HÁ 150 ANOS ERA PUBLICADO LIVRO SOBRE OS PARADOXOS DO INFINITO

Os limites da matemática clássica

Em 1851 era publicado, em língua alemã, um pequeno livro intitulado *Paradoxos do infinito*, de autoria do matemático e filósofo tcheco Bernard Bolzano (1781-1848). Publicado três anos depois de sua morte, o trabalho abordava de forma nova e original o conceito de infinito – suma formulação cheia de paradoxos.

A primeira noção do infinito tem sua origem no princípio da contagem. Ao contar e ordenar – um, dois, três..., o primeiro, o segundo... – percebemos, através do discernimento, que sempre podemos acrescentar mais um elemento, experimentando assim o infinitamente grande. Outra noção é a do infinitamente pequeno, em que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente: é o caso de um segmento de reta dividido ao meio, cujas metades são subdivididas ao meio e as partes resultantes são novamente subdivididas, de forma indefinida.

Os paradoxos relacionados com o infinito tornaram-se famosos na Grécia e foram muito estudados na Idade Média de modo especulativo e metafísico. Entre esses paradoxos, destacam-se os apontados pelo filósofo e matemático grego Zenão de Eléia (c.430-c.490 a.C.) que apresentou as dificuldades lógicas que aparecem ao lidarmos com o conceito de infinito. Dois desses paradoxos são a 'dicotomia' e a 'flecha'. No primeiro, Zenão defende que, se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível pois, para percorrê-lo, é preciso antes alcançar seu ponto médio e, antes ainda, alcançar o ponto que estabelece a marca de um quarto do segmento, e assim por diante, *ad infinitum*. O movimento, portanto, jamais começará. No segundo paradoxo, ele diz que, se o tempo é formado de instantes atômicos indivisíveis, então uma flecha em movimento estará sempre parada, já que, em cada instante, ela estará em uma posição fixa. A flecha, então, jamais se moverá.

Muitas explicações foram dadas para os paradoxos de Zenão. Faltava uma linguagem apropriada para falar do infinito. Por outro lado, o paradoxo causa desconforto porque sua abordagem lógica e coerente nega a realidade que observamos e experimentamos. Tal é o desconforto que os infinitésimos foram totalmente excluídos da geometria demonstrativa grega.

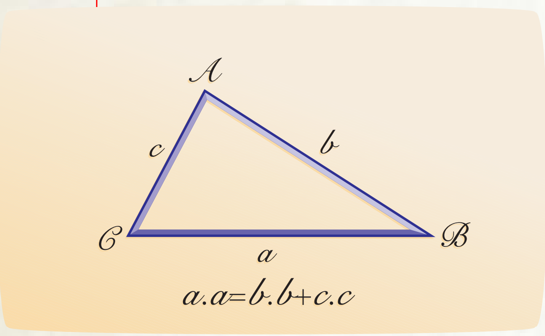
O racionalismo grego tanto promoveu como tentou explicar os paradoxos. Por volta do ano 350 a.C., a escola platônica apresentou uma resposta, através do método de exaustão, creditada ao matemático grego Eudoxo (408-353 a.C.). Esse método foi muitíssimo utilizado pelo também matemático grego Arquimedes (c.287-212 a.C.), para calcular diversas áreas e volumes. Os resultados de Arquimedes serviriam de base para as verificações da eficácia do cálculo infinitesimal feitas posteriormente pelo matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e pelo matemático inglês Isaac Newton (1642-1727).

O método de exaustão admite que uma grandeza pode ser indefinidamente dividida e baseia-se no seguinte postulado: "Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, chegando, por fim, a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie". Ou seja, não sobra nada.

O axioma resolve o primeiro paradoxo, de maneira ao mesmo tempo brilhante e marota, ao postular que um determinado processo infinito tem fim, esgotando assim a grandeza inicial. Tal procedimento, aceito pelo racionalismo grego, caracteriza-se pela axiomatização de verdades primeiras, das quais todas as outras devem ser deduzidas. Esse é o critério de verdade inicialmente apresentado pelo matemático e filósofo grego Tales de Mileto (c.624-545 a.C.) e desenvolvido pela escola pitagórica. Um exemplo famoso é o teorema de Pitágoras (filósofo grego, século 6 a.C.), considerado verdadeiro porque foi deduzido e demonstrado a partir de axiomas, tidos como verdades primeiras e indeléveis.

Esse mesmo teorema era conhecido experimentalmente por inúmeros povos. Mas, para os gregos, a verdade não vinha da experiência nem poderia ser apreendida pelos nossos sentidos – imperfeitos –, que nos remetem apenas ao conhecimento de uma representação grotesca da realidade absoluta. Só seria possível ter acesso à luz verdadeira através da dedução ou método axiomático.

Outro grande problema relacionado com o infinito foi a constatação pelos pitagóricos da existência de segmentos que não podem ser medidos, como a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 1 cm cada um. Essa impossibilidade não acontece na prática e parece mesmo uma questão improcedente, já que podemos medir qualquer segmento; basta ter uma régua. Mas, novamente, o tipo de racionalidade grega produziu esse tipo de questionamento, em que se constata que não existem números suficientes para medir todos os segmentos nem para medir a área de um círculo de raio unitário. Surge assim o problema dos números irracionais, incluindo aí o lendário número π.



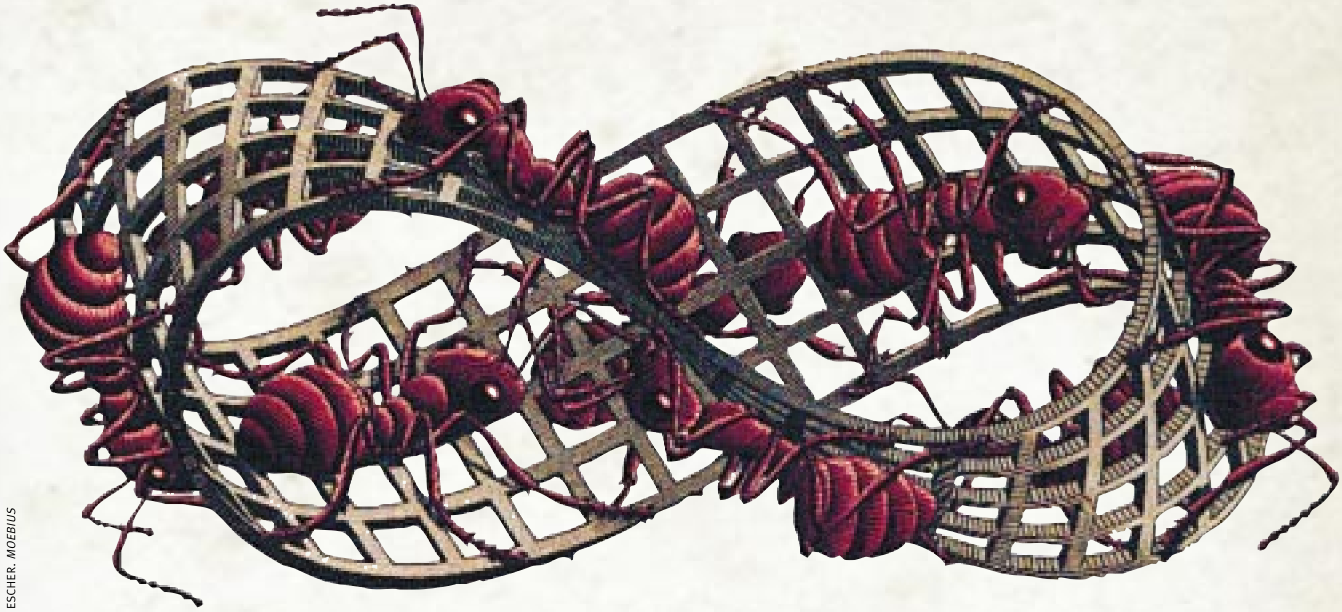
A insuficiência do sistema numérico perturbou a racionalidade grega. A escola platônica contornou o problema com a teoria das proporções de Endoxo para tratar os segmentos incomensuráveis descobertos por Pitágoras. Mas não conseguiu resolver a questão, principalmente a da área de círculos. Na Idade Média, foram feitas inúmeras abordagens metafísicas com relação à natureza do infinito, todas elas inócuas. No Renascimento, o matemático italiano Francesco Bonaventura Cavalieri (1598-1647) retomou o velho conceito das partes atômicas indivisíveis abandonado pelos gregos, para construir um princípio muito útil no cálculo de áreas e volumes – o conhecido princípio de Cavalieri, ensinado nas aulas de geometria da escola fundamental.

Cavalieri foi aluno do matemático e astrônomo Galileu Galilei (1564-1642), que expressava claramente a dificuldade de entender ontologicamente o infinito devido a seus inúmeros paradoxos. Galileu concluiu que infinito e indivisibilidade são, em sua própria natureza, incompreensíveis para nós e apontou que os atributos 'maior', 'menor' e 'igual' não fazem nenhum sentido quando usados para comparar quantidades infinitas. Por exemplo, pode-se fazer uma correspondência entre o conjunto dos números pares e o de todos os números inteiros, associando cada número inteiro n a um número par $2n$. Como é possível fazer a correspondência um a um, não se pode afirmar que o total de números pares é menor do que o de números inteiros. Isso contradiz um axioma básico da racionalidade grega, que diz que o todo é maior que a parte. Surge então outro paradoxo, o dos conjuntos com infinitos elementos.

A partir do século 16, o conhecimento matemático avança consideravelmente, como resposta às necessidades do mundo pós-renascentista e da ciência moderna, que requer o completo controle dos fenômenos naturais e a quantificação dos conceitos e grandezas emergentes, como força e aceleração, temperatura e pressão, velocidade e tempo etc. Dentro desse contexto histórico, a matemática torna-se operacional e o infinito começa a ser tratado de maneira intuitiva, tendo como justificativa a funcionalidade. Os resultados passam a justificar qualquer procedimento: todo raciocínio é válido desde que funcione e os resultados possam ser verificados.

Pelos três séculos seguintes (16, 17 e 18), o método dedutivo – a racionalidade grega – foi atropelado. Newton e Leibniz oficializaram esse atropelo com a teoria dos infinitesimais que culminou no teorema fundamental do cálculo – a grande ferramenta para calcular áreas, volumes e resolver equações diferenciais. Ninguém entendia o que era exatamente um infinitésimo indivisível, mas como o método e o raciocínio funcionavam bem, não se exigia fundamentação. Um dos que criticaram os infinitésimos foi o filósofo e bispo irlandês George Berkeley (1685-1753), que os chamou de "fantasmas de quantidades que expiraram". Na época, o problema dos números irracionais ainda não havia sido resolvido, mas continuou atropelado.

Entre os intelectuais que se sentiram incomodados com a falta de fundamentação destacam-se o filósofo e matemático francês Jean le Rond D' Alembert (1717-1783) e o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Por volta de 1850, era consenso a necessidade de uma revi-



M. ESCHER. *MOEBIUS*

são completa dos fundamentos da matemática. Muitos fatos contribuíram para isso. Um dos mais importantes foi o aparecimento das geometrias não euclidianas em torno de 1830, introduzidas pelo matemático húngaro Janos Bolyai (1802-1860) e pelo matemático russo Nikolai I. Lobashevsky (1792-1856). Essas geometrias puseram em dúvida a própria noção de axioma e o sistema hipotético dedutivo característico da racionalidade grega.

A revisão consistia em demonstrar os resultados sem apelar para intuições geométricas espaciais. Para isso, seria necessário definir todos os conceitos aritmeticamente, encontrar uma linguagem adequada para lidar com o infinito e determinar precisamente a noção de limite. Essa tarefa começou a ser feita pelo matemático francês Augustin L. Cauchy (1789-1857) e levada a cabo pela escola alemã na segunda metade do século 19.

A questão dos irracionais só foi resolvida em 1872 pelos matemáticos alemães Georg Cantor (1845-1918) e Julius W. R. Dedekind (1831-1916) independentemente e de maneiras diferentes. Esse movimento ficou conhecido como aritmetização da análise. Toda a intuição geométrica foi abolida e as demonstrações passaram a ser puramente analíticas, formais e rigorosas, dentro dos princípios do método hipotético dedutivo dos gregos. O problemático infinito foi então tratado com uma linguagem aritmética finitista, e a teoria dos conjuntos começou a se impor, preparando a base dos fundamentos da matemática do século 20.

É nesse cenário que surgiu o matemático e filósofo tcheco Bernard Bolzano (1781-1848). Filho de imigrante italiano, tornou-se padre e foi professor de religião na Universidade de Praga. Tinha forte inclinação para a lógica e a matemática. Sempre viveu nessa cidade inexpressiva e longe de qualquer centro cultural importante da época. Homem de língua e cultura alemãs, possuía um vasto conhecimento em várias áreas do saber, podendo ser considerado um precursor da aritmetização da análise. Em 1817, Bolzano tinha plena certeza da necessidade de rigor na análise matemática. Infelizmente, seu trabalho matemático foi ignorado por seus contemporâneos, e vários de seus resultados só seriam apreciados posteriormente.

Bolzano estudou vários exemplos análogos ao paradoxo de Galileu. Parece ter percebido que o infinito dos possíveis números irracionais era de um tipo diferente do dos números naturais – noção primordial que caracteriza a teoria dos números transfinitos proposta por Cantor no final do século 19. Em seu trabalho *Paradoxien des unendlichen* (Paradoxos do infinito), Bolzano percebeu, em um verdadeiro lance de gênio, que o paradoxo de Galileu poderia ser interpretado como uma característica genuína dos conjuntos infinitos. É exatamente essa característica que foi fundamental para o estabelecimento do cálculo sobre uma teoria de conjuntos infinitos, rigorosamente desenvolvida no final do século 19. Gênio abandonado, Bolzano desafiou sozinho o pavoroso e aterrorizador infinito.

Antônio Zumpano
Departamento de Matemática,
Universidade Federal
de Minas Gerais