0,999... É IGUAL A 1?

Prof[as] Estela Kaufman Fainguelernt
Profa. Lucia Maria Aversa Villela

Alunos de iniciação científica
Aline Lebre Xavier da Rosa
Douglas Duarte
Jéssica dos Santos Freire
Jéssika Fernanda de Melo Santos Barbosa
Raphael Alves dos Santos
William Ewbank Pinheiro
Bolsistas do Projeto Jovens Talentos

Carolina Souza Ramos
Thaisa Mello de Oliveira
Não bolsistas

GPEMCC / USS

Resumo

Este relato é uma das atividade realizadas com alunos do Ensino Básico que participam do projeto "A Análise Matemática Visitando a Escola Básica", que vem sendo desenvolvido pelo Grupo de Pesquisa Educação Matemática, Cultura e Cidadania (GPEMCC), por professores da Universidade Severino Sombra e agora por alunos do Ensino Básico ligados ao Projeto Jovens Talentos, da FAPERJ, onde estamos promovendo a reflexão sobre conceitos pertinentes à Análise Matemática que são aplicados na Matemática desde a Educação Básica. Sendo um dos objetivos de nosso trabalho levar o grupo à reflexão sobre conceitos pertinentes à Análise Matemática. Como por exemplo números racionais na forma decimal e fracionária. Inicialmente provocamos o grupo a responder a questão "0,999... é igual a 1? ", estimulando-os a que justifiquem as suas conjecturas. A maioria dos Jovens Talentos e alunos de Ensino Básico não bolsistas responderam que não era igual. Logo em seguida, alguém lembrou de um artifício de cálculo que é usado no Ensino Fundamental quando se trata de determinar a fração geratriz de uma dízima periódica. Esta pesquisa continua em desenvolvimento e é nossa intenção discutir junto aos professores pesquisadores as diferenças existentes entre as concepções da análise convencional e não convencional.

Palavras-chave: Análise matemática – número racional – forma decimal e fracionária

Justificativa

Este relato envolve uma das atividades realizadas com alunos da Educação Básica participantes da Pesquisa "A Análise Matemática Visitando a Escola Básica", que vem sendo desenvolvido, desde agosto de 2007, pelo Grupo de Pesquisa Educação Matemática, Cultura e Cidadania (GPEMCC). Dentre estes alunos, sete são pesquisadores bolsistas de iniciação científica do Projeto Jovens Talentos, da FAPERJ, e três são não bolsistas voluntários. Estes alunos, que freqüentam as séries terminais do Ensino Médio em Escolas Estaduais, em Vassouras, são coordenados nesta pesquisa por dois professores da Universidade Severino Sombra.

Um dos objetivos de nosso trabalho é levar o grupo à reflexão sobre conceitos pertinentes à Análise Matemática, muitos deles introduzidos desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, como, por exemplo, identificar as maneiras de escrevermos um mesmo número racional nas formas decimal e fracionária, estabelecendo a conexão entre diferentes representações.

Por meio de problemas curiosos propostos aos alunos, estamos na verdade auxiliando-os na construção do significado de tais conceitos matemáticos, bem como vivendo experiências que servirão de suporte às reflexões que nos propiciarão detectar obstáculos epistemológicos na construção de algumas idéias básicas de Matemática, como, por exemplo, o conceito de número racional.

Desenvolvimento

Inicialmente provocamos os participantes do grupo a responderem a questão "0,999... é igual a 1?", estimulando-os a que justificassem as suas conjecturas. A maioria dos alunos respondeu que não era igual.

Logo em seguida, alguém se lembrou de um artifício de cálculo que é usado no Ensino Fundamental quando se trata de determinar a fração geratriz de uma dízima periódica. Este artifício constitui-se em:

1. Chamar de x a fração geratriz que queremos determinar:

$$x = 0{,}999... \qquad (1)$$

2. multiplicar ambos os membros da igualdade por um valor conveniente, de forma a obter-se uma igualdade equivalente onde seja possível subtrair-se a igualdade (1) da nova igualdade, termo a termo, a fim de se eliminar a parte decimal. Assim, neste caso, se multiplicarmos ambos os membros da igualdade (1) por 10, temos:

$$10 \,.\, x = 10 \,.\, 0{,}999...$$

$$10x = 9{,}999... \qquad (2)$$

3. Efetuando-se (2) – (1), obtemos: $9x = 9$

   Logo $x = 1$.

É interessante observamos que, mesmo diante da argumentação acima, alguns continuavam a afirmar que não era possível isto ser verdade, porque no primeiro membro da igualdade (1) estava faltando "alguma coisa" para ser exatamente igual 1. Eles demonstravam a insatisfação de que o fato de 0,999... representar uma aproximação, não garantia a igualdade.

Para desfazer a opinião de que aquele artifício "era coisa de mágico", optamos por construir com o grupo outros caminhos. Um deles, pela adição de um número infinito de termos de uma progressão geométrica, em que o módulo da razão é maior do que zero e menor do que um:

$$0,9999\ldots = 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + \ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \ldots$$

Dessa forma, observa-se que a dízima periódica pode ser identificada com a adição de infinitas parcelas de números racionais, quer estas estejam representados na forma decimal ou fracionária. Esta expressão representa a adição de um número infinito de termos de uma progressão geométrica (PG) decrescente, cujo primeiro termo é $a=\frac{9}{10}=0,9$ e a razão é $q=\frac{1}{10}=0,1$.

No caso da PG ser como a apresentada acima, onde $a_1=\frac{9}{10}$ e $q=\frac{1}{10}$, podemos calcular a soma de um número infinito de termos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

Embora estes alunos do Ensino Médio ainda não conheçam a noção de limite, que significa a idéia do comportamento da função na vizinhança do ponto limite, isto é, a maior aproximação possível da função a este ponto, observamos que mesmo esta representação ainda não convenceu alguns alunos.

Consideramos ser relevante registrar pelo menos uma das justificativas surgidas na defesa da resposta negativa. Um dos alunos, em mais de um momento (mesmo depois de termos feito uma revisão de como transformávamos decimais em frações), afirmava que 0,999... era igual à fração $\frac{999999\ \ldots}{1000000\ \ldots}$ e que portanto faltava alguma coisa para que o numerador fosse igual ao denominador. O "erro" na transformação do numeral decimal em fracionário seria conceitual ou seria tentativa de argumentação, mostrando a insatisfação diante da “falta” de algo? Conjecturamos que estes alunos estavam expressando, à sua maneira, a idéia dos infinitésimos.

Numa segunda etapa, o grupo decidiu sair a campo e levantar a opinião de pessoas de diferentes níveis de escolaridade, com relação a esta questão.

Eis a tabulação dos resultados:

0,999... é igual a 1?

Nível de escolaridade	sim	não	□
Ensino Fundamental incompleto	1	3	4
Ensino Fundamental completo	-	15	15
Ensino Médio incompleto	2	13	15
Ensino Médio completo	7	-	7
Ensino Superior incompleto	12	16	28
Ensino Superior completo	7	4	11
Pós-Graduação incompleto	2	-	2
Pós-Graduação completo	3	3	6
Não especificou	2		2
Total	**36**	**54**	**90**

No universo pesquisado, fora da equipe dos alunos de iniciação científica, a maioria das pessoas (60%) também não considera a igualdade verdadeira, discordando do que mostram os cálculos, feitos por meio de artifícios, usando conteúdos matemáticos.

Tal como em nosso experimento, MILANI (2002; 2003) também explorou a mesma questão. Seu universo constitui-se de quatro alunos de um curso de graduação em Física e seus resultados foram semelhantes aos aqui encontrados.

Refletindo sobre os resultados:

Historicamente é sabido que no século XIX o método dos infinitésimos, que fora desenvolvido por Leibniz em fins do século XVII, foi substituído pelo método dos limites (Cauchy) e isto redundou na aritmetização da Análise (Weierstrass). Ficava assim solucionada a segunda grande crise do pensamento matemático[1] e consolidava-se a conhecida Análise Convencional ou Standard.

[1] A primeira ocorrera na Antigüidade, quando os gregos perceberam o problema da incomensurabilidade, que só se solucionou com a criação dos números irracionais.

A Análise de Cauchy-Weierstrass - agora Análise Real – foi consolidada e edificada sobre dois alicerces fundamentais: os conceitos de número real e de infinito - tendo na operação de limite, tal como Weierstrass a definiu, sua operação fundamental. Assim, observando que o conjunto dos números reais R satisfaz ao axioma de Arquimedes (que estabelece que dados dois números positivos a,b com a<b, é sempre possível ultrapassar o segundo por adição sucessiva de termos iguais ao primeiro) pode-se perceber porque os infinitesimais não foram bem vindos a essa “nova análise” e banidos temporariamente do mundo acadêmico da matemática.

(REZENDE, 2002, p. 260)

Na década de sessenta do século XX, Abraham Robinson retoma a noção dos infinitésimos e surge a Análise Não-Standard, que trabalha no conjunto dos hiper-reais. Lembramos que a Análise Standard (no conjunto dos reais, com base em Cauchy) é a que usualmente é trabalhada em nossos cursos e livros.

A teoria matemática que sustenta e fundamenta o pensamento infinitesimal dos estudantes é chamada de Análise Não-Standard, que formaliza os infinitésimos trabalhados desde os tempos de Leibniz. Essa teoria foi criada por Abraham Robinson, por volta de 1960.
Os infinitésimos são elementos do conjunto dos hiper-reais, *R, que inclui os números reais. Um número hiper-real é definido como uma classe de equivalência de seqüências de números reais, cuja relação é dada por $(a_n)\sim(b_n) \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} / \ (a_n) = (b_n)\} \in U$, onde U é um ultra-filtro. Um infinitésimo é um hiper-real, cujo módulo é menor que qualquer real positivo, por exemplo, $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$.

(MILANI, 2003, p. 4)

Mas não podemos esquecer que a concepção da Análise Não-Standard é usada hoje em muitos campos profissionais. Pessoas que atuam com automação, por exemplo, usam esta visão. Cabe a nós - formadores de professores de Matemática - atualizar nossos currículos de Cálculo e Análise (ÁVILA, 2001; BALDINO, CABRAL, 2002; IEZZI, HAZZAN, 2002; MILANI, 2002, 2003; REZENDE; 2002) e, minimamente, aventarmos a existência de tal teoria, uma vez que ela está batendo às nossas portas até mesmo para um aluno de Ensino Médio que esteja freqüentando determinados cursos técnicos onde, devido à precisão de instrumentos, 0,999... *não é* igual a 1.

Não basta afirmarmos, mesmo que com prova matemática baseada no conjunto dos reais, que 0,999... é igual a 1. Há que levantarmos a questão, com bases históricas e científicas, adequando a explanação ao nível de nossa clientela.

Comentários sobre as etapas já vivenciadas:

Por meio desta atividade observamos alguns resultados parciais:

a) Por meio de problemas curiosos propostos a estes alunos estamos na verdade auxiliando-os a resgatar ou a construir os conceitos matemáticos, bem como vivendo experiências que servem de suporte aos professores pesquisadores do grupo.
b) Observamos também que a denominação de fração geratriz é apenas usada para as frações que "geram" dizimas periódicas, quando esta denominação deve ser aplicada também no caso das frações gerarem decimais exatas.
c) Muitos dos alunos ainda não tinham construído o conceito de número racional.

Esta pesquisa continua em desenvolvimento e é nossa intenção discutir junto aos professores pesquisadores as diferenças existentes entre as concepções da análise convencional e não convencional.

Referências bibliográficas:

ÁVILA, Geraldo – Análise Matemática para Licenciatura, Editora Edgard Blücher Ltda., 2001

BALDINO, R. R.; CABRAL, T. C. B. *Concepções infinitesimais na mat*emática. Rio Claro:Departamento de Matemática/IGCE/UNESP, 2000. (Relatórios Internos, 56/00)

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel – Fundamentos de Matemática Elementar, Atual Editora, 2002

MILANI, R. *Concepções Infinitesimais em um Curso de Cálculo*. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Univerisdade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

MILANI, R. O Pensamento Infinitesimal de Alunos de Cálculo. Comunicação Científica no Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 8.,2003Disponível em 15/3/2008, no site http://ccet.ucs.br/eventos/outros/egem/científicos/cc63.pdf .Pelotas: UCPel, 2003

REZENDE, W. M. O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 2003. Disponível, em 28/06/2007, no site http://www.professores.uff.br/wmrezende/Arquivos/Tese_Doutorado.zip .