Construção da Matemática e formalização do número natural

1. O número

Os números são um dos dois objetos principais de que se ocupa a Matemática. O outro é o espaço, junto com as figuras geométricas nele contidas.

Números são entes abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelos, que permitem contar e medir.

Os compêndios tradicionais dizem o seguinte:

"Número é o resultado da comparação entre uma grandeza e uma unidade. Se a grandeza é discreta, essa comparação chama-se *contagem e* o resultado é um número inteiro; se a grandeza é contínua, a comparação chama-se uma *medição* e o resultado é um número real".

Nos padrões atuais de rigor matemático, o trecho acima não pode e ser considerado como uma definição matemática, pois faz uso de idéias (como grandeza, unidade, discreta, contínua) e processos (como comparação) de significado não estabelecido.

2. O que é uma definição matemática?

É uma convenção que consiste em usar um nome, ou uma sentença breve, para designar um objeto ou uma propriedade, cuja descrição normalmente exigiria o emprego de uma sentença mais longa.

Por exemplo:

• *Angulo é* a figura formada por duas semi-retas que têm a mesma origem.

• *Primos entre si* são dois ou mais números naturais cujo único divisor comum é a unidade.

Na apresentação de uma teoria matemática, toda definição faz uso de termos específicos, os quais foram definidos usando outros termos, e assim sucessivamente. Este processo iterativo termina numa palavra, ou num conjunto de palavras (de preferência dotadas de conotações intuitivas simples) que não são definidas, isto é, que são tomadas como representativas de conceitos primitivos. Exemplos: ponto, reta, conjunto.

3. Termos primitivos e axiomas na Matemática

Para podermos empregar conceitos primitivos adequadamente, é necessário dispor de um conjunto de princípios ou regras que disciplinem sua utilização e estabeleçam suas propriedades. Tais princípios são chamados *axiomas* ou *postulados.* Os conceitos primitivos são objetos que não se definem e os axiomas são proposições que não se demonstram.

O *método axiomático* de construção de uma teoria matemática consiste em:

* formular uma lista dos conceitos primitivos;

*enunciar os axiomas necessários;

*definir as demais noções;

*demonstrar afirmações e resultados seguintes.

4. Teoremas, lemas e corolários

As proposições a serem demonstradas[1] chamam-se *teoremas* e suas conseqüências imediatas são denominadas *corolários.* Uma proposição auxiliar, usada na demonstração de um teorema, é chamada um *lema.*

3. O Conjunto dos Números Naturais

Lentamente, à medida que se civilizava, a humanidade apoderou-se desse modelo *abstrato* de contagem (um, dois, três, quatro,...) que são os números naturais.

Na história da matemática, a noção intuitiva de número, nascida da contagem foi evoluindo até tornar-se uma construção teórica, desenvolvida com o método axiomático.

Podemos, hoje, descrever concisa e precisamente o conjunto **N** dos números naturais, partindo dos conceitos primitivos de "número" e de "sucessor" e valendo-nos dos axiomas formulados pelo matemático italiano Giuseppe Peano[2], no limiar do século 20.

A teoria dos números naturais

N = {1, 2, 3, ...} é um conjunto, cujos elementos são chamados números naturais. A essência da caracterização de N reside na palavra "sucessor".

---

[1] Se você quiser saber mais sobre o assunto, veja em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Prova_por_constru%C3%A7%C3%A3o **ou em** Texto Prova

[2] Se você quiser saber mais sobre o assunto, veja em: http://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_natural#A_hist.C3.B3ria_dos_n.C3.BAmeros_naturais_e_o_estado_do_zero ou em Texto Número Natural Wilkipedia

Intuitivamente, quando n e n' pertencem a N, dizer que n' é o *sucessor* de n significa que n' vem logo depois de n, não havendo outros números naturais entre eles.

Neste texto, adotamos N = {1, 2, 3 ...}. Você poderá encontrar em outros textos uma versão para N = {0, 1, 2, 3, ...}):

Axiomas de Peano.

a) Todo número natural tem um único sucessor;

b) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;

c) Existe um único número natural, chamado *um* e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;

d) Seja X um conjunto de números naturais Se 1 pertence a X e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então X = **N**.

Do último postulado, vem o Princípio da Indução, um método de demonstrações de proposições a respeito dos número naturais:

A proposição P(n) é válida para todos os números naturais n, se:

1) P(1) é válida
2) Se P(n) é válida então P(n+1) é válida.

Esta última condição quer dizer que:

se, supondo que, a proposição vale para um natural n,

for possível mostrar, usando esta hipótese , que ela é válida para o sucessor de n, n+1,

então certamente ela é válida para todos os números naturais.

A hipótese P(n) é válida, denomina-se Hipótese de Indução.

Todas as definições sobre números naturais partem destes axiomas e todas proposições podem ser demonstradas como consequência deles, tornando-se afirmações.

É essencial que você assista os vídeos que mostram aplicações do Princípio da Indução:

Vídeo 1: indução e soma de inteiros

Vídeo 2: indução e soma de uma progressão geométrica

Definições

Operação de adição

A operação de adição, nos números naturais, é definida a partir da idéia de sucessor.

É definido um símbolo + para expressar o sucessor de um número.

2 é o sucessor de 1, 2 = 1+1;

3 é o sucessor de 2, 3 = 2+1;

4 é o sucessor de 3, 4 = 3+1;

Formalmente: se $a \in$ **N**, $a+1$ é o sucessor de a

Adição

Operação que faz corresponder aos números $m, n \in$ **N** a soma $m+n$.

Símbolo: “+“

Elementos: parcelas

Resultado da adição: soma.

A soma $m+n$ é o número natural que se obtém a partir de m aplicando-se n vezes seguidas a operação de tomar o sucessor.

$$m + n = (((m+1) +1) +1) +1......+1)$$, operado n vezes.

Propriedades:

A adição + em **N**, é uma operação:

1). fechada

Para todos os elementos a, b Є **N**, $a + b$ Є **N**

1) unívoca

Se $a = a'$ e $b = b'$ então $a + b = a' + b'$.

De outro modo: se $a = b$ então $a + c = b + c$.

2) comutativa

A ordem das parcelas não altera o resultado $a + b = b + a$

3) associativa,

As parcelas, a, b, c podem ser agrupadas de modos diferentes

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Multiplicação

Operação que faz corresponder aos números $m,n \in$ **N** o produto $m.n.$

Símbolos: “x“ ou **“.”**.

Eementos: fatores

Resultado da multiplicação: produto.

$m \; x \; n = \; n + n + \ldots + n$, operado m vezes.

Propriedades

A multiplicação em **N** é uma operação:

1) fechada

Para todos os elementos *a*, *b* Є N*,* ab Є **N**

2) unívoca

Se $a = a'$ e $b = b'$ então $a \,.\, b = a' \,.\, b'$.

De outro modo: se $a = b$ então $a.c = b.c$

3) comutativa,

A ordem dos fatores não altera o resultado: $a\,b = b\,a$

4) associativa,

Os fatores podem ser agrupados de modos diferentes

$(a\ b)\ c = a\ (b\ c)$

1) com a propriedade do elemento neutro,

O produto do número 1 por qualquer fator, não altera seu valor $1.a = a$

Consequentemente: $m = 1m$

$m + m = 1m + 1m = 2\ m$; $3m + 5m = 8m$, etc.

A operação de multiplicação possui a propriedade distributiva com relação à adição:

$c\ (a + b) = ca + cb.$

É essencial que você **v**eja o modelo geométrico das propriedades da multiplicação e adição na **Apresentação: operações em N.**

Operação de subtração

Operação que faz corresponder aos números $m,n \in$ **N** a diferença $m - n$

Símbolo: "-"

Elementos da subtração: minuendo m e subtraendo n

Resultado da subtração: resto ou diferença.

$m - n = p$ se e só se $m = p + n$

A operação de subtração não é fechada em **N**, pois existem muitos pares de números m, n tais que $m - n$ não é um número natural.

Para estabelecer as condições em que $m - n$ é número natural, define-se uma relação de ordem em **N**.

Relação de Ordem Estrita

Dados m, n e **N**, diz-se que m *é menor do que* n*.,* e escreve-se $m < n$

se e só se

existe um $p \in$ **N** tal que $n = m + p$.

A relação $m < n$ tem as seguintes propriedades:

1) Se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$.
2) Dados m, n, vale uma, e somente uma, das alternativas:
   $m = n$, $m < n$ *ou* $n < m$
3) Se $m < n$ então, para qualquer *p*, tem-se $m + p < n + p$ e $mp < np$

Poderíamos ter uma definição para ordem não estrita, a relação ≤, "menor ou igual a".

Definindo um novo conjunto que amplia N

A constação mais crítica a respeito do não fechamento da subtração em N, diz respeito à subtração *n* - *n*.

A intuição diz que *n-n* é "nada".

Mas, considerando em N = {1, 2, 3, ...} , não existe um número natural c correspondente a $n - n$ tal que $n - n = c$, pois, neste caso, teríamos $n+c = n$ o que contraria a definição de adição: a soma de $n+c$ consiste em encontrar o sucessor de n , um número c de vezes.

Para contemplar esta falta, é preciso definir um novo número e incluí-lo em N.

Define-se o número Zero, com símbolo 0.

Para qualquer n natural, $n - n = 0$

Conseqüência:

Sabe-se que $n - n = 0$ se e só se e $0 + n = n$.

Deste modo, o número *0* é elemento neutro da adição e é único.

CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS Z_+

Reunindo os naturais com o zero, definimos um novo conjunto, denominado, conjunto dos inteiros (não negativos, pois ainda não definimos os negativos).

Adotamos a seguinte notação: $\mathbf{Z}_+ = \{ 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

(A notação $\mathbf{Z}_+$ lembra que ainda não foram definidos os números negativos)

Neste conjunto são válidas todas operações definidas em **N** com todas as suas propriedades: associativa e comutativa da multiplicação e da adição; distributiva; elemento neutro da multiplicação.

Em $\mathbf{Z}_+$, a adição também tem a propriedade do elemento neutro:

para qualquer inteiro $n \in \mathbf{Z}_+$, $n + 0 = n$

Operação de divisão

Operação que faz corresponder aos números $m, n \in \mathbf{Z}_+$, o quociente $m : n$.

Símbolo " **:** "

Elementos da divisão $m : n$: m o dividendo e n o divisor.

Resultado da divisão: quociente.

$m : n = p$ se e só se $m = p \cdot n$.

A operação de divisão não é fechada em $\mathbf{Z}_+$, pois existem muitos pares de números m, n tais que $m : n$ não é um número inteiro.

Para verificar em que condições $m : n$ é número inteiro, define-se a relação de "ser múltiplo" ou "ser divisor".

Seguiremos a estudar a divisão, no Módulo II, quando definiremos "fração".

Para ter uma idéia de como se desenvolvem as provas de algumas propriedades dos números, é essencial que você acompanhe a **Apresentação : demonstrações em N e Z+** .

Observação: Você vai encontrar autores que, em lugar de apontarem a subtração e a divisão como *operações não fechadas*, nos inteiros, afirmam que são *operações não definidas*, neste conjunto, pois uma operação só se define com a propriedade do fechamento. Optamos aqui por seguir a orientação de Caraça (1998) que desenvolve os conjuntos numéricos enfatizando a busca do fechamento das operações.

Algoritmos das operações com números inteiros

Os algoritmos usuais, praticados na escola, para as quatro operações com números naturais, baseiam-se no sistema numérico decimal.

Todo número natural pode ser decomposto em potências de 10 (10^0=1, 10^1=10, 10^2 = 100, 10^3 = 1000, etc) e é composto por dígitos de 0 a 9, posicionados de tal forma que a cada posição corresponde a uma ordem de grandeza:

9321 = 9x1000 + 3 x 100 + 2 x 10 + 1.

Todas as operações com naturais podem ser resolvidas com a decomposição dos números.

Por exemplo, para calcular 14 x 7, uma das maneiras de operar consiste em decompor o número: 10 x 7 + 4 x 7.

As técnicas operatórias usualmente ensinadas na escola apóiam-se nas regras do sistema de numeração decimal e na decomposição dos números.

Não vamos tratar aqui, explicitamente, destes algoritmos, mas você pode procurar detalhes neste endereço:
http://educar.sc.usp.br/matematica/matematica.html

GLOSSÁRIO

Axioma

Conceito primitivo

Corolário

Demonstração

Lema

Operação

Postulado

Princípio da Indução

Se e somente se

Teorema

Este texto foi adaptado de:

1. CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1998, páginas 35 a 45, trecho do capítulo 2:1 – A construção do campo racional.
2. LIMA, Elon Lages, CARVALHO, Paulo César pinto, WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio**. Coleção do Professor de Matemática. Vol. 1. Sociedade Brasileira de Matemática, 2001, capítulo 2 (Números Naturais), página 25 a 34.