approx -1.9115 - 1.0187i \approx -2.9302$$

$$x_3 = -\frac{u + v}{2} - i\sqrt{3} \frac{u - v}{2} \approx -1.9115 + 1.0187i \approx -0.8927$$

1.5 Exemplo adicional

Vamos mostrar um exemplo adicional de uma cúbica para a qual, embora o discriminante seja negativo, aparecem algumas complicações no momento de calcular as soluções. Consideremos a cúbica

$$x^3 + 3x - 36 = 0,$$

cujo discriminante é $D = -(4 \cdot 3^3 + 27 \cdot (-36)^2) = -35100$ é negativo. Portanto, existe uma raiz real e duas imaginárias. A equação resolvente

$$z^2 - 36z - 1 = 0$$

tem as raízes $z_1 = 18 + 5\sqrt{13}$ e $z_2 = 18 - 5\sqrt{13}$, que são reais de sinais contrários (o termo independente da equação resolvente é negativo). A equação de compatibilidade é $uv = -1$. Temos

$$u = \sqrt[3]{18 + 5\sqrt{13}} \quad \text{e} \quad v = \sqrt[3]{18 - 5\sqrt{13}}$$

Podemos usar um software ou uma máquina de calcular para obter os valores aproximados

$$u \approx 3.3027 \quad \text{e} \quad v \approx -0.3027.$$

A partir daí, temos $u + v \approx 3$ e $u - v \approx 3.6055$ e, pelas fórmulas de Cardano, se obtém

$$x_1 = u + v \approx 3$$

$$x_2 = -\frac{u+v}{2} + i\sqrt{3} \frac{u-v}{2} \approx -1.5 + i \cdot 3.1224$$

$$x_3 = -\frac{u+v}{2} - i\sqrt{3} \frac{u-v}{2} \approx -1.5 - i \cdot 3.1224$$

Neste exemplo, também é possível dizer mais, pois encontramos o valor inteiro

$$\sqrt[3]{18 + 5\sqrt{13}} + \sqrt[3]{18 - 5\sqrt{13}} \approx 3.$$

Que essa igualdade aproximada é exata, pode ser verificado elevando ambos os lados ao cubo. Mas é possível dizer mais. Expandindo os cubos de $\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ e de $\frac{3 - \sqrt{13}}{2}$, encontramos $18 + 5\sqrt{13}$ e $18 - 5\sqrt{13}$, respectivamente. Concluimos que

$$u = \sqrt[3]{18 + 5\sqrt{13}} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \quad \text{e} \quad v = \sqrt[3]{18 - 5\sqrt{13}} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}.$$

A partir daí, as equações de Cardano nos dão as soluções exatas

$$x_1 = u + v = 3$$

$$x_2 = -\frac{u+v}{2} + i\sqrt{3} \frac{u-v}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{39}}{2}$$

$$x_3 = -\frac{u+v}{2} - i\sqrt{3} \frac{u-v}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{39}}{2}$$

2 Equação de grau 4

Neste parágrafo vamos resolver a equação geral de grau 4, ou *Equação Quártica*. Uma equação quártica é uma equação da forma

$$Ay^4 + By^3 + Cy^2 + Dy + E = 0,$$

com $A \neq 0$; embora o método que utilizaremos independe da natureza dos coeficientes A, B, C, D, E , como no caso de grau 3, estaremos interessados apenas no caso de coeficientes reais, isto é, suporemos

$$A, B, C, D, E \in \mathbb{R}, \quad A \neq 0.$$

Começamos escrevendo nossa equação na forma

$$y^4 + \frac{B}{A}y^3 + \frac{C}{A}y^2 + \frac{D}{A}y + \frac{E}{A} = 0$$

Mediante a mudança de variáveis

$$y = x - \frac{B}{4A},$$

encontramos a equação equivalente cujo coeficiente cúbico é nulo; ou seja, uma equação da forma

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0, \tag{11}$$

com $p, q, r \in \mathbb{R}$.

Antes de passar à resolução propriamente dita, obteremos a relação entre coeficientes e raízes de uma equação polinômial de grau 3, o que é um caso particular de uma relação geral que desenvolveremos no capítulo 2 (ver...); cabe lembrar que o caso de grau 2, que é bem conhecido, foi utilizado para introduzir a equação resolvente da equação cúbica reduzida. De fato, no intuito de generalizar a construção do método de Hudde, precisamos conhecer apenas como construir os coeficientes de uma equação de grau 3 que possua como raízes três números predeterminados; no caso de grau 2, o fato correspondente é que α, β são raízes da equação

$$z^2 - s_1z + s_2 = 0,$$

onde $s_1 = \alpha + \beta$ e $s_2 = \alpha\beta$.

Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Um cálculo direto mostra que

$$(t - \alpha)(t - \beta)(t - \gamma) = t^3 - s_1t^2 + s_2t - s_3,$$

onde

$$s_1 = \alpha + \beta + \gamma, \quad s_2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma, \quad s_3 = \alpha\beta\gamma.$$

Vê-se então que α, β, γ são raízes da equação

$$t^3 - s_1t^2 + s_2t - s_3 = 0.$$

2.1 Método de Euler

O método de Euler é uma generalização mais ou menos imediata do método de Hudde, com a complicação subjacente do aumento de grau. Começamos testando uma solução hipotética da equação quártica reduzida (11) da forma

$$x = u + v + w, \quad (12)$$

com $u, v, w \in \mathbb{C}$.

Elevando ao quadrado (12) obtemos

$$x^2 - (u^2 + v^2 + w^2) = 2(uv + uw + vw);$$

elevando mais uma vez ao quadrado e tendo em conta (12), obtemos

$$x^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)x^2 - 8uvw x + (u^2 + v^2 + w^2)^2 - 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) = 0.$$

Comparando esta última equação com (11), concluímos que basta determinar u, v, w de forma que sejam satisfeitas as seguintes condições:

$$\begin{cases} -2(u^2 + v^2 + w^2) = p \\ -8uvw = q \\ (u^2 + v^2 + w^2)^2 - 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) = r, \end{cases} \quad (13)$$

pois $u + v + w$ verifica a equação (11).

Finalmente, elevando ao quadrado a segunda das equações (13) e substituindo a primeira na terceira, obtemos

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = -\frac{p}{2} \\ u^2v^2w^2 = \frac{q^2}{64} \\ u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 = \frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}. \end{cases}$$

Portanto, para $x = u + v + w$ ser solução de (11), é suficiente ter que u^2, v^2, w^2 são raízes da equação cúbica

$$t^3 + \frac{p}{2}t^2 + \left(\frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}\right)t - \frac{q^2}{64} = 0. \quad (14)$$

A equação (14) é a *Resolvente da Equação Quártica Reduzida*.

De maneira análoga a como fizemos no método de Hudde, se t_1, t_2, t_3 são as raízes de (14), escolhemos u, v, w de forma que

$$(i) \quad u^2 = t_1, \quad v^2 = t_2, \quad w^2 = t_3,$$

$$(ii) \quad uvw = -\frac{q}{8},$$

Mais precisamente, de (i) obtemos

$$u = \pm\sqrt{t_1}, \quad v = \pm\sqrt{t_2}, \quad w = \pm\sqrt{t_3},$$

donde temos oito possibilidades para $u + v + w$. Utilizando (ii), eliminaremos quatro destas; na prática, escolhemos os quatro pares de valores de, por exemplo, u e v , segundo (i), e de (ii) obtemos os correspondentes valores de w .

Embora o discriminante também possa ser definido para a equação quártica não é possível fazer uma discussão sobre a natureza das raízes (no caso de $p, q, r \in \mathbb{R}$, que embora não seja necessário para a aplicação do método de Euler, estamos supondo desde o início) de maneira tão contundente como no caso de grau 3. Não obstante, temos uma descrição bastante precisa em termos da natureza da equação resolvente, cuja demonstração fica a cargo do leitor:

- (i) Se (14) possui três raízes positivas, então (11) possui quatro raízes reais.
- (ii) Se (14) possui uma raiz positiva e duas negativas distintas, então (11) possui quatro raízes imaginárias conjugadas duas a duas.
- (iii) Se (14) possui uma raiz positiva e uma negativa dupla, então (11) possui uma raiz dupla real e duas imaginárias conjugadas.
- (iv) Se (14) possui uma raiz positiva e duas imaginárias conjugadas, então (11) possui duas raízes reais diferentes e duas imaginárias conjugadas.

Observação. No caso onde $q = 0$, a equação (11) é biquadrada e podemos resolvê-la de maneira elementar. Se $r = 0$ então $x = 0$ é solução e basta então resolver uma equação de grau 3. Por outro lado, o caso geral requer, na maior parte das situações, de cálculos intrincados, pois geralmente a equação resolvente não estará na forma reduzida; porém, quando $p = 0$, estaremos lidando com um caso suficientemente geral como para estarmos obrigados a usar o método de Euler, mas com uma significativa simplificação, pois a resolvente estará na forma reduzida: daremos exemplos só nesta situação.

Exemplo 1. Consideremos a quártica $x^4 - 12x^2 - 16x - 4 = 0$. A equação resolvente é $t^3 - 6t^2 + 10t - 4 = 0$. Para eliminar o termo de grau 2, fazemos a substituição $t = y + 2$. Obtemos a equação $y^3 - 2y = 0$, ou seja, $y(y^2 - 2) = 0$, cujas raízes são $y_1 = 0$, $y_2 = \sqrt{2}$ e $y_3 = -\sqrt{2}$. Fazendo a substituição inversa, obtemos que as raízes da equação resolvente são $t_1 = 2$, $t_2 = 2 + \sqrt{2}$ e $t_3 = 2 - \sqrt{2}$. Temos

$$(i) \quad u^2 = t_1 = 2, \quad v^2 = t_2 = 2 + \sqrt{2}, \quad w^2 = t_3 = 2 - \sqrt{2},$$

$$(ii) \quad uvw = -\frac{q}{8} = 2.$$

Observando que $\sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \sqrt{2^2 - 2} = \sqrt{2}$, escolhemos arbitrariamente os valores das raízes quadradas de $v = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ e $w = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ e, pela equação de compatibilidade (ii) acima, obtemos u como $u = \frac{2}{vw}$. Dessa forma,

obtemos que as soluções da quártica são

$$\begin{aligned}x_1 &= \sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} \\x_2 &= -\sqrt{2} - \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} \\x_3 &= -\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2 - \sqrt{2}} \\x_4 &= \sqrt{2} - \sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2 - \sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Exemplo 2. Consideremos a quártica

$$x^4 - 4x^3 + 8x - 8x + 4 = 0. \quad (15)$$

Eliminamos o termo de grau 3 fazendo a substituição $x = y - 1$. Obtemos

$$y^4 + 2y^2 - 16y + 17 = 0. \quad (16)$$

A equação resolvente é a cúbica

$$t^3 + t^2 - 4t - 4 = 0. \quad (17)$$

Eliminamos o termo de grau 2 da equação (17) fazendo a substituição $t = s - \frac{1}{3}$. Obtemos a cubica reduzida

$$s^3 - \frac{13}{3}s - \frac{70}{27} = 0. \quad (18)$$

A equação resolvente da cúbica (18) é

$$z^2 - \frac{70}{27}z + \frac{13^3}{27^2} = 0,$$

cujas raízes são

$$z_1 = \frac{35}{27} + \frac{i2\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{35}{27} - \frac{i2\sqrt{3}}{2}.$$

Precisamos extrair as raízes cúbicas desses números complexos. Podemos começar usando uma calculadora para obter valores aproximados. Com base nisso, fazemos a conjectura de que

$$\left(\frac{7 + i\sqrt{3}}{6}\right)^3 = \frac{35}{27} + \frac{i2\sqrt{3}}{3}.$$

Depois, fazendo os cálculos, verificamos que isso realmente é verdade. Obtemos daí que

$$u = \frac{7 + i\sqrt{3}}{6} \quad \text{e} \quad v = \frac{7 - i\sqrt{3}}{6}.$$

Portanto,

$$u + v = \frac{7}{3} \quad \text{e} \quad u - v = \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

As fórmulas de Cardano então nos dão que as soluções da equação (18) são

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{7}{3} \\ s_2 &= -\frac{7}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{3} \\ s_3 &= -\frac{7}{6} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Usando novamente a substituição $t = s - \frac{1}{3}$, obtemos que as soluções da equação resolvente (17) são

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2 \\ t_2 &= -\frac{5}{3} - \frac{1}{3} = -2 \\ t_3 &= -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = -1. \end{aligned}$$

Agora, Utilizando que

$$(i) \quad u^2 = t_1 = 2, \quad v^2 = t_2 = -2, \quad w^2 = t_3 = -1,$$

$$(ii) \quad uvw = -\frac{q}{8} = 2,$$

vemos que podemos arbitrar quatro valores para $v = \pm i\sqrt{2}$, $w = \pm i$ e que u será dado por $u = \frac{2}{vw}$. Assim, encontramos para a solução $y = u + v + w$ da equação (16) os seguintes valores

$$\begin{aligned} y_1 &= -\sqrt{2} + i\sqrt{2} + i \\ y_2 &= \sqrt{2} + i\sqrt{2} - i \\ y_3 &= \sqrt{2} - i\sqrt{2} + i \\ y_4 &= -\sqrt{2} - i\sqrt{2} - i. \end{aligned}$$

Usando a substituição $x = y - 1$, obtemos finalmente que as soluções da quártica (15) são

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 - \sqrt{2} + i\sqrt{2} + i \\ x_2 &= -1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - i \\ x_3 &= -1 + \sqrt{2} - i\sqrt{2} + i \\ x_4 &= -1 - \sqrt{2} - i\sqrt{2} - i. \end{aligned}$$

2.2 Método alternativo para resolução da quártica

Consideremos a quártica em sua forma geral

$$x^4 + 2px^3 + qx^2 + rx + r = 0. \tag{19}$$

Reescrevemos como

$$x^4 + 2px^3 = -qx^2 - rx - r. \quad (20)$$

A ideia é somar um polinômio de grau 2 conveniente a ambos os lados de (20) de modo que o lado esquerdo se torne o quadrado de um polinômio de grau 2 e o lado direito o quadrado de um polinômio de grau 1. Para isso, note que

$$\begin{aligned} \left(x^2 + px + \frac{w}{2}\right)^2 &= \left(x^2 + px + \frac{w}{2}\right)\left(x^2 + px + \frac{w}{2}\right) \\ &= x^4 + 2px^3 + (p^2 + w)x^2 + pwx + \frac{w^2}{4}. \end{aligned}$$

Então, somando $(p^2 + w)x^2 + pwx + \frac{w^2}{4}$ a ambos os lados de (20), obtemos

$$\left(x^2 + px + \frac{w}{2}\right)^2 = (p^2 + w - q)x^2 + (pw - r)x + \frac{w^2}{4} - s \quad (21)$$

Até aqui u é qualquer. Vamos agora determinar o valor u para que o lado direito de (21) seja o quadrado de um polinômio de grau 1. A condição para que isso aconteça é que ele tenha raiz dupla, ou seja, que seu discriminante seja 0, isto é,

$$(pw - r)^2 - 4(p^2 + w - q)\left(\frac{w^2}{4} - s\right) = 0,$$

ou ainda,

$$-(p^2w^2 - 2prw + r^2) + (w + p^2 - q)(w^2 - 4s) = 0.$$

Reescrevendo, temos

$$w^3 - qw^2 + (2pr - 4s)w + (4qs - 4p^2s - r^2) = 0. \quad (22)$$

A equação (22) é chamada de *cúbica redutora* da quártica (19).

Sejam w_1, w_2, w_3 as raízes da equação (22). Substituindo qualquer uma delas em (21), obtemos uma equação da forma

$$\left(x^2 + px + \frac{w_1}{2}\right)^2 = (a_1x + b_1)^2,$$

que nos dá duas equações

$$x^2 + px + \frac{w_1}{2} = a_1x + b_1 \quad \text{e} \quad x^2 + px + \frac{w_1}{2} = -a_1x - b_1,$$

cada uma com duas raízas, o que nos dá ao todo quatro raízes. Obtemos, assim, as quatro raízes da quártica (19). Se usássemos w_2 ou w_3 , obteríamos as mesma quatro raízes, talvez em outra ordem.

Exemplo. Vamos resolver a quártica

$$x^4 + 6x^3 + 15x^2 + 26x + 24 = 0. \quad (23)$$

Aqui $p = 3$, $q = 15$, $r = 26$ e $s = 24$. A equação redutora (22) fica

$$w^3 - 15w^2 + 60w - 100 = 0. \quad (24)$$

Para resolver essa cúbica, primeiro eliminamos o termo quadrático fazendo a substituição

$$w = y + 5. \quad (25)$$

Substituindo (25) em (24), obtemos

$$y^3 - 15y - 50 = 0. \quad (26)$$

A equação resolvente dessa última cúbica é

$$z^2 - 50z + 125 = 0,$$

cujas soluções são $z_1 = 25 + 10\sqrt{5}$ e $z_2 = 25 - 10\sqrt{5}$. Assim,

$$u = \sqrt[3]{25 + 10\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad v = \sqrt[3]{25 - 10\sqrt{5}}.$$

Usando uma calculadora, obtemos os valores aproximados

$$u \approx 3.6180 \quad \text{e} \quad v \approx 1.3819$$

e, portanto, uma das soluções da cúbica (26) é aproximadamente $y_1 = u + v = 4.9999$.

Em vista disso, somos levados a fazer a seguinte conjectura:

$$\sqrt[3]{25 + 10\sqrt{5}} + \sqrt[3]{25 - 10\sqrt{5}} = 5 ?$$

Vemos que isso de fato é verdade elevando ao cubo ambos os lados

$$25 + 10\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{25 + 10\sqrt{5}}\sqrt[3]{25 - 10\sqrt{5}} + 3\sqrt[3]{25 + 10\sqrt{5}}\sqrt[3]{25 - 10\sqrt{5}} + \sqrt[3]{25 + 10\sqrt{5}}\sqrt[3]{25 - 10\sqrt{5}} + 25 - 10\sqrt{5} = 125 ?$$

ou,

$$50 + 3\sqrt[3]{25^2 - 500} \left(\sqrt[3]{25 + 10\sqrt{5}} + \sqrt[3]{25 - 10\sqrt{5}} \right) = 125 ?$$

ou ainda

$$50 + 3\sqrt[3]{125} \cdot 5 = 125 ?$$

o que é verdade.

Usando novamente a substituição (25), temos que

$$w_1 = y_1 + 5 = 10$$

é uma solução da cúbica (24). Substituindo esse valor em (22), obtemos

$$(x^2 + 3x + 5)^2 = 4x^2 + 4x + 1,$$

ou seja, a quártica (23) é equivalente à equação

$$(x^2 + 3x + 5)^2 = (2x + 1)^2.$$

Essa última equivale a

$$x^2 + 3x + 5 = 2x + 1 \quad \text{ou} \quad x^2 + 3x + 5 = -2x - 1,$$

ou seja,

$$x^2 + x + 4 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Obtemos daí que as soluções da quártica (23) são

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{15}}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{15}}{2}, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = -3.$$