$^{-}1 \times {}^{-}1 = {}^{+}1$?

Méricles T. Moretti
PPGECT/MTM/CFM/UFSCUFSC

As regras na multiplicação de números relativos (por exemplo, a situação $-1\times-1= 1$) foram durante muitos séculos incompreendidas. É somente em 1867 que H. Hankel dá a resposta definitiva para a questão com o seguinte resultado: a única multiplicação nos reais que prolonga a multiplicação usual sobre R_{+}, respeitando as distributividades à esquerda e à direita, é aquela que obedece as regras usuais dos sinais. Quer dizer, para manter tais propriedades com os reais não-positivos devemos definir as regras dos sinais da maneira como fazemos na escola, quando abordamos os números relativos.

Portanto, essas regras são artificias, pura invenção da mente humana e não encontram nenhuma referência concreta na natureza. O teorema acima faz cair por terra a idéia da existência de um bom modelo de explicação. Por exemplo, o modelo comercial de ganho e perda é um obstáculo à compreensão das propriedades multiplicativas. Neste modelo, o aluno se convence facilmente, na situação, $-3 + 4 = +1$, associando -3 a uma dívida e +4 a um ganho, mas dificilmente será convencido do mesmo em $-4 \times -2 = +8$. Além disso, esta associação da operação "+" ao verbo ganhar (adquirir, ter a mais, etc) e à operação "-" ao verbo perder (endividar, desaparecer, carregar, levar, gastar, etc), poderá acarretar dificuldades na resolução de certos tipos de problemas em aritmética, como por exemplo, o seguinte: "Luiz foi ao mercado, com uma certa quantidade de reais, para comprar balas. <u>Gastou</u> R$ 3,00 e ainda saiu com R$ 5,00. Quantos reais tinha Luiz antes de entrar no mercado ?" O termo <u>gastou</u> pode induzir diretamente à operação de subtração, equivocada para a solução deste problema.

As regras da multiplicação colocam o professor frente a tipo de dilema: ele está diante de uma convenção estabelecida cuja explicação (o teorema Hankel citado acima) ultrapassa a capacidade de compreensão do aluno na escola fundamental. Além disso, as explicações alternativas encontradas em manuais escolares criam problemas que podem ser duradouros para o aluno. O que fazer?

Antes de dar uma resposta, vamos reexaminar com mais cuidado o significado deste teorema. Consideremos as regras da multiplicação definidas em cada uma das tabelas seguintes (não são as únicas) e aplicadas aos exemplos $-1\times(-3 + 2)$ e $(-3 + 2) \times -1$.

Regras Usuais

×	+	-
+	+	-
-	-	+

Regras 2

×	+	-
+	+	+
-	-	+

Regras 3

×	+	-
+	+	-
-	-	-

Para o exemplo $-1\times(-3 + 2)$

Com as regras usuais, temos:
- eliminando os parênteses: $-1\times(-3 + 2) = -1\times-1 = 1$
- usando a distributividade à direita: $-1\times(-3 + 2) = (-1\times-3) + (-1\times 2) = 3 - 2 = 1$

Usando as regras 2:
- eliminando os parênteses: $-1\times(-3 + 2) = -1\times-1 = 1$
- usando a distributividade à direita: $-1\times(-3 + 2) = (-1\times-3) + (-1\times 2) = 3 - 2 = 1$

Usando as regras 3:
- eliminando os parênteses: $-1\times(-3 + 2) = -1\times-1 = -1$
- usando a distributividade à direita: $-1\times(-3 + 2) = (-1\times-3) + (-1\times 2) = - 3 - 2 = -5$

Com as regras 3 aplicadas ao mesmo exemplo, obtêm-se os resultados distintos –1 e –5, conforme o modo de calcular. Com as regras usuais e com as regras 2, o resultado obtido é o mesmo 1. Testemos, novamente estas duas últimas regras para o exemplo $(-3 + 2) \times -1$.

Com as regras usuais, temos:
- eliminando os parênteses: $(-3 + 2) \times -1 = -1\times-1 = 1$
- usando a distributividade à esquerda: $(-3 + 2) \times -1 = (-3\times-1) + (2\times -1) = 3 - 2 = 1$

Com as regras 2:
- eliminando os parênteses: $(-3 + 2) \times -1 = -1 \times -1 = 1$
- usando a distributividade à esquerda: $(-3 + 2) \times -1 = (-3\times-1) + (2 \times -1) = 3 + 2 = 5$

Estes exemplos mostram-nos que as regras que preservaram a distributividade tanto à direita quanto à esquerda, foram as usuais. Dentre as várias tabelas de multiplicação possíveis (acima apresentamos apenas três), devemos escolher somente uma delas. É possível mostrar (Teorema de Hankel) que as únicas regras que preservam a distributividade tanto à direita quanto à esquerda são as usuais e, por isso, a escolha recaiu por conveniência sobre estas.

O momento é oportuno para se abrir uma discussão com os alunos sobre o papel das convenções na matemática e nas nossas vidas de uma maneira geral, como por exemplo, as convenções e regras (leis) que disciplinam o trânsito nas ruas.

Em matemática, as regras de sinais são uma delas. Podemos citar outras, como a hierarquia nas operações básicas. O resultado de $2+3\times 4$ é 14 e não 20, por causa de uma convenção: a multiplicação (ou divisão) tem preferência sobre a adição (ou subtração). Poderia ser diferente, mas, uma vez estabelecida, ela é adotada por todos. Convencionou-se, também, que a quebra da hierarquia pode ser feita com a inclusão de parênteses. Assim, obteremos 20 da maneira seguinte: $(2+3)\times 4$.

A explicação do porquê das regras de sinais está no teorema de Hankel. Cabe ao professor fazer com que os alunos possam <u>compreendê-la</u> sem recorrer a artifícios estranhos à matemática que podem se tornar problemáticos mais adiante.

Acredito que as explicações dadas, através dos exemplos acima, sejam suficientes e apontem um bom caminho à compreensão dos alunos.

Bibliografia

Glaeser, G. Épistémologie des nombres relatifs. RDM, 1(2), 303-346, 1981.

Duval, R. Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995.