**Construção dos números racionais,**

**Números fracionários e operações com frações**

O número racional pode ser definido a partir da aritmética – fechamento da operação de divisão entre inteiros – ou partir da geometria - medidas de segementos . Neste texto, optamos pela abordagem aritmética

**Divisão entre números inteiros**

Como já vimos, a operação de divisão é definida para números inteiros do seguinte modo:

$m : n = p$ *se e só se* $m = n \,.\, p$ , com $n \neq 0$

Nos inteiros, divisão não tem a propriedade fechamento, pois o quociente $m : n$ é inteiro se e só se $m$ é múltiplo de $n$ e $n \neq 0$.

**Múltiplo e divisor de um número**:

Para $a, b \in Z+$

1) $m$ é múltiplo de $n$ se e só se existe um inteiro $p$, tal que $m = p.b$

2) $n$ é divisor de $m$ se existe um inteiro p, tal que $m : n = p$

Existem propriedades para os números múltiplos e para a divisão:

Para $m, n \in Z+$

1. *m* é múltiplo de 1 e múltiplo dele mesmo, se não for nulo.
2. 1 é divisor de todos os números inteiros.
3. 0 não divide número algum
4. 0 é múltiplo de todos os números não nulos.
5. Para cada divisão $m : n$, com $n \neq 0$, existe uma família infinita de divisões que têm o mesmo quociente. Estas divisões são equivalentes e são obtidas combinando pares de múltiplos e pares de divisores de *m* e *n*, isto é, dados $m$, $n \neq 0$ e $p \neq 0$, $m : n = pm : pn$
6. Para cada $m$, $n \neq 0$, $m : n = 0$ *se e só se* $m = 0$.

É essencial que você estude as demonstrações destas propriedades, em **Apresentação: múltiplos e divisores.**

**Fração, número fracionário, reprentação fracionária**

Para completar a operação de divisão, define-se um novo conjunto numérico, o conjunto dos racionais: Q+

Para isto, amplia-se o conjunto dos inteiros, incluindo todo os quocientes $m : n$ de números inteiros, desde que $n \neq 0$.

Neste caso, define-se um símbolo para representar o resultado da divisão de dois inteiros quaiquer *m* e *n*, $n \neq 0$, $m : n = \frac{m}{n}$

A este símbolo $\frac{m}{n}$ denomina-se fração ou número fracionário.

**Definição de número racional**

Chama-se número racional a um número que pode ser representado da forma $\frac{m}{n}$, com $m$ e n inteiros e $n \neq 0$.

O conjunto dos números racionais inclui todos os números resultantes da divisão de inteiros.

Q+= { $\frac{m}{n}$ tais que m, n Є Z e n ≠0}

A fração $\frac{m}{n}$ é uma forma de representação do número racional.

O número racional admite diferentes formas de representação: representação fracionária ( fração ou número fracionário), representação decimal (número decimal) ou representação porcentual ( número porcentual ).

**Definições e operações com frações**

Em particular, os racionais $\frac{m}{1} = m$ e $\frac{m.p}{p}$ são inteiros e racionais.

Isto é, conjunto dos inteiros está contido no conjunto dos racionais.

Exemplos de números racionais fracionários:

$\frac{2}{1} = 2$; $\frac{8}{4} = 2$; $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Existem quocientes que são equivalentes:

*Se m, n, p ≠ 0, m : n = pm : pn.*

Estes quocientes determinam **frações equivalentes**: $\frac{m}{n} = \frac{pm}{pn}$

Dado um racional qualquer $\frac{m}{n}$, todo racional da forma $\frac{pm}{pn}$ ,com $p \neq 0$ ,é igual a $\frac{m}{n}$

Uma fração $\frac{m}{n}$ pode ser representada por uma **fração irredutível** equivalente, através de divisões sucessivas de ambos os números, numerador e denominador, pelos seus divisores comuns ou, mais rapidamente, dividindo pelo maior divisor comum entre os dois números. Numa fração irredutível, o numerador e o denominador são números primos entre si.

Exemplos de frações equivalentes e frações irredutíveis:

$\frac{2}{1} = \frac{8}{4} = 2$

$\frac{4}{8} = \frac{1.4}{2.4} = \frac{1}{2}$

$\frac{10}{50} = \frac{1.10}{5.10} = \frac{1}{5}$

$\frac{6}{21} = \frac{2.3}{7.3} = \frac{2}{7}$

**Número primo**

Um inteiro $p$, não nulo, é um **número primo** se admite dois e apenas dois divisores: 1 e ele mesmo $p$.

Exemplos: 2; 3; 5; 23.

O número 1 não é considerado primo, pois só tem um divisor, ele mesmo.

**Primos entre si**

Dois inteiros p e q são **números primos entre si** se o único divisor comum entre eles é 1.

Exemplos de números primos entre si estão nas frações irredutíveis acima:

1 e 2; 1 e 5; 9 e 16; 9 e 25

A seguir, definimos as operações com racionais :

As justificativas das operações encontram-se na **Apresentação : definições e justificativas das operações com racionais**. É essencial que você estude este material.

Nas definições, *m, n, p, q* e outras simbologias dizem respeito a números inteiros. Sempre que os símbolos estiverem representando denominadores das frações, está implícito que é um número não nulo.

Quando quisermos representar um racional com uma única letra, isto ficará claro.

**Adição**

*Definição*

$$\frac{m}{p} + \frac{n}{q} = \frac{m.q}{p.q} + \frac{n.p}{q.p} = \frac{m.q+n.p}{q.p}$$

**Subtração**

$$\frac{m}{p} - \frac{n}{q} = \frac{m.q}{p.q} - \frac{n.p}{q.p} = \frac{m.q-n.p}{q.p}$$

**Relação de equivalência**

Suponha duas frações irredutíveis: $\frac{m}{p}$ e $\frac{n}{q}$

Define-se $\frac{m}{p} = \frac{n}{q}$ e diz-se que $\frac{m}{p}$ é uma fração equivalente a $\frac{n}{q}$

se e só se $\frac{m}{p} - \frac{n}{q} = 0$.

$$\frac{m}{p} = \frac{n}{q} \text{ se e só se } mq = np$$

Por exemplo, para comparar 3/6 com 1/2:

3.2 = 6 e  6.1 = 6 logo 3/6 = 1/2.

**Relação de ordem**

Suponha duas frações irredutíveis: $\frac{m}{p}$ e $\frac{n}{q}$ .

Define-se $\frac{m}{p} > \frac{n}{q}$ se e só se $\frac{m}{p} - \frac{n}{q} > 0$.

Isto significa:

$$\frac{m}{p} - \frac{n}{q} = \frac{m.q}{p.q} - \frac{n.p}{q.p} = \frac{m.q - n.p}{q.p} > 0$$

O que equivale a dizer : $\frac{m}{p} > \frac{n}{q}$ se e só se $mq > np$

Por exemplo, para comparar 3/7 com 4/9:

3.9 = 27 e 4.7 = 28 logo 4/9 > 3/7.

**Multiplicação**

*Definição*

$$\frac{m}{p} \cdot \frac{n}{q} = \frac{m.n}{p.q}$$

**Divisão**

Define-se a divisão a partir desta noção de oposto multiplicativo.

Sabe-se que, nos números inteiros (não nulos) que a : a = 1

Pelo princípio da permanência (as regras válidas nos inteiros devem permanecer válidas no novo conjunto), tem-se que: $\frac{m}{n} : \frac{m}{n} = 1$ (1)

Sabe-se que, nos racionais, $\frac{m}{n} . \frac{n}{m} = 1$ (2)

Pode-se igualar (1) e (2):

$\frac{m}{n} : \frac{m}{n} = \frac{m}{n} . \frac{n}{m} = 1$

Por coerência, define-se divisão:

$$\frac{m}{p} : \frac{n}{q} = \frac{m.q}{n.p}$$

**Propriedades das operações**

Todas as propriedades das operações com inteiros são válidas neste novo conjunto numérico:

a) Leis comutativas e associativas da adição e da multiplicação;

b) Lei distributiva da multiplicação com relação à adição

c) Existência dos elementos neutros da adição (0) e da multiplicação (1);

Neste conjunto, existe uma nova propriedade:

d) Propriedade do Elemento Inverso da Multiplicação

Para cada racional

$\frac{m}{n}$, não nulo, existe um e só um elemento inverso multiplicativo $\frac{n}{m}$ tal

que $\frac{m}{n} . \frac{n}{m} = 1$.

É fácil ver, pela regra da multiplicação, que: $\frac{m}{n} . \frac{n}{m} = \frac{m.n}{n.m} = \frac{m.n}{m.n} = 1$

A propriedade da existência do elemento oposto (ou simétrico) aditivo será apresentada mais tarde, quando definirmos os números negativos.

Reforçamos as Leis do Cancelamento da adição e da multiplicação, que já foram demonstradas no conjunto dos inteiros:

e) Lei do Cancelamento para Adição

Se x,y e z representam números racionais

Se x + y = x + z então y = z

f)Lei do Cancelamento para Multiplicação

Se x,y e z representam números racionais, não nulos,

Se xy = xz então y = z

A seguir tratamos da potenciação.

Todas as propriedades apresentadas neste texto são justificadas, na **Apresentação: definições e propriedades das potências.** É essencial que você estude o material desta apresentação.

## POTENCIAÇÃO

Neste módulo, vamos restringir-nos à definições de potenciação com expoente inteiro, positivo, e base fracionária.

Este assunto vai ser plenamente desenvolvido quando tratarmos do conjunto dos reais completo, incluindo reais negativos.

### Definição

A potenciação é a operação que faz corresponder ao **número racional *a* (não nulo) e ao número inteiro positivo *n*, a potência $a^n$.**

Define-se a potência $a^n$ como o produto de n fatores iguais a a:

$$a^n = a.a.a...a \ , \ n \text{ vezes}.$$

Base: a >0 racional

Expoente : $n > 0$ *inteiro*

**Propriedades da Potenciação**

**Considerando a base como um racional não nulo**

**e o expoente como um inteiro positivo**

1ª propriedade: Uma multiplicação de potências de mesma base pode ser transformada em uma só potência.

**Conservamos a base e somamos os expoentes.**

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

2ª propriedade: Um quociente de potências de mesma base pode ser transformado em uma só potência.

**Conservamos a base e subtraímos os expoentes.**

$$a^n / a^m = a^{n-m}$$

3ª propriedade: Um produto elevado a um expoente pode ser transformado num produto de potências, com o mesmo expoente.

**Conservamos o expoente, multiplicamos duas potências com o mesmo expoentes.**

$$(a.b)^m = a^m b^m$$

4ª propriedade: Uma potência elevada a outra potência pode ser transformada em uma única potência.

**Conservamos a base e multiplicamos os expoentes.**

$$(a^{n})^{m} = a^{nm}$$

8ª propriedade: **Base fracionária** $a = p/q,\ q \neq 0.$

Em uma fração elevada a um expoente, podemos elevar cada número a esse expoente.

$$(1/q)^{n} = 1/q^{n}$$

$$(p/q)^{n} = p^{n}/q^{n}$$

**ESTUDANDO AS OPÇÕES PARA INCLUSÂO DO ZERO:**

$$a^{0} = 1$$

$$0^{n} = 0$$

**$0^0$ é uma indeterminação**

## RADICIAÇÂO

Define-se raiz n de x, para x racional positivo, como operação inversa da potência.

$$\sqrt[n]{x} = y \text{ se e só se } y^n = x$$

**n>0 inteiro**

**x>0 racional**

Exemplos

$\sqrt[3]{8} = 2$ pois $2^3 = 8$

$\sqrt[5]{1/32} = 1/2$ pois $(1/2)^5 = 1/32$

**9ª propriedade: Expoente fracionário**

Em um numero racional positivo qualquer, elevado a um expoente fracionário, podemos elevar o número com expoente igual ao numerador e tirar a raiz com índice igual ao denominador.

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$$

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

Exemplos

$5^{2/3} = \sqrt[3]{5^2}$

$\sqrt{25} = 25^{1/2} = 5$

Como conseqüência desta propriedade, temos:

$$\sqrt[n]{x} \; \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{(x.y)}$$

A potenciação é operação fechada nos inteiros positivos, pois decorre da multiplicação, mas quando extendida aos números racionais deixa de ser.

Mas radiciação não é fechada nos inteiros e tampouco nos racionais.

Mostraremos logo mais que raiz quadrada de 2 não é um número racional. Na verdade qualquer raiz não exata de positivos gera um número irracional.

Exemplos: $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{6}; \sqrt{7}; \sqrt{8}; \sqrt{10}; \sqrt{11}; \ldots$ *são números irracionais.*

$\sqrt{4}; \sqrt{9}; \sqrt{16}; \sqrt{25};\ldots$ e as demais raízes exatas, são inteiros e racionais

Quando incluirmos os números negativos, veremos o problema das raízes:

$\sqrt{-4}; \sqrt{-9}; \sqrt{-16}; \sqrt{-25};\ldots$

No módulo que trata dos Números Reais Relativos, voltaremos ao tema das potências.

## GLOSSÁRIO

Fração

Formas de representação

Potenciação

Radiciação

**Este texto foi fundamentado em:**

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1998, páginas 35 a 45, trecho do capítulo 2:1 – A construção do campo racional.