"Cavalheiros, que isto certamente seja verdadeiro é absolutamente paradoxal; não podemos entender a fórmula, não sabemos o que significa. Mas conseguimos prová-la e portanto sabemos que deve ser verdade."

Benjamin Pierce, um dos principais matemáticos de Harward no século XIX, sobre a fórmula de Euler, $e^{\pi i} = -1$

LOGARITMO COMPLEXO DE NÙMERO NEGATIVO

Este texto tem o objetivo de mostrar que, no universo dos números complexos, todas as operações se fecham e todos os números existem.

Nos complexos, o logaritmo de números negativos existe.

Em particular, Euler encontrou uma "fórmula" que é surpreendente:

$$e^{\pi i} = -1$$

JUSTIFICATIVA

Por volta do século XVIII surgiu a questão: O que é logaritmo de um número negativo?

Em 1747 Euler mostrou que logaritmo na base e (número de Neper) de um número negativo é um número complexo.

1. **Argumento de Euler em linguagem simples:**

Seja x um real negativo

Sua representação como complexo, na forma trigonométrica será

$$|x|.(\cos \pi + i \text{ sen } \pi)$$

Aplicamos logaritmo base **e** (símbolo ln): $\ln x = \ln |x| + i(\pi+2k\pi)$, $k=0, \pm1,\pm2,...$

$\rightarrow$ Para $x = -1$ obtemos $\ln(-1) = \ln 1 + i(\pi+2k\pi) = i\pi$ $(k=0)$ pois $\ln 1 = 0$

$\rightarrow$ Deduzimos daí a fórmula de Euler:

Se $\pi i = \ln(-1)$ então $e^{\pi i} = -1$

2. **Definições e procedimentos de Euler com linguagem e conceitos avançados de matemática**

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

$$\ln x = \lim_{n\to\infty} n\left(x^{1/n} - 1\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...$$

Substituindo (x) por (ix) temos:

$$e^{ix} = 1+\frac{(ix)}{1!}+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+...$$

Calculando e substituindo as potências de i:

$$e^{ix} = 1+ix-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...$$

Juntando separadamente os reais do imaginários:

$$e^{ix} = \left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...\right)$$

que são séries de potência das funções cos x e sen x conhecidos na época de Euler, assim:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \qquad (1)$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x \qquad (2)$$

Fazendo (1) + (2) $\rightarrow$ $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

Fazendo (1) - (2) $\rightarrow$ $\operatorname{sen} x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

finalmente, fazendo **x = π** em (1) chegamos a $e^{i\pi} = -1$

Este texto foi fundamentado em:

MAOR, Eli. **e: A História de um Número**. Editora Record. RJ. 2003. Páginas 206 – 209, 229.