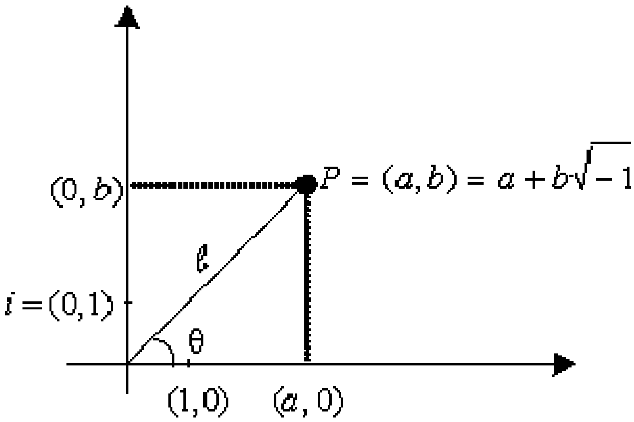
Uma Introdução ao estudo dos Números Complexos

Renate Watanabe

M. Sc. Illinois Univ.

Prof. Unive. Mackenzie

Prof. no E.E.S.G. Virgília Rodrigues Alves Carvalho Pinto



Ao iniciar o estudo dos números complexos no 2o grau, o professor, em geral, enfrenta um dilema: Deve ele apresentar os números complexos simplesmente como sendo "números da forma $a + bi$ onde $i^2 = -1$" ou como "pares ordenados de números reais sujeitos a duas operações a serem definidas"?

Os que adotam a primeira opção argumentam que ela prima pela simplicidade e, perguntam, onde está o aluno que se perturba, ou sequer percebe, que não lhe foi dada a menor idéia do que venha a ser o "vezes" em bi ou o "mais" em $a + bi$ e que, na verdade, nada lhes foi dado. Se os alunos não se atrapalham e acertam os exercícios, o que mais se pode querer?

Já a outros professores desagrada fazer tal apresentação só por ser ela mais simples, num quase abuso da boa fé dos alunos. Reconhecem eles que a introdução dos números complexos como pares ordenados é bastante artificial e certamente não esclarecedora. Mas, parece lhes ser uma introdução mais honesta.

Este artigo (parcialmente contido em um livro didático a ser publicado) pretende mostrar que as dificuldades encontradas pelo professor integram a própria história dos números complexos. Cerca de 300 anos decorreram entre o uso ingênuo do "símbolo $a + bi$" e a sua formalização como "par ordenado de números reais sujeitos a duas operações". Se, no 2º grau, a introdução dos números complexos for feita paralelamente a um resumo de seu desenvolvimento histórico, não só ela se torna simples e não artificial, mas oferece uma inigualável oportunidade para mostrar o nascimento de um ente matemático, a desconfiança com que é inicialmente recebido mesmo por eminentes matemáticos da época, a sua permanência, apesar de tudo, por se ter mostrado útil, a sua aceitação definitiva após ter recebido uma interpretação concreta e, finalmente, a sua formalização.

Adotar no ensino tão somente a primeira opção é parar conceitualmente no século XVI. Adotar a segunda opção é inverter o processo histórico.

Eis uma sugestão de como proceder:

Um pouco de história

Por volta de 1500 um pensamento corrente entre os matemáticos era o seguinte: "O quadrado de um número positivo, bem como o de um número negativo, é positivo. Não existe raiz quadrada de um número negativo porque um número negativo não é quadrado de nenhum número".

Tudo começou quando Cardano, em 1545, publicou um trabalho e propôs o seguinte problema: "Dividia 10 em duas partes de modo que o seu produto seja 40".

Esse problema, dizia ele, é "manifestamente impossível, mas, mesmo assim, vamos operar" (Cardano, além de jogador, astrólogo e professor, era também um médico de renome), e mostrou que

$$5+\sqrt{-15}$$

e

$$5-\sqrt{-15}$$

eram soluções do problema. Concluiu porém que essas expressões eram "verdadeiramente sofísticas e sua manipulação tão sutil quanto inútil". Cardano já havia deparado com essas raízes sofísticas ao resolver equações do 3º grau. Aplicando uma regra que ele mesmo publicara à equação:

$$x^3 = 15x + 4$$

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

e se via assim diante do seguinte dilema: sabia ele que, por um lado, $\sqrt{-121}$ não existia e, pelo outro, que 4 era solução da equação. Cardano não encontrou explicação. Seu grande mérito foi chamar atenção para o problema.

O passo seguinte foi dado por Bombelli (1560). Observando a equação acima lhe ocorreu que talvez as duas raízes cúbicas fossem expressões do tipo $a+b\sqrt{-1}$ e $p-\sqrt{-q}$ e que, essas, somadas da maneira usual, dessem 4: "Foi uma idéia louca, julgaram muitos e também eu fui dessa opinião. Tudo parecia ser mais um sofisma que uma verdade." E, de fato, Bombelli mostrou que as raízes cúbicas achadas por Cardano eram, respectivamente, iguais a $2+\sqrt{-1}$ e $2-\sqrt{-1}$ e que somadas dão 4.

Exercícios

Neste ponto pode se interromper um pouco a história e deixar a classe trabalhar com os símbolos, efetuando exercícios do tipo:

$$2\sqrt{-1}+5\sqrt{-1}$$

$$(1+3\sqrt{-1})+(2-7\sqrt{-1})$$

$$(3+2\sqrt{-1})(4-2\sqrt{-1})$$

operando da "maneira usual".

Deve-se observar que nesse estágio tudo é um jogo com símbolos porque não se sabe o que é $b\sqrt{-1}$ (seria o produto de um número real *b* por uma "coisa" que evidentemente não é um número real) e também não se sabe o que é $a+b\sqrt{-1}$ (soma de um número real com O QUÊ?). Essa era a situação no século XVI.

História (continuação)

Raízes quadradas de números negativos continuaram aparecendo nos séculos XVI, XVII, XVIII e não só no estudo de equações algébricas. O que mais perturbava os matemáticos era que essas raízes - na época, símbolos sem significado - manipuladas de acordo com as regras usuais da álgebra, forneciam resultados corretos que às vezes não podiam ser obtidos de outra maneira.

O mal estar que esses símbolos sem significado provocavam está refletido nos nomes que lhes foram atribuídos: números "sofísticos", "sem significado", "impossíveis", "fictícios", "místicos", "imaginários" (sendo que esse último nome, infelizmente, permanece em uso).

Leibiniz

São essas as palavra de Leibiniz (1702), grande matemático e filósofo, referindo-se à esses números: "...essas criaturas maravilhosas de um mundo ideal, quase anfíbios entre coisas que são e coisas que não são..."

E foi esse o *status* dos números complexos até 1831: símbolos, que por razões misteriosas forneciam resultados reais; úteis, o que justificava sua existência; supriam métodos e soluções para problemas de outro modo intratáveis; fantasmas, muitas vezes invocados mas nem sempre com desconfiança.

Gauss

Ver é crer

Foi uma publicação de Gauss, em 1831, que mudou totalmente esse quadro. Escreve ele, ao fazer considerações sobre os, por ele chamados "números complexos":

"Durante muitos anos considerei esta parte altamente importante da Matemática sob um ponto de vista diferente, onde às quantias imaginárias pode ser dada uma existência tão objetiva quanto às quantias negativas, mas até hoje não tive oportunidade de publicar meus pensamentos."

O pensamento de Gauss consistia em olhar para os números *a* e *b* do símbolo $a+b\sqrt{-1}$, como coordenadas de um ponto em um plano cartesiano e, assim, associar a cada um desses símbolos um ponto P do plano e reciprocamente. Deu também uma interpretação geométrica, visível, para a adição e multiplicação dos símbolos.

Ver foi crer. Bastou isso para que a existência dos números complexos ficasse definitivamente estabelecida, tornando a expressão "número imaginário", segundo um historiador, "uma grande calamidade algébrica, demasiadamente estabelecida para ser erradicada pelos matemáticos".

Formalização

Depois de tudo isso, formalizar a idéia de Gauss é a parte mais fácil. Ao invés de escrever o símbolo $a+b\sqrt{-1}$, escrevemos somente (*a*, *b*) que é um par ordenado de números reais e passamos a definir a soma e o produto desses pares de modo que eles se comportem como os antigos símbolos. Assim:

$$(a,b)+(c,d)=(?,?)$$

$$(a+b\sqrt{-1})+(c+d\sqrt{-1})=a+c+(b+d)\sqrt{-1}$$

(assim "funcionavam" os símbolos)

Então

Definição: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

E produto?

$$(a,b)\cdot(c,d)=(?,?)$$

$$(a+b\sqrt{-1})\cdot(c+d\sqrt{-1})=ac-bd+(ad+bc)\sqrt{-1}$$

Logo:

Definição: $(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

E assim, na linguagem de hoje dizemos:

Seja Â ^{2} o conjunto dos pares ordenados de números reais; definimos sobre Â^2 as operações + e . da seguinte maneira:

$$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$$

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$$

O conjunto Â ^{2}, munido dessas duas operações recebe o nome de "corpo dos números complexos". Os seus elementos são chamados números complexos.

Forma algébrica dos números complexos

Duas perguntas costumam ser feitas:

- Os números reais são números complexos?

  O número complexo é um par ordenado de números reais e, portanto, não é um número real. Mas, se *a* é real, os pares ordenados (*a*, 0) se comportam, nas operações como os números reais.

  Temos:

$$(a,0)+(b,0) = (a+b,0)$$

e

$$(a,0)\cdot(b,0) = (ab,0)$$

  Por isso é costume identificar o número complexo (*a*, 0) e o número real *a*. "Identificar" no 2^o grau é uma maneira elegante de dizer "fazer de conta que é a mesma coisa", apesar de não ser. Esse tipo de identificação não é novidade para os alunos. Eles sempre

identificaram por exemplo, o número racional $\frac{2}{1}$ e o número inteiro 2 sem que isso causasse confusão.
Portanto, dizemos que todo número complexo (a, 0) é a "mesma coisa que" o número real a e sem mais, escrevemos a no lugar de (a, 0). Também dizemos: Â é um subconjunto de C (C é o conjunto dos complexos).

- E o místico $\sqrt{-1}$, como ficou?

Deixou de ser místico: virou o par ordenado (0, 1). Mas, por causa do seu papel importante, esse par é designado (desde o tempo de Euler) por um símbolo especial: i e conserva seu nome histórico: unidade imaginária.

A introdução desse símbolo i permite a chamada representação algébrica dos números complexos:

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,b)\cdot(0,1) = a + bi$$

sendo que agora todos os símbolos estão bem definidos.

Bibliografia

- História da Matemática
  Carl B. Boyer
  Editora Edgard Blucher Ltda.

- Historical Topics for the Mathematics Classroom
  The National Council of Teachers of Mathematics

- Number The Language of Science
  Tobias Dantzig
  The Free Press – New York

- Men of Mathematics
  E. T. Bell
  Simon and Schuster – New York