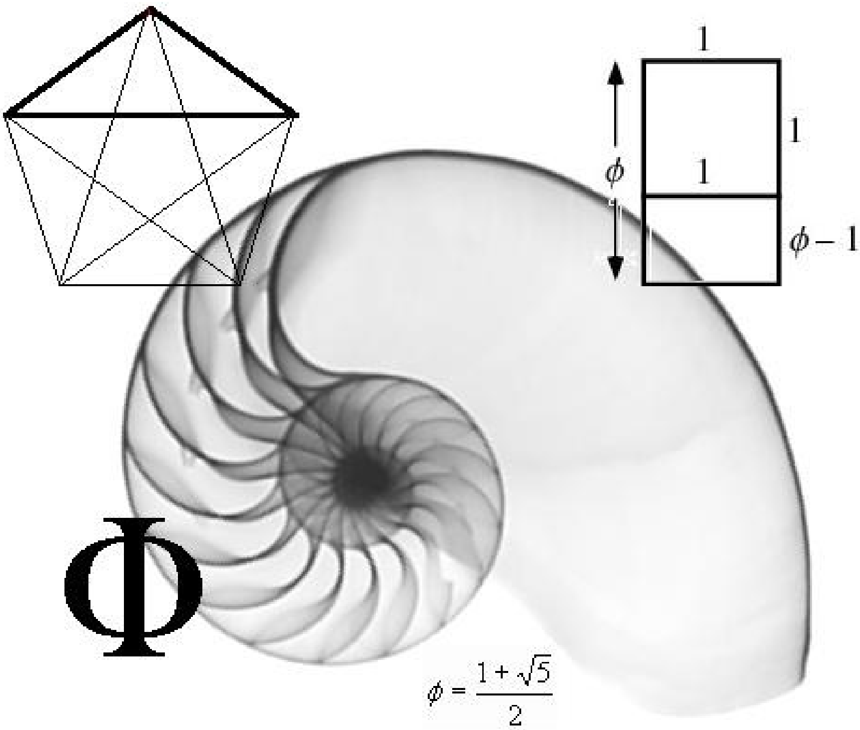
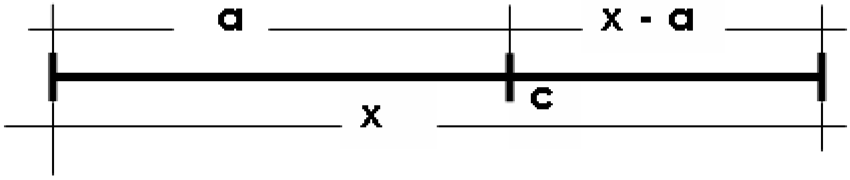
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
SECRETARIA DE ENSINO À DISTÂNCIA



O NÚMERO DE OURO

Prof. Dra. Vera Clotilde Garcia, Acad. Fabiana Fattore Serres,
Acad. Juliana Zys Magro e Acad. Taís Aline Bruno de Azevedo.

A divisão áurea de um segmento ou a divisão em média e extrema Razão



Dado o segmento AB, dizemos que um ponto **C** divide este segmento em média e extrema razão se o mais longo dos segmentos é média geométrica entre o menor e o segmento todo:

$$\frac{\text{segmento todo}}{\text{parte maior}} = \frac{\text{parte maior}}{\text{parte menor}}$$

Ou seja:

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{x - a}$$

Multiplicando os dois lados da equação por

$a(x-a)$

obteremos:

$$\frac{a(x-a)x}{a} = \frac{a.a(x-a)}{(x-a)}$$

$$(x-a)x = a^2$$

$$x^2 - ax = a^2$$

$$x^2 - ax - a^2 = 0$$

Resolvendo a equação temos:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{a \pm a\sqrt{5}}{2} = \frac{a(1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

Vamos analisar a raiz positiva da equação por conveniência:

$$\frac{x}{a} \equiv \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

O número

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}16180399\ldots = \varphi \text{ (fi)}$$

é denominado número de ouro.

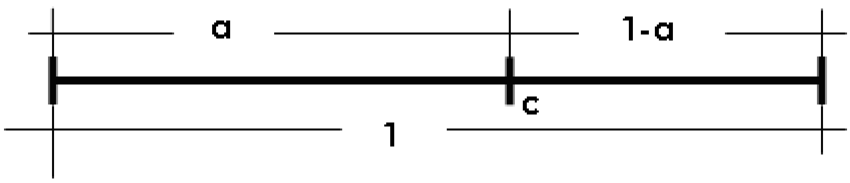
Ou seja, a razão entre as medidas dos dois segmentos x e a, é um número irracional denominado Número de Ouro.

Igualmente, como $\frac{x}{a} = \frac{a}{x-a}$, a razão entre as medidas do segmento maior a e do segmento menor (x-a) também é igual ao número de ouro.

Alguns autores dizem que $\frac{1}{\varphi} = 0{,}6180399...$ é o número de ouro, optamos por usar no nosso trabalho φ (fi) $= 1{,}6180399...$.

Propriedades do Número Áureo

Basta considerar o segmento abaixo, no qual x=1, onde **c** divide o segmento em média e extrema razão,



Temos:

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{1-a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{1}{a} - 1}$$

$\varphi = \frac{1}{a}$ logo $\varphi = \frac{1}{\varphi - 1}$

E conseqüentemente:

$$\varphi^2 - \varphi = 1$$
$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

E conseqüentemente:

$$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$$

O Retângulo Áureo

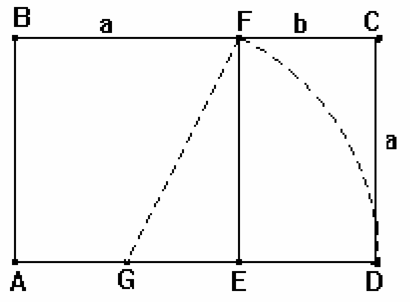


Fig. 1

Chama-se retângulo áureo, qualquer retângulo **ABCD** com a seguinte propriedade: se dele suprimirmos um quadrado, como **ABFE**, o retângulo restante **CDEF**, será semelhante ao retângulo original.

Podemos traduzir esta semelhança pela relação:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \qquad \text{Equação 1}$$

Isto significa que o ponto F divide o segmento BC em média e extrema razão, logo, como já vimos, $\frac{a}{b} = \varphi$, isto é, o retângulo tem proporções áureas.

A partir desta relação:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$

Vamos verificar que com a operação de "suprimir quadrados" indefinidamente, sempre encontraremos retângulos semelhantes, mantendo em cada novo retângulo a razão áurea.

Para isto, a partir da equação 1, multiplicando os dois lados da equação por $(a.b)$ temos :

$$\frac{(a+b).a.b}{a} = \frac{a.a.b}{b}$$

$$(a+b).b = a^2$$

$$a.b + b^2 = a^2$$

$$b^2 = a^2 - a.b$$

$$b^2 = a.(a-b)$$

$$b.b = a(a-b)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

Pela relação $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$

notamos que, se pegarmos o retângulo menor da figura 1 :

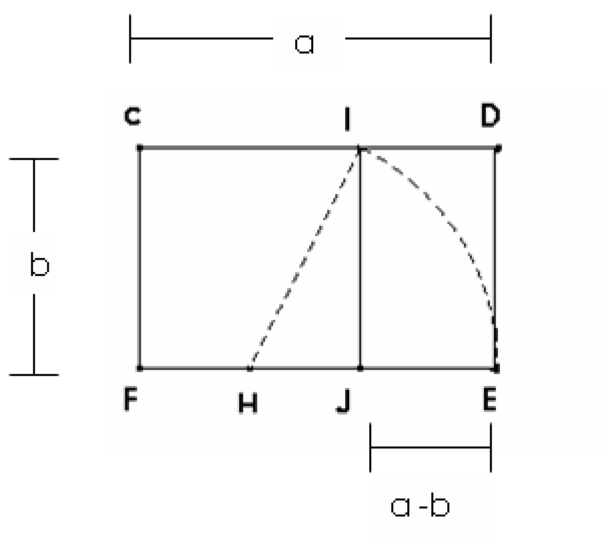


Fig. 2

e dele suprimirmos um quadrado, como **CIFJ**, o retângulo restante será semelhante ao retângulo **CDEF.** Vemos então que a semelhança se mantém:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

ou seja:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} = \varphi$$

A CONSTRUÇÃO DE UM RETÂNGULO ÁUREO

Podemos construir um retângulo áureo partindo de um segmento **AE** = a e a partir deste, construir o quadrado **ABEF**, como abaixo:

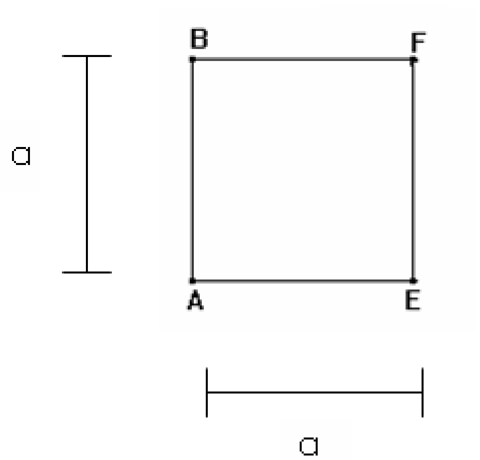


Fig. 3

Marcar o ponto médio do segmento **AE**

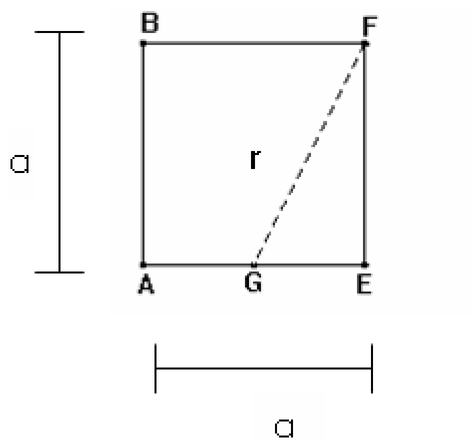


Fig. 4

Com a ponta seca do compasso em **G** e abertura = **GF** traçar o arco **FD**, que jaz na reta **AE** e **E** é interno ao segmento **AD**.

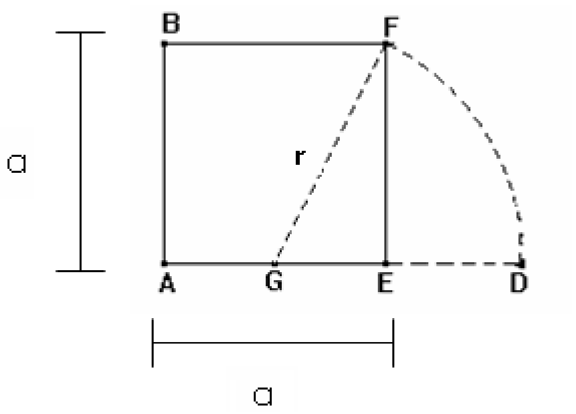


Fig. 5

Prolongar o segmento **BF** e traçar **CD** perpendicular ao segmento **AD**.

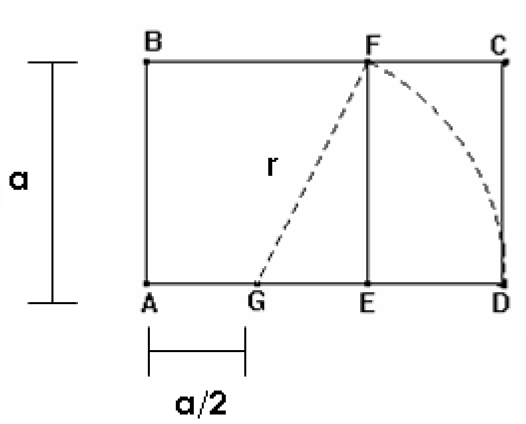


Fig. 6

Vemos na figura 6 que : **GF** = **GD** = **r**

E usando o fato de que o triângulo **GEF** é retângulo em **Ê** :

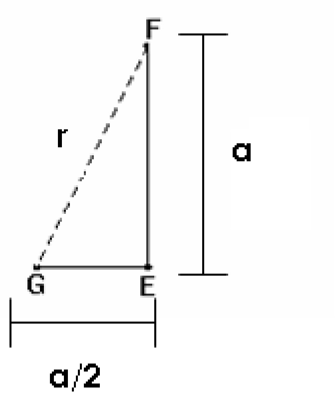


Fig. 7

Aplicamos o teorema de Pitágoras e obtemos:

$$r = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Logo construímos um retângulo de lados:

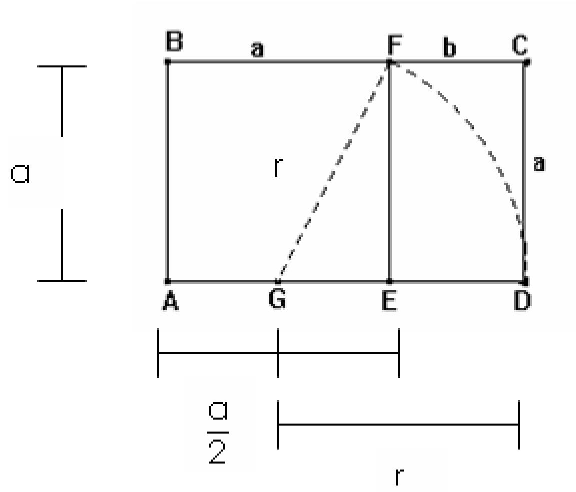


Fig.8

$$\frac{a}{2} + r = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$$

Dividindo o lado maior do retângulo construído pelo menor temos:

$$\frac{\frac{a\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Ou seja, o retângulo construído tem proporções áureas.

Incomensurabilidade dos lados de um retângulo áureo

Um segmento $\overline{AB}$ é dito comensurável com a unidade dada pelo semento $\overline{CD}$ quando existe uma subunidade de medida que cabe um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$ e em $\overline{CD}$.

Dizemos que $\overline{AB}$ = m.v $\overline{CD}$ = n.v , onde m e n são números inteiros positivos e que a razão entre estas medidas é o número $\frac{m}{n}$.

Definição

Um número racional é um número que representa a medida de um segmento comensurável com a unidade.

Todo número racional é expresso pela razão $\frac{m}{n}$ com m e n inteiros e n ≠ 0.

Por muito tempo se pensou que dois segmentos quaisquer eram sempre comensuráveis.

A ilusão da comensurabilidade durou até o quarto século antes de Cristo. Naquela época, em Crotona, sul da Itália, havia uma seita filosófico-religiosa, liderada por Pitágoras. Um dos pontos fundamentais de sua doutrina era o lema "Os números governam o mundo", sendo que, para eles, números eram números naturais sobre os quais se podia estabelecer relações, tomar razões e, conseqüentemente, formar frações.

Estudando geometria, Pitágoras conseguiu demonstrar que, para qualquer triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos dois catetos.

A partir deste resultado, surgiu um número que corresponde à razão entre as medidas da hipotenusa e do cateto, de um triângulo retângulo isósceles: $\sqrt{2}$. Este número corresponde à medida da diagonal do quadrado de lado 1.

Na época, a crença na comensurabilidade de qualquer par de segmentos, fez pensar que o lado $\overline{AB}$ e a diagonal $\overline{CD}$ de um quadrado qualquer também seriam segmentos comensuráveis. Porém, buscando a razão entre estes segmentos, um dos discípulos de Pitágoras, observou que eles não são comensuráveis. Não existe um segmento-padrão, *unitário*, que cabe um número exato de vezes em $\overline{AB}$ e em $\overline{CD}$. (Veja a **Demonstração da incomensurabilidade da diagonal e do lado do quadrado**).

Este foi um momento de ruptura e de crise, entre os estudiosos da época. Aparecia pela primeira vez na história da Matemática, a possibilidade da existência de segmentos incomensuráveis e, conseqüentemente, segmentos cuja razão entre as medidas não resulta em números racionais. Abria-se a possibilidade da existência de outro tipo de números: os números irracionais.

A existência de segmentos incomensuráveis implica na insuficiência dos sistemas numéricos conhecidos – números naturais e racionais - para efetuar medidas dos objetos geométricos mais simples, como o quadrado e o círculo.

A solução que se impôs, na época, e que levou séculos para ser adotada, foi a de ampliar o conceito de número, introduzindo os chamados *números irracionais.*

Definição

Um número irracional é um número que representa a medida de um segmento incomensurável com a unidade.

Um número irracional não pode ser representado por uma razão $\frac{m}{n}$ com m e n inteiros e $n \neq 0$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, verifica-se que a diagonal do quadrado de lado unitário é o número $\sqrt{2}$. Demonstra-se algebricamente que **$\sqrt{2}$ é irracional** (Veja esta demonstração), assim como todas as raízes não exatas de números naturais são irracionais.

Com estas demonstrações, prova-se que o Número de Ouro é irracional, pois envolve a raiz quadrada de 5.

Mas, também é possível demonstrar que o Número de Ouro é irracional, de forma geométrica.

Na figura abaixo temos vários retângulos áureos: a + b e a, a e b, b e a – b, a - b e 2b – a.

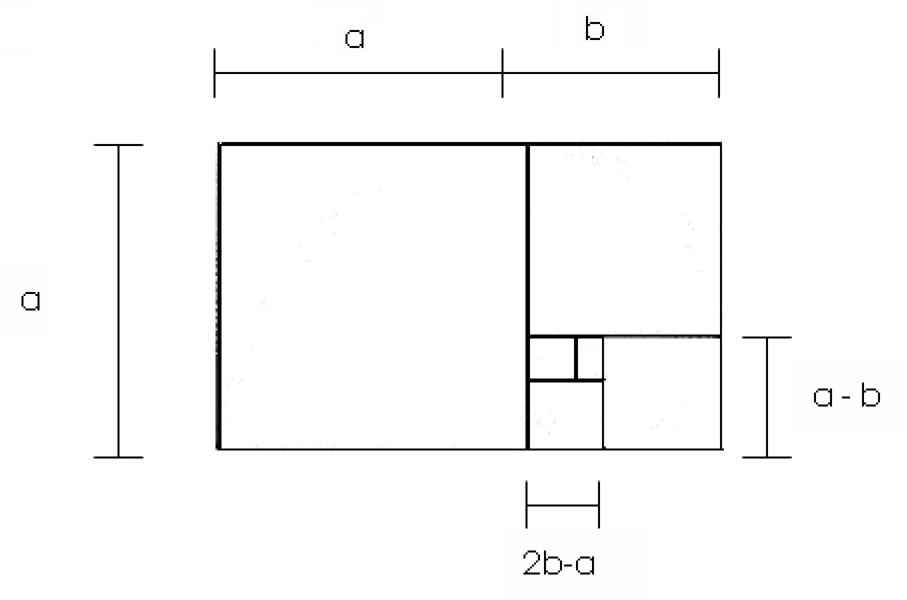


Fig. 10

Consideremos a seqüência formada pelos lados maiores dos retângulos áureos da figura 10:

a + b , a , b , a – b , 2b- a , 2a – 3b , 5b – 3a , 5a -8b , 13b – 8a , ...

Vemos que qualquer dois elementos consecutivos desta seqüência são os lados de um retângulo áureo, então o processo feito anteriormente de "suprimir quadrados" de retângulos áureos conduz a uma seqüência infinita de retângulos áureos, com dimensões cada vez menores e tendendo a zero.

Queremos provar que os lados de um retângulo áureo são incomensuráveis, suponhamos então por absurdo que são comensuráveis, isto é, existe certa unidade de medida u, tal que

$$\begin{cases} a+b=m.u \\ a=n.u \end{cases} \qquad m, n \text{ são inteiros positivos}$$

Logo $b=(m-n)\times u=q\times u$, q é inteiro positivo.

Como a e b são números inteiros positivos, utilizando a unidade u, todos os demais elementos da seqüência dos lados dos retângulos áureos, descrito acima, também são números inteiros positivos. Isto é um absurdo pois não existe seqüência infinita e decrescente de números inteiros positivos. Concluímos então que os lados de um retângulo áureo são incomensuráveis.

A ESPIRAL ÁUREA

Partindo de um retângulo áureo **ABCD** podemos construir a espiral de ouro : Com centro em **E** e abertura = **EF** traçar o arco **BF**

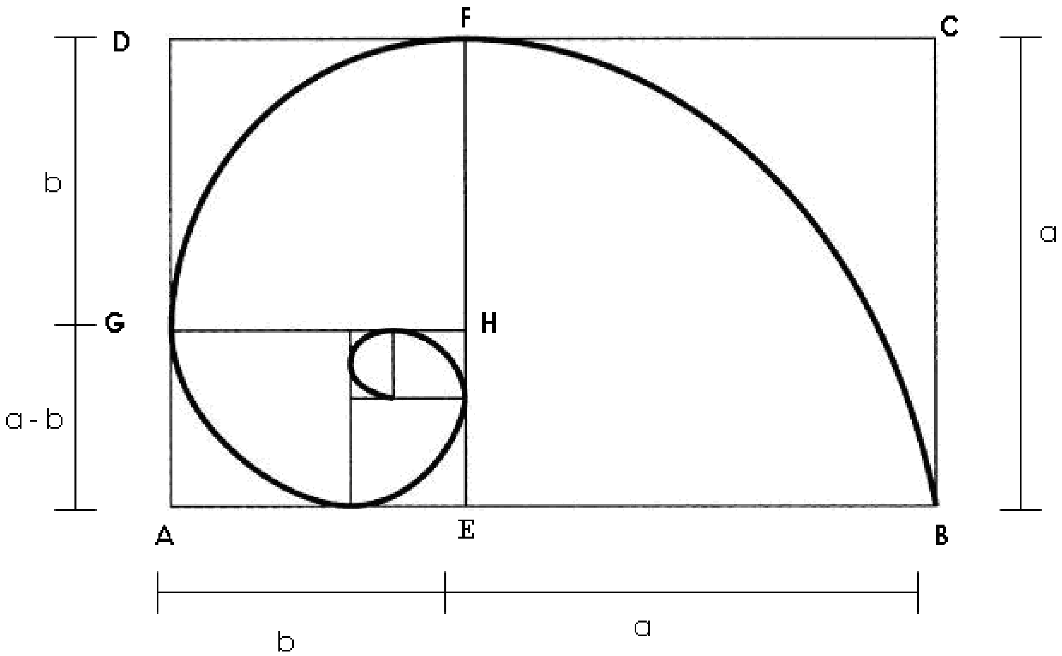


Fig.9

O retângulo **ADFE** também é áureo, então repetindo o processo, com a ponta seca em **D** e abertura = **DF** marcamos um ponto **G** em **AD**. Traçar o segmento **GH** de mesma medida e paralelo a **AE**. Agora com raio = **HF** e centro em **H**, traçamos o arco **GF**.

O retângulo **AEHG** mantém a razão áurea e se continuarmos suprimindo quadrados e repetindo o processo de traçar arcos como descrito acima, desenhamos a espiral áurea.

O PENTÁGONO ÁUREO

A figura do pentagrama que aparece no Vídeo da TV-Escola não oferece as regularidades desejadas, vamos optar por outra para desenvolvermos a matemática do Número de Ouro de maneira adequada.

Para construir um pentagrama de ouro, desenhamos uma circunferência de raio qualquer e com um transferidor dividimos o ângulo central em 5 ângulos de 72º.

$$\frac{360°}{5} = 72°$$

Ligando os pontos **ABCDE** obtemos um pentágono regular.

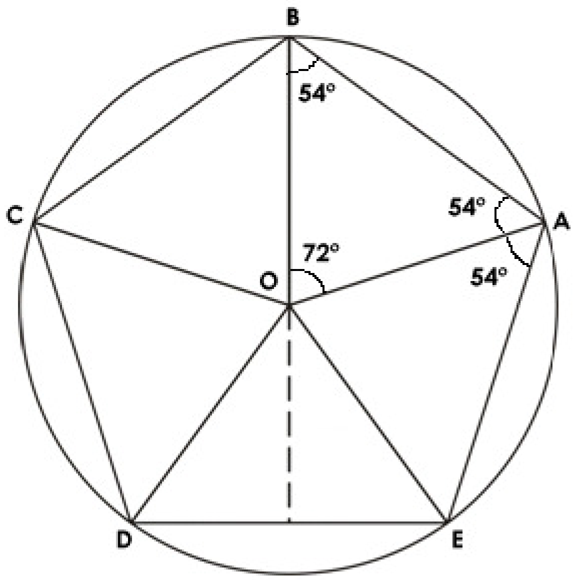


Fig. 11

Como $m\angle BAO + m\angle AOB + \angle OBA = 180°$ e $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$, já que ambos os segmentos são raios da circunferência, temos que:

$$m\angle OBA \equiv m\angle OAB = \frac{180° - 72°}{2} = \frac{108°}{2} = 54°$$

Da mesma forma encontramos $m < OBA = 54°$ e portanto :

$m < BAE = 108°$

Se traçarmos as diagonais $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$ obteremos uma estrela:

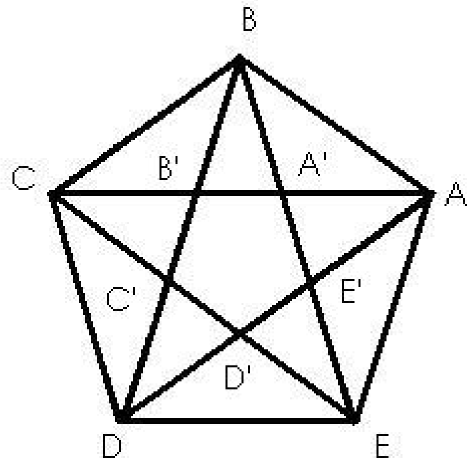


Fig. 12

Os pontos de intersecção A', B', C', D', E' das diagonais determinam um segundo pentágono regular. Estudando a relação entre os dois pentágonos, os matemáticos da escola pitagórica descobriram propriedades importantes.

Vamos mostrar que a razão entre a diagonal D e o lado L do pentágono é o Número de Ouro:

Para isto precisamos mostrar dois resultados:

1. Os triângulos ABE' e ACD são semelhantes
2. DE'= AB = L (lado do pentágono)

Do resultado 1, obtemos a seguinte relação de proporcionalidade:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{AE'}$$

Observamos que:

AB = CD = L, AC = D, AE´= AD – DE´= D - L (pelo resultado 2).

Ou seja,

$$\frac{D}{L} = \frac{L}{D - L}$$

Conseqüentemente :

$$L^2 = D^2 - DL$$

Podemos fazer

$$\frac{D}{L} = X$$

para obter

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

A raiz desta equação é o número

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}16180399\ldots = \Phi \text{ (fi)}$$

Provamos assim que $\frac{D}{L}$ é o Número de Ouro.

1. Vamos provar que os triângulos ABE´ e ACD são semelhantes, provando que seus ângulos são iguais. Para isto vamos traçar uma seqüência de figuras:

FIGURA 1

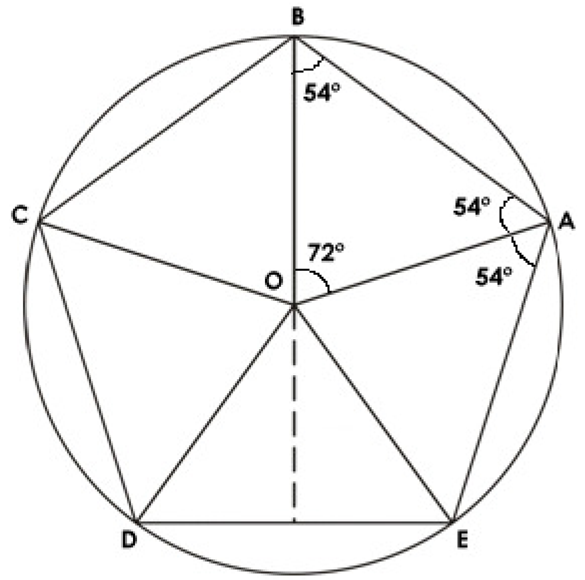
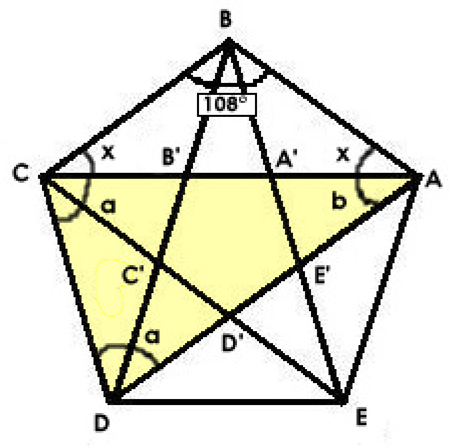


FIGURA 2



Vamos calcular os ângulos a, b, x marcados na figura:

2x = 180 – 108

x = 36

a = 108 – 36 = 72

b = 180 – (2 x 72) = 36

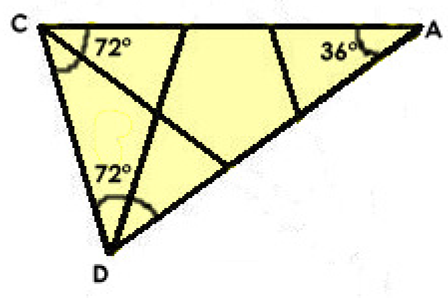
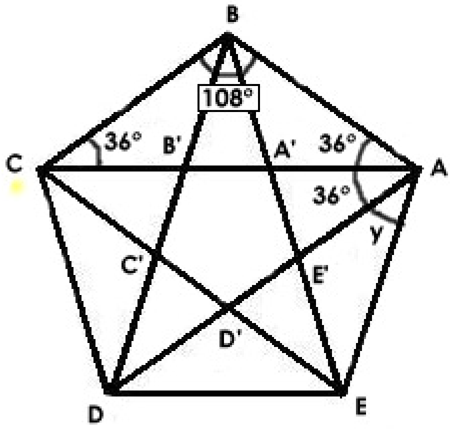


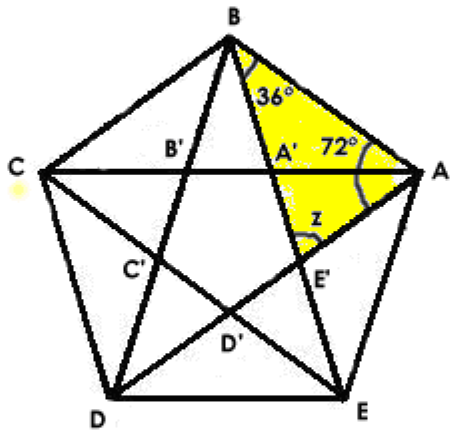
FIGURA 3



Vamos calcular o ângulo Y marcado na figura:

Y = 108 – (2 x 36) = 36 Este é o ângulo entre qualquer um dos lados e a diagonal.

FIGURA 4



Vamos calcular o ângulo Z marcado na figura:

Z = 180 – 72 – 36 = 72

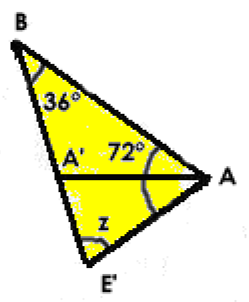
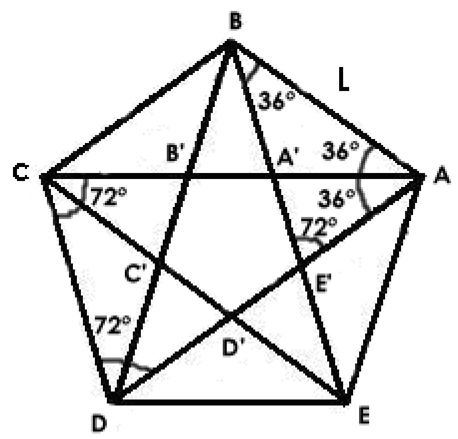


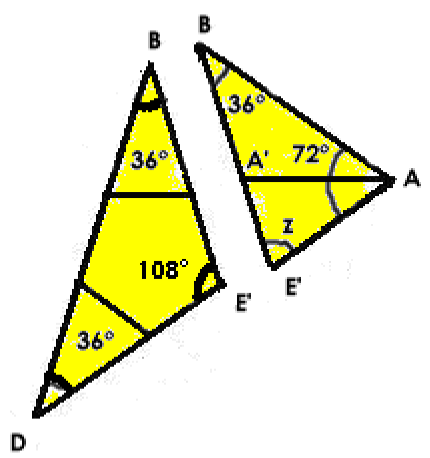
FIGURA 5



É fácil ver que os triângulos são semelhantes, pois os três ângulos são congruentes.

Resta provar que DE'= AB = L

Mas isto é simples, pois já vimos que o triângulo ABE'é isósceles e é fácil ver que o triângulo BDE' também é isósceles.



Logo DE'= BE'= AB = L.